

Решение уравнения Навье – Стокса

Е.Г. Якубовский

НМСУГ e – mail yakubovski@rambler.ru

Аннотация

Решение нелинейных уравнений в частных производных могут определять значение неизвестных функций с большой величиной. При этом они сводятся к счетному количеству обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. При этом турбулентные решения, соответствующие большим значениям неизвестной функции, оказываются комплексными. Переход от действительного решения к комплексному турбулентному решению реализуется через бесконечность правой части дифференциального уравнения, которое в случае уравнения Навье – Стокса соответствует бесконечному решению. При этом комплексное решение конечно. В предлагаемой статье определен вид решения, в случае не кратных координат положения равновесия, так и в случае кратных положениях равновесия. Причем в случае кратных координат положения равновесия наблюдается хаотическое решение, структура которого описана в теореме 3,4. Зная структуру решения, удастся построить наиболее точное приближение к экспериментальным кривым. Вычислен коэффициент сопротивления потока жидкости в круглом трубопроводе при разных шероховатостях стенок трубопровода.

Постановка задачи

Рассмотрим проблему решения уравнения Навье – Стокса и уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости. Они имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{V}_k(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \sum_{l=1}^3 \mathbf{V}_l(t, \mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{V}_k(t, \mathbf{r})}{\partial x_l} = - \frac{\partial P(t, \mathbf{r})}{\rho \partial x_k} + \nu \Delta \mathbf{V}_k(t, \mathbf{r}), k = 1, \dots, 3 .$$
$$(\nabla, \mathbf{V}) = 0$$

При граничных условиях на границе тела, соприкасающегося с жидкостью $\mathbf{V}(t, \mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in S$, где величина S определяет границу тела. Решение ищем в виде с помощью метода Галеркина

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n(t) \varphi_n(\mathbf{r}), P(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N y_n(t) \psi_n(\mathbf{r}) + \psi_0(\mathbf{r});$$

$$\mathbf{r} \in S \rightarrow \varphi_n(\mathbf{r}) = 0, \varphi_n(\mathbf{r}), \psi_n(\mathbf{r}) \in C^2,$$

где пространство C^2 это дважды непрерывно дифференцируемая функция, $\psi_0(\mathbf{r})$ это заданное внешнее воздействие, которое в случае трубопровода равно $\psi_0(\mathbf{r}) = (P - P_0)z/L + P_0$, где z направление продольной оси трубопровода, P_0, P давление в начале и конце трубопровода, L длина трубопровода.

Подставляем эти функции в дифференциальное уравнение и умножаем на величину $\varphi_m(\mathbf{r})$ и интегрируем по пространству, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_m(t)}{dt} = \sum_{p,q=1}^{3N} F_{mpq} x_p(t) x_q(t) + \sum_{p=1}^{4N} G_{mp} x_p(t) + H_m; m = 1, \dots, 3N \quad . \quad (\text{П.3.1})$$

$$P_{mp} x_p(t) = 0, m = 1, \dots, N$$

Решая второе уравнение (П.3.1) подставляя $x_{n+2N}(t) = \sum_{m=1}^{2N} c_{nm} x_m(t), n = 1, \dots, N$

из второго уравнения (П.3.1) в первое, получим систему уравнений

$$\frac{dx_m(t)}{dt} = \sum_{p,q=1}^{2N} F_{mpq}^1 x_p(t) x_q(t) + \left(\sum_{p=1}^{2N} + \sum_{p=3N+1}^{4N} \right) G_{mp}^1 x_p(t) + H_m^1; m = 1, \dots, 2N$$

$$\sum_{p,q=1}^{2N} F_{mpq}^1 x_p(t) x_q(t) + \left(\sum_{p=1}^{2N} + \sum_{p=3N+1}^{4N} \right) G_{mp}^1 x_p(t) + H_m^1 = 0, m = 2N + 1, \dots, 3N \quad . \quad (\text{П.3.2})$$

Определяя $x_{n+3N}(t)$ из второго уравнения (П.3.2) и подставляем найденное значение в первое уравнение (П.3.2). Получим систему

уравнений

$$\frac{dx_m(t)}{dt} = \sum_{p,q=1}^{2N} F_{mpq}^2 x_p(t)x_q(t) + \sum_{p=1}^{2N} G_{mp}^2 x_p(t) + H_m^2; m = 1, \dots, 2N. \quad (\text{П.3.3})$$

Причем имеем

$$x_{n+2N}(t) = \sum_{m=1}^{2N} c_{nm} x_m(t), x_{n+3N}(t) = \sum_{m=1}^{2N} b_{nm} x_m(t) + \sum_{p,q=1}^{2N} F_{mpq}^1 x_p(t)x_q(t), n = 1, \dots, N$$

Где определены величины

$$\mathbf{x}_{nl}(t) = x_{n+N(l-1)}(t), l = 1, \dots, 3; y_n(t) = x_{n+3N}(t), n = 1, \dots, N.$$

И коэффициенты $F_{mpq}, G_{mp}, H_m, F_{mpq}^1, G_{mp}^1, H_m^1, F_{mpq}^2, G_{mp}^2, H_m^2, c_{nm}, b_{nm}$ являются константами. Эту систему нелинейных обыкновенных дифференциальных автономных уравнений (П.3.3) и предстоит решать. Начальные условия этой системы нелинейных уравнений определяются из условия

$$\mathbf{V}(t_0, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n(t_0) \varphi_n(\mathbf{r}),$$

$$P(t_0, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N y_n(t_0) \psi_n(\mathbf{r}) + \psi_0(\mathbf{r});$$

Умножая эту систему линейных уравнений на величину $\varphi_m(\mathbf{r})$ и интегрируя по пространству, получим

$$\mathbf{V}_m(t_0) = \sum_{n=1}^N \Phi_{mn} \mathbf{x}_n(t_0)$$

$$P_m(t_0) = \sum_{n=1}^N \Psi_{mn} y_n(t_0) + \Psi_{m0}$$

Причем имеется связь между начальными условиями

$$x_{n+2N}(t_0) = \sum_{m=1}^{2N} c_{nm} x_m(t_0), x_{n+3N}(t_0) = \sum_{m=1}^{2N} b_{nm} x_m(t_0) + \sum_{p,q=1}^{2N} F_{mpq}^1 x_p(t_0) x_q(t_0), n = 1, \dots, N$$

Откуда определяются начальные условия $\mathbf{x}_n(t_0), y_n(t_0)$.

1. Построение решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему нелинейных автономных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_l}{dt} = F_l(x_1, \dots, x_N), l = 1, \dots, N \quad (1.1)$$

Исследуются комплексные и действительные решения задачи Коши этого дифференциального уравнения в случае действительных и комплексных начальных условиях, при действительном аргументе t , т.е. $x_l(t_0) = x_l^0, l = 1, \dots, N$, где величина t_0 соответствует начальному моменту интегрирования, а величина x_l^0 в общем случае комплексная. Причем в случае действительных значениях $x_k, k = 1, \dots, N$, правая часть (1.1) действительна. При этом l правая часть дифференциального уравнения зависит от переменной x_l . В случае не выполнения этого условия осуществим не вырожденное линейное преобразование неизвестных функций для выполнения этого условия.

Систему дифференциальных уравнений (1.1) можно представить при

не кратных положениях равновесия в виде

$$\frac{dx_l}{dt} = \exp[G_l(x_1, \dots, x_N)] \prod_{s=1}^S (x_l - a_l^s), \quad (1.2)$$

где введен не обращающийся в ноль множитель $\exp[G_l(x_1, \dots, x_N)]$, который

равен $\exp[G_l(x_1, \dots, x_N)] = F_l(x_1, \dots, x_N) / \prod_{s=1}^S (x_l - a_l^s)$. При подстановке этого

множителя в (1.2), получим (1.1). Покажем, что этот множитель в ноль не обращается. Величины a_l^s удовлетворяют условию

$$F_k(a_1^s, \dots, a_N^s) = 0, k = 1, \dots, N; s = 1, \dots, S, \text{ где величина } S \text{ конечна.}$$

При условии $x_l \rightarrow a_l^\alpha, l = 1, \dots, N$ имеем конечный предел

$$\exp[G_l(a_1^\alpha, \dots, a_N^\alpha)] = \frac{\partial F_l(a_1^\alpha, \dots, a_N^\alpha)}{\partial x_l} / [(a_l^\alpha - a_l^1) \dots (a_l^\alpha - a_l^{\alpha-1})(a_l^\alpha - a_l^{\alpha+1}) \dots (a_l^\alpha - a_l^S)]$$

Где произвели сокращение множителя $x_l - a_l^\alpha$, числитель дроби в ноль не обращается, так как рассматриваются не совпадающие корни, являющиеся координатами положения равновесия.

При этом дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\frac{dx_l}{dH_l(t, t_0)} = \prod_{s=1}^S (x_l - a_l^s), \quad (1.3)$$

$$H_l(t, t_0) = \int_{t_0}^t \exp\{G_l[x_1(t), \dots, x_N(t)]\} dt$$

где $H_l(t, t_0)$ стремящаяся к бесконечности функция при условии стремления координат к положению равновесия. В случае решения в действительной плоскости это монотонная функция.

Лемма 1. При стремлении неизвестной функции к координатам положения равновесия $H_l(t, t_0) \rightarrow \infty$.

Имеем соотношения

$\exp[G_l(x_1, \dots, x_N)] \rightarrow \exp[G_l(a_1^s, \dots, a_N^s)] = \text{const}; t \rightarrow \infty$ и значит $H_l(t, t_0) \rightarrow \infty$, как интеграл от константы.

Лемма 2. Решением дифференциального уравнения (1.1) является функция $x_l(t)$, удовлетворяющая формуле (1.4).

Для получения (1.4) разделим уравнение (1.3) на произведение множителей $x_l - a_l^s$ и умножим (1.4) на величину $dH_l(t, t_0)$. Раскладываем полученную дробь на сумму простых дробей и их интегрируем. Потенцируя полученное выражение, получим (1.4)

$$\prod_{s=1}^S (x_l - a_l^s)^{\lambda_l^s} / \prod_{s=1}^S (x_l^0 - a_l^s)^{\lambda_l^s} = \exp[H_l(t, t_0)]; \quad (1.4)$$

$$\lambda_l^s = 1 / [(a_l^s - a_l^1) \dots (a_l^s - a_l^{s-1})(a_l^s - a_l^{s+1}) \dots (a_l^s - a_l^S)]$$

где все значения координат положения равновесия не одинаковы.

Лемма 3. Сумма коэффициентов λ_l^s по индексу s равна нулю, т.е. $\sum_{s=1}^S \lambda_l^s = 0$.

Для доказательства этого тождества рассмотрим полином $S - 1$ степени относительно y

$$P(y) = \sum_{s=1}^S \frac{(y - a_l^1) \dots (y - a_l^{s-1})(y - a_l^{s+1}) \dots (y - a_l^S)}{(a_l^s - a_l^1) \dots (a_l^s - a_l^{s-1})(a_l^s - a_l^{s+1}) \dots (a_l^s - a_l^S)},$$

В точках положения равновесия $y = a_l^s, s = 1, \dots, S$ полином удовлетворяет $P(a_l^s) = 1$. В силу единственности полинома степени $S - 1$, проходящего через S точек, получаем $P(y) = 1$, так как это значение удовлетворяет точкам аппроксимации. Распишем формулу для полинома, равного единице, разделив его на произведение $(y - a_l^1) \dots (y - a_l^S)$, получим

$$\sum_{s=1}^S \frac{1}{(a_i^s - a_i^1) \dots (a_i^s - a_i^{s-1})(a_i^s - a_i^{s+1}) \dots (a_i^s - a_i^S)(a_i^s - y)} +$$

$$+ \frac{1}{(y - a_i^1) \dots (y - a_i^{s-1})(y - a_i^s)(y - a_i^{s+1}) \dots (y - a_i^S)} = 0,$$

полагая, $y = a_i^{S+1}$ получим тождество $\sum_{s=1}^{S+1} \lambda_i^s = 0$, в случае, если имеется $S + 1$

положение равновесия.

Но чтобы реализовать решение, надо знать положения равновесия этой системы нелинейных уравнений. Кроме того, положения равновесия могут быть кратные, что изменяет ход решения, оно становится случайным, или хаотическим. Но удастся доказать важную теорему.

Теорема 1. Рассматривается задача Коши при произвольных действительных начальных условиях для системы нормальных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1). Случай вырожденного решения задачи Коши – положения равновесия, не рассматривается. В случае, если у системы (2.1) имеются комплексно-сопряженные положения равновесия с действительной частью, то при конечном аргументе t действительное решение задачи Коши системы (2.1) при действительных начальных условиях стремится к бесконечности, а потом переходит в комплексное решение. При этом правую часть (2.1) считаем регулярной функцией, действительной при действительных аргументах. Она имеет конечное число не кратных положений равновесия.

Доказательство.

Если решать систему (2.2) при не кратных положениях

равновесия, то получим согласно с леммой 2

$$\begin{aligned} & \{-2\lambda_{iml}^s \arctan[(x_l - a_l^s)/b_l^s] + \lambda_{rel}^s \ln[(x_l - a_l^s)^2 + (b_l^s)^2]\} \Big|_{t_0}^t + \\ & + \sum_k \lambda_l^k \ln(x_l - c_l^k) \Big|_{t_0}^t = H_l(t, t_0), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $a_l^s + ib_l^s$ выделенное комплексное положение равновесия, c_l^s остальные положения равновесия. Коэффициенты λ_l^s удовлетворяют $\sum_s \lambda_l^s = 0$ в

соответствии с леммой 3. При этом в сумме $\sum_{s=1}^S \lambda_l^s$ величина действительной

части λ_{rel}^s в случае комплексного значения λ_l^s участвует дважды и в силу того, что все числа λ_l^s удовлетворяют условию $\sum_s \lambda_l^s = 0$, имеем формулу

$$2\lambda_{rel}^s + \sum_k \lambda_l^k = 0.$$

Обоснуем формулу (2.3). Для этого два комплексно сопряженных члена решения преобразуем (для упрощения записи индекс l опускаем)

$$\frac{\lambda_{re}^s + i\lambda_{im}^s}{x - a^s - ib^s} + \frac{\lambda_{re}^s - i\lambda_{im}^s}{x - a^s + ib^s} = \frac{2(x - a^s)\lambda_{re}^s - 2b^s\lambda_{im}^s}{(x - a^s)^2 + (b^s)^2}, \quad (2.4)$$

где $\lambda^s = \lambda_{re}^s + i\lambda_{im}^s$. После интегрирования (2.4) по аргументу x , получим формулу (2.3)

$$\lambda_{re}^s \ln[(x - a^s)^2 + (b^s)^2] - 2\lambda_{im}^s \arctan \frac{x - a^s}{b^s}.$$

Решение равняется

$$x_l(t) = a_l^s + b_l^s \tan D_l(t),$$

где

$$\begin{aligned}
D_l(t) &= \left\{ \sum_k \lambda_l^k \ln(x_l - c_l^k) \Big|_{t_0}^t + \lambda_{rel}^s \ln[(x_l - a_l^s)^2 + (b_l^s)^2] \Big|_{t_0}^t - H_l(t, t_0) \right\} / 2\lambda_{iml}^s = \\
&= \left\{ \sum_k \lambda_l^k + 2\lambda_{rel}^s + \sum_k \lambda_l^k \ln(1 - c_l^k / x_l) + \lambda_{rel}^s \ln[(1 - a_l^s / x_l)^2 + (b_l^s)^2 / x_l^2] - \right. \\
&\quad \left. - \sum_k \lambda_l^k \ln(x_l^0 - c_l^k) - \lambda_{rel}^s \ln[(x_l^0 - a_l^s)^2 + (b_l^s)^2] - H_l(t, t_0) \right\} / 2\lambda_{iml}^s, \\
&\quad \sum_k \lambda_l^k + 2\lambda_{rel}^s = 0
\end{aligned}$$

При этом величина $\sum_k (\lambda_l^k c_l^k + 2\lambda_{rel}^s a_l^s)$ действительная в силу существования комплексно-сопряженных положений равновесия. Т.е. имеем равенство при условии $|x_l| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
x_l(t) &= a_l^s + b_l^s \tan D_l(t) = \\
&= a_l^s + b_l^s \tan \left\{ \left[\sum_k \lambda_l^k \ln(1 - c_l^k / x_l) + \lambda_{rel}^s \ln[(1 - a_l^s / x_l)^2 + (b_l^s)^2 / x_l^2] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_k \lambda_l^k \ln(x_l^0 - c_l^k) - \lambda_{rel}^s \ln[(x_l^0 - a_l^s)^2 + (b_l^s)^2] - H_l(t, t_0) \right] / 2\lambda_{iml}^s \right\} = . \quad (2.5) \\
&= a_l^s + b_l^s \tan \left\{ \left[- \left(\sum_k \lambda_l^k c_l^k + 2\lambda_{rel}^s a_l^s \right) / x_l + 0(1/x_l^2) \right] + \right. \\
&\quad \left. - \sum_k \lambda_l^k \ln(x_l^0 - c_l^k) - \lambda_{rel}^s \ln[(x_l^0 - a_l^s)^2 + (b_l^s)^2] - H_l(t, t_0) \right] / 2\lambda_{iml}^s \right\}
\end{aligned}$$

Это уравнение имеет решение, стремящееся к бесконечности при условии

$$\begin{aligned}
&\left\{ \sum_k \lambda_l^k \ln(x_l^0 - c_l^k) + \lambda_{rel}^s \ln[(x_l^0 - a_l^s)^2 + (b_l^s)^2] + H_l(t, t_0) \right\} / 2\lambda_{iml}^s \rightarrow \\
&\rightarrow \pi/2 + \frac{Q_l}{x_l} + A_l \Delta t \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Подставляя формулу (2.6) в формулу (2.5), получим

$$x_l(t) = a_l^s - \frac{2\lambda_{iml}^s b_l^s}{\sum_n \lambda_l^n \ln(1 - c_l^n / x_l) + \lambda_{rel}^s \ln[(1 - a_l^s / x_l)^2 + (b_l^s)^2 / x_l^2] + Q_l / x_l + A_l \Delta t} .$$

При этом, это уравнение имеет решение $|x_l| \rightarrow \infty$, так как сводится к тождеству

$$\frac{\sum^n \lambda_l^n c_l^n + 2\lambda_{rel}^s a_l^s + Q_l}{x_l} + A_l \Delta t + S_l^2 \left(\frac{1}{x_l}\right)^2 + \dots = \frac{2\lambda_{iml}^s b_l^s}{x_l - a_l^s}.$$

Это уравнение определяет бесконечное решение, которое меняет знак бесконечности справа от координаты бесконечности.

При этом решение дифференциального уравнения при росте $H_l(t, t_0)$ согласно лемме 1, может иметь комплексные корни

$$\sum_k \lambda_l^k \ln(x_l - a_l^k) \Big|_{t_0}^t = H_l(t, t_0).$$

При этом, так как справедливо $\sum_k \lambda_l^k = 0$ согласно лемме 3, и положения равновесия имеют действительную часть, имеются числа с отрицательной действительной частью λ_l^k , значит, имеется сходимость к одному из положений равновесия. Действительное решение будет стремиться к бесконечности, причем нарушатся условия существования и единственности задачи Коши. При этом при бесконечности $H_l(t, t_0)$ согласно лемме 1, неизвестная функция будет стремиться к одному из положений равновесия. Это положение равновесия не может быть действительным, так как действительное решение бесконечно, значит, решение будет иметь точку ветвления и стремиться к комплексному положению равновесия. Значит, при комплексных положениях равновесия получается конечное комплексное решение при изменении $H_l(t, t_0)$. Т.е. в некоторой точке начнется комплексное решение.

Конец доказательства.

Приведем пример, описывающий это свойство дифференциального уравнения, переход к комплексному решению. Так для дифференциального

уравнения может возникнуть комплексное решение, вместо бесконечного действительного решения

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2.$$

Причем положения равновесия чисто мнимые $x = \pm i$, и значит, решение может не стремиться к положению равновесия. Причем для этого примера не обязательна действительная часть у координат положения равновесия.

Используя неявную схему решения, получим следующее уравнение

$$x = x_0 + (1 + x^2)\Delta t + 0(\Delta t)^2.$$

Разрешая относительно неизвестной функции x , получим неявную схему

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4[x_0 + \Delta t + 0(\Delta t)^2]\Delta t}}{2\Delta t}.$$

Которое при условии $x_0 > 1/(4\Delta t) - \Delta t - 0(\Delta t)^2$ определит конечное комплексное решение.

Причем комплексное решение обладает новыми свойствами, оно сложным образом вращается вокруг положения равновесия. При этом действительное решение стремится к бесконечности, т.е. правая часть дифференциального уравнения стремится к бесконечности, и нарушаются условия существования и единственности решения задачи Коши, и возникает дополнительное комплексное решение. Получив комплексное решение по неявной схеме, запишем решение с комплексными начальными условиями $x(t_0) = x_0 + i\delta$, тогда получим конечное комплексное решение

$x = \tan[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]$ при любом t . Т.е. приближенно имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= -i \frac{\exp\{i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\} - \exp\{-i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\}}{\exp\{i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\} + \exp\{-i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\}} = \\ &= i - 2i \exp\{2i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\} + i \exp\{4i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\} + \dots = \\ &= i - 2i \exp[2i(t - t_0 + \alpha) - 2\beta] + i \exp[4i(t - t_0 + \alpha) - 4\beta] + \dots \\ &\quad \arctan(x_0 + i\delta) = \alpha + i\beta \end{aligned}$$

При этом знаменатель этой дроби в ноль не обращается.

Т.е. конечного решения задачи в действительной плоскости не существует. А в комплексной плоскости имеется конечное непрерывное решение в случае не кратных положениях равновесия.

Но возникает вопрос, каков физический смысл мнимой части комплексного решения.

2. Физический смысл комплексного решения.

Опишем физический смысл комплексного турбулентного решения. Итак, рассмотрим действительное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений $x_\alpha(t)$. Пусть начальные данные имеют среднее x_α^0 и дисперсию $\langle [\Delta x_\alpha^0]^2 \rangle$ (дисперсия начальных данных в случае уравнения Навье – Стокса определяется шероховатостью поверхности). Тогда для дисперсии решения имеем

$$\begin{aligned} \langle [\Delta x_\alpha(t)]^2 \rangle &= \langle [x_\alpha(t) - \langle x_\alpha(t) \rangle]^2 \rangle = \langle [x_\alpha(t)]^2 \rangle - 2 \langle x_\alpha(t) \rangle \langle x_\alpha(t) \rangle + \langle x_\alpha(t) \rangle^2 = \\ &= \langle [x_\alpha(t)]^2 \rangle - \langle x_\alpha(t) \rangle^2 \end{aligned}$$

Откуда имеем

$$\langle [x_\alpha(t)]^2 \rangle = \langle x_\alpha(t) \rangle^2 + \langle [\Delta x_\alpha(t)]^2 \rangle = \langle x_\alpha(t) \rangle + i \sqrt{\langle [\Delta x_\alpha(t)]^2 \rangle} \quad (3.1)$$

При этом решение усредняется по некоторому мнимому случайному параметру, с математическим ожиданием, равным нулю. Разложим

комплексное решение по этому мнимому параметру

$$x_{\alpha}(t, i\beta) = x_{\alpha}(t, 0) + \frac{\partial x_{\alpha}(t, 0)}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial^2 x_{\alpha}(t, 0)}{\partial \beta^2} \beta^2 / 2 + \dots$$

Причем решение содержит как действительную, так и мнимую часть, так как решение получится комплексным. Средний квадрат действительного решения складывается из квадрата модуля комплексной величины, с математическим ожиданием в качестве действительной части и среднеквадратическим отклонением как мнимой части решения. Если имеем комплексное решение обыкновенного дифференциального уравнения, то модуль величины $\langle x_{\alpha}(t) \rangle + i\sqrt{\langle [\Delta x_{\alpha}(t)]^2 \rangle}$ нужно рассматривать как квадрат некоторого среднего действительного решения $[x_{\alpha}(t)]^2$, при этом получим квадрат поступательной и колебательной в одномерном случае и вращательной в трехмерном случае энергии тела. Т.е. по комплексному решению восстанавливаем действительное решение.

Следовательно, алгоритм нахождения среднего решения, или среднего в фазовом пространстве решения, и его дисперсию сводится к нахождению комплексного решения, причем среднее решение соответствует действительной части решения, а квадрат комплексной части соответствует дисперсии решения. Таков физический смысл комплексного решения, действительная часть - это среднее решение, а мнимая часть - это его среднеквадратическое отклонение. Причем действительная и мнимая часть ортогональны, и образуют комплексное пространство. В самом деле, согласно обратной теореме Пифагора в силу формулы (3.1) математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение образуют катеты, а средний квадрат является гипотенузой.

Покажем, что мнимая часть комплексной производной от координаты в фазовом пространстве дифференциального уравнения, которую назовем скоростью, образует пульсирующее перемещение координаты в фазовом

пространстве. Мнимая часть скорости соответствует скорости вращения в фазовом пространстве. Так как известен радиус вращения, то можно определить и частоту вращения. В плоскости вращения комплексную скорость с постоянным радиусом вращения и постоянной частотой можно представить в виде $V_x + iV_y = V_0 \exp(i\omega t)$. В случае переменной по пространству стационарной скорости эту формулу можно представить локально в одной плоскости в виде

$$V_x(x, y) + iV_y(x, y) = V_0(x, y) \exp\left[i \int_0^t \omega(x, y, u) du\right],$$

причем частота зависит от времени, так как смещение фазы обеспечивается гармоническими колебаниями в соседних точках. Сумма гармонических колебаний с разными частотами, зависящими от времени, определяет пульсирующий режим в фазовом пространстве, при стационарной комплексной скорости. Т.е. получается, что комплексная скорость описывает пульсирующие во времени координаты точек фазового пространства. Ситуация аналогична наличию нескольких стационарных вихрей, описывающих не стационарное вращение потока.

Трехмерную скорость потока можно представить в виде

$$V_l = V_{il} + iV_{nl} = V_l \exp(i\varphi_l), \varphi_l = \arg(V_{il} + iV_{nl}).$$

Причем скорости определяются в виде интеграла от касательного ускорения, по формуле

$$\begin{aligned} V_{il} &= \int_{t_0}^t t_l(u) w_t(u) du + V_{il}(t_0) = \int_{t_0}^t t_l(u) \frac{d \sqrt{\sum_{k=1}^3 V_k(u) V_k^*(u)}}{du} du + V_{il}(t_0) = \\ &= \int_{t_0}^t t_l(u) \frac{d \sqrt{\sum_{k=1}^3 [V_{ik}^2(u) + V_{nk}^2(u)]}}{du} du + V_{il}(t_0), \end{aligned}$$

Интеграл от нормального ускорения определяет нормальную компоненту скорости, по формуле

$$V_{nl} = \int_{t_0}^t w_{nl}(u) du = \int_{t_0}^t \frac{n_l(u) \sum_{k=1}^3 V_k(u) V_k^*(u)}{\rho(u)} du = \int_{t_0}^t \frac{n_l(u) \sum_{k=1}^3 [V_{ik}^2(u) + V_{nk}^2(u)]}{\rho(u)} du$$

Отметим, что тангенциальное ускорение и нормальное ускорение образуют скорость, которая направлена по касательной к траектории частицы. Величины t_l, n_l это тангенциальные и нормальные орты. Тангенциальное ускорение определяется по формуле

$$w_t = d \sqrt{\sum_{k=1}^3 V_k(t) V_k^*(t)} / dt = d \sqrt{\sum_{k=1}^3 [V_{ik}^2(t) + V_{nk}^2(t)]} / dt. \text{ Направление скоростей}$$

V_{il}, V_{nl} ортогонально и их сумма приводит к модулю скорости движения. Дифференцируемые по времени компоненты этих проекций определяют тангенциальное и нормальное ускорение.

Лемма 4. Две проекции величины, действительная и мнимая часть скорости,

$$\text{ортогональны } \sum_{l=1}^3 V_{nl} V_{il} = 0.$$

Подынтегральные компоненты этих величин ортогональны в любой точке отрезка интегрирования. Докажем, что интегралы по времени нормального и тангенциального ускорения ортогональны. В самом деле, допустим, интегралы ортогональны до определенного момента времени t . Докажем, что и в следующий момент времени они тоже ортогональны

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^t w_{nl} dt + \Delta V_{nl} \right) \left(\int_0^t w_{il} dt + \Delta V_{il} \right) = \\ & = \int_0^t w_{nl} dt \int_0^t w_{il} dt + \int_0^t w_{nl} dt \Delta V_{il} + \int_0^t w_{il} dt \Delta V_{nl} + \Delta V_{nl} \Delta V_{il} \end{aligned}$$

При этом первый и последний члены ортогональны. Докажем что сумма

второго и третьего члена равна нулю, для чего представим их в виде

$$\Delta\left(\int_0^t w_{nl} dt \int_0^t w_{il} dt\right) = 0.$$

Т.е. получаем, что и в следующий момент времени действительная и мнимая часть ортогональна. При этом суммарная скорость движения определяется по действительной и мнимой части скорости.

Теорема 2. В N мерном случае, восстановить комплексный вектор $V_{\text{Re}} \mathbf{V}_t / |\mathbf{V}_t| + i V_{\text{Im}} \mathbf{V}_n / |\mathbf{V}_n|$, у которого действительная и мнимая часть ортогональны, по комплексному вектору $\mathbf{V}_{\text{Re}} + i \mathbf{V}_{\text{Im}}$, у которого действительная и мнимая часть не ортогональна, надо с помощью формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_t &= (\mathbf{V}_{\text{Re}} + V_{\text{Re}} \mathbf{N} / N) / 2, \mathbf{N} = \mathbf{V}_{\text{Re}} V_{\text{Im}}^2 - \mathbf{V}_{\text{Im}} (\mathbf{V}_{\text{Re}}, \mathbf{V}_{\text{Im}}) \\ \mathbf{V}_n &= (\mathbf{V}_{\text{Im}} + V_{\text{Im}} \mathbf{M} / M) / 2, \mathbf{M} = \mathbf{V}_{\text{Im}} V_{\text{Re}}^2 - \mathbf{V}_{\text{Re}} (\mathbf{V}_{\text{Re}}, \mathbf{V}_{\text{Im}}) \end{aligned}$$

Причем эта формула удовлетворяет $(\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_n) = 0$. Причем надо отметить, что функции $\mathbf{V}_{\text{Re}}, \mathbf{V}_{\text{Im}}$ расположены в разных N мерных пространствах, а функция $V_{\text{Re}} \mathbf{V}_t / |\mathbf{V}_t| + i V_{\text{Im}} \mathbf{V}_n / |\mathbf{V}_n|$ построена для одного пространства, в котором действительная и мнимая часть ортогональны.

Доказательство.

Вектора действительной и мнимой части должны быть ортогональны, как на двумерной плоскости, так и в N мерном пространстве. Преобразовать их, это значит построить из действительного и мнимого не ортогонального вектора, два ортогональных вектора с тем же модулем.

Причем считаем, что функции $\mathbf{V}_{\text{Re}}, \mathbf{V}_{\text{Im}}$ заданы в одинаковых пространствах

$$\begin{aligned} N^2 &= V_{\text{Im}}^2 [V_{\text{Re}}^2 V_{\text{Im}}^2 - (\mathbf{V}_{\text{Re}}, \mathbf{V}_{\text{Im}})^2] \\ M^2 &= V_{\text{Re}}^2 [V_{\text{Re}}^2 V_{\text{Im}}^2 - (\mathbf{V}_{\text{Re}}, \mathbf{V}_{\text{Im}})^2] \\ (\mathbf{N}, \mathbf{M}) &= (\mathbf{V}_{\text{Re}}, \mathbf{V}_{\text{Im}}) [(V_{\text{Re}}, \mathbf{V}_{\text{Im}})^2 - V_{\text{Re}}^2 V_{\text{Im}}^2] \end{aligned}$$

Покажем, что векторы $\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_n$ ортогональны. Для этого составим скалярное

произведение этих векторов

$$(\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_n) = (\mathbf{V}_{\text{Re}}, \mathbf{V}_{\text{Im}}) + V_{\text{Im}} [(\mathbf{V}_{\text{Re}}, \mathbf{V}_{\text{Im}}) V_{\text{Re}}^2 - V_{\text{Re}}^2 (\mathbf{V}_{\text{Re}}, \mathbf{V}_{\text{Im}})] / M + \\ + V_{\text{Re}} [(\mathbf{V}_{\text{Re}}, \mathbf{V}_{\text{Im}}) V_{\text{Im}}^2 - V_{\text{Im}}^2 (\mathbf{V}_{\text{Re}}, \mathbf{V}_{\text{Im}})] / N + V_{\text{Re}} V_{\text{Im}} (\mathbf{M}, \mathbf{N}) / MN = 0.$$

При этом действительный вектор в действительном пространстве, соответствующий комплексному вектору $V_{\text{Re}} \mathbf{V}_t / |\mathbf{V}_t| + i V_{\text{Im}} \mathbf{V}_n / |\mathbf{V}_n|$, равен $\mathbf{V} = V_{\text{Re}} \mathbf{V}_t / |\mathbf{V}_t| + V_{\text{Im}} \mathbf{V}_n / |\mathbf{V}_n|$.

При этом комплексные вектора $\mathbf{V}_{\text{Re}} + i \mathbf{V}_{\text{Im}}$ получаются в результате решения нелинейных уравнений в частных производных, сводящихся к обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнениям, а комплексный вектор $V_{\text{Re}} \mathbf{V}_t / |\mathbf{V}_t| + V_{\text{Im}} \mathbf{V}_n / |\mathbf{V}_n|$ построен, и удовлетворяет основному свойству комплексных векторов, его действительная и мнимая часть ортогональны.

Итак, получено решение уравнений Навье – Стокса в случае не кратных положений равновесия. Оно имеет вид

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n(t) \varphi_n(t, \mathbf{r}) \\ \sum_{s=1}^S \lambda_l^s \ln(x_l - a_l^s) |_{t_0}^t = H_l(t, t_0), l = 1, \dots, 2N \quad / \\ x_{n+2N}(t) = \sum_{m=1}^{2N} c_{nm} x_m(t), x_{n+3N}(t) = \sum_{m=1}^{2N} b_{nm} x_m(t) + \sum_{p,q=1}^{2N} F_{mpq}^1 x_p(t) x_q(t), n = 1, \dots, N \\ \lambda_l^s = 1 / [(a_l^s - a_l^1) \dots (a_l^s - a_l^{s-1}) (a_l^s - a_l^{s+1}) \dots (a_l^s - a_l^S)]$$

Т.е. определены и коэффициенты для давления $y_n(t) = x_{n+3N}(t)$

$$P(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N y_n(t) \varphi_n(t, \mathbf{r}).$$

Где $y_n(t)$ определяется из линейного уравнения.

Где величины a_l^s, b_l^s координаты положения равновесия.

Ламинарное решение соответствует координатам положения равновесия,

структура турбулентного решения имеет вид

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{g(t) - g_n(t_n)} \varphi_n(\mathbf{r})$$

Где $g(t)$ монотонная функция. Причем решение содержит множество полюсов, которые для действительного решения приводят к бесконечности, а комплексное решение при действительном времени и комплексных начальных условиях, определяющих комплексное значение $g_n(t_n)$, конечно. При этом комплексное решение стремится к комплексным координатам положения равновесия.

3. Построение решения в случае кратных положений равновесия

Но как же строить решение в случае кратных координат положения равновесия. Для построения решения докажем следующие теоремы.

Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений описывает детерминированное решение. Показано, что в случае кратных значений положения равновесия может иметься хаотическое решение. При этом малым изменениям начальных данных соответствует большое изменение решения. На каждом отрезке сходимости решение представляется рядом Лорана имеющим произвольное значение при приближении к существенно особой точке. Т.е. существуют точки решения, где значение решения произвольно. Показано, что свойства решения системы нелинейных уравнений определяется значениями положения равновесия.

Ставится задача нахождения условий, когда система нелинейных уравнений имеет хаотическое решение. Т.е. перескок от одного положения равновесия к другому. Эта система уравнений описывает скачкообразное, турбулентное решение уравнений гидродинамики, когда локальная скорость потока не предсказуема во времени. Оказывается, что это условие наступает, при кратных положениях равновесия системы обыкновенных нелинейных уравнений, к которым сводится задача гидродинамики.

Рассмотрим систему нелинейных автономных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_l}{dt} = Q_l(y_1, \dots, y_N), l = 1, \dots, N \quad (3.1)$$

Осуществим вырожденное в положении равновесия с кратным корнем (кратный корень является кратной координатой положения равновесия) преобразование неизвестных функций $y_l = f_l(x_1, \dots, x_N), l = 1, \dots, N$. Подставим в дифференциальное уравнение, получим

$$\frac{dx_l}{dt} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_k} \right)^{-1} Q_k[f_1(x_1, \dots, x_N), \dots, f_N(x_1, \dots, x_N)] = F_l(x_1, \dots, x_N), l = 1, \dots, N \quad (3.2)$$

Будем рассматривать для l уравнения координату x_l независимой, а остальные координаты как функции времени, являющиеся решением дифференциального уравнения. Система уравнений разбивается на N независимых неавтономных уравнений, которые в случае, когда решение равно координатам положения равновесия, правая часть дифференциального уравнения не зависит от времени. При этом в точке двух кратного корня правая часть системы (3.2) представляет неопределенность $0^2/0$, и, следовательно, определяет координаты не кратного положения равновесия для системы (3.2). Числитель соотношения неопределенности равен квадрату нуля из-за кратного положения равновесия системы (3.1). Знаменатель равен нулю из-за вырожденности преобразования. При этом связь между решениями относительно преобразования $y_l = f_l(x_1, \dots, x_N), l = 1, \dots, N$ одинакова со связью между положениями равновесия (связь вырожденна в кратном положении равновесия, но при этом для остальных произвольных значениях x_l получается единственное значение y_l). При этом справедливо следующее равенство

$$b_l = f_l(a_1, \dots, a_N), Q_l(b_1, \dots, b_N) = 0, F_l(a_1, \dots, a_N) = 0; l = 1, \dots, N.$$

Т.е. допустим, матрица уравнения (3.1) $\frac{\partial Q_l}{\partial y_k}$ не вырождена, но система

(3.1) имеет двукратное положение равновесия. Тогда матрица уравнения (3.2), полученного из уравнения (3.1), с помощью преобразования $y_l = f_l(x_1, \dots, x_N)$ равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_l}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_n} \right)^{-1} Q_n [y_1(x_1, \dots, x_N), \dots, y_N(x_1, \dots, x_N)] \right\} = \\ &= \sum_{n=1}^N Q_n [y_1(x_1, \dots, x_N), \dots, y_N(x_1, \dots, x_N)] \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_n} \right)^{-1} + \sum_{n,m=1}^N \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_n} \right)^{-1} \frac{\partial Q_n}{\partial y_m} \frac{\partial f_m}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

При этом первый член второй строки этой формулы является константой,

так как $Q_n [y_1(x_1, \dots, x_N), \dots, y_N(x_1, \dots, x_N)] \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_n} \right)^{-1} = 0^2 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{0} = const$ и

выбором преобразования $y_l(x_1, \dots, x_N), l = 1, \dots, N$ можно добиться, что матрица

$\frac{\partial F_l}{\partial x_k}$ может быть вырождена в точке кратных координат положения

равновесия системы (3.1).

Но преобразование переменных $y_l = f_l(x_1, \dots, x_N), l = 1, \dots, N$ не произвольно. Преобразование таково, что действительным или комплексным корням a_l должны соответствовать действительные или комплексные корни b_l . Строить систему (3.2) необходимо, так как уравнение (3.2) имеет не кратные положения равновесия, соответствующие положениям равновесия системы (3.1) и по координатам системы (3.2) однозначно определяются соответствующие положения равновесия системы (3.1). При этом добиваемся, чтобы определитель линеаризованной системы уравнений (3.2) равнялся нулю.

Исследуются комплексные и действительные решения задачи Коши дифференциального уравнения (3.2) в случае действительных и комплексных начальных условиях, при действительном аргументе t , т.е.

$x_l(t_0) = x_l^0, l = 1, \dots, N$, где величина t_0 соответствует начальному моменту интегрирования, а величина x_l^0 в общем случае комплексная. Причем в случае действительных значениях $x_k, k = 1, \dots, N$, правая часть (3.2) действительна. Причем в случае комплексного решения правая часть регулярная функция, т.е. однозначная функция своих аргументов.

При двукратном положении равновесия определитель линеаризованной системы не обязательно равен нулю, например, аттрактор Лоренца, имеет двукратные положения равновесия, но его определитель не равен нулю см. [1]. Приведем пример существования хаотического решения при кратных корнях. Это аттрактор Лоренца

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

Эта система имеет положения равновесия

$$\begin{cases} x = 0, y = 0, z = 0 \\ x = \sqrt{b(r-1)}, y = \sqrt{b(r-1)}, z = r-1 \\ x = -\sqrt{b(r-1)}, y = -\sqrt{b(r-1)}, z = r-1 \end{cases} .$$

При этом корень $z = r - 1$ двукратный. Причем определитель линеаризованной системы этих уравнений не вырожденный. Эта задача в хаотическом режиме вращается вокруг одного из положений равновесия, а потом резко перескакивает к другому положению равновесия и вращается вокруг второго положения равновесия. Это связано с тем, что хотя положения равновесия кратные, определитель линеаризованной системы уравнений у аттрактора Лоренца не равен нулю. Значит, преобразованная из вида (3.1) в вид (3.2) система уравнений с нулевым определителем, по мере приближения к точке,

соответствующей

$$x = \sqrt{b(r-1)}, y = \sqrt{b(r-1)}, z = r-1, \quad \text{в}$$

случае $|\sum_{l=1}^N g_{Nl}^{-1} g_{lN}| > 1$ согласно теореме 3 образует скачок от этого положения равновесия. При этом происходит произвольный перескок на решение с положением равновесия $x = -\sqrt{b(r-1)}, y = -\sqrt{b(r-1)}, z = r-1$.

Причем возможно колебание между кратными положениями равновесия, так как не кратное положение равновесия не устойчиво.

В книге [1], описан сценарий рождения аттрактора Лоренца через неполный двойной гомоклинический каскад бифуркаций. В этой книге считается, что условием хаотического решения является наличие в системе Лоренца седло - узла и двух седло – фокусов, откуда вытекает возможность существования в ней различных гомоклинических и гетероклинических контуров особых точек и связанных с ними каскадов бифуркаций. Терминологию и объяснение обозначений см. [1].

В предлагаемой статье определен простой критерий существования хаотического решения. Наличие хаотических решений связано с наличием кратного положения равновесия системы уравнений.

Теорема 3. Пусть b_k координаты одного из положений равновесия системы (3.1). В случае двух кратного значения положения равновесия b_N , линейное приближение решения дифференциального уравнения с устойчивым положением равновесия $\text{Re } \lambda_k < 0, k = 1, \dots, N-1$, определяет сходимость к положению равновесия при условии $|\sum_{l=1}^N g_{Nl}^{-1} g_{lN}| < 1$, где матрица g_{lk} , это собственные векторы положения равновесия. В случае противоположного условия $|\sum_{l=1}^N g_{Nl}^{-1} g_{lN}| > 1$ положение равновесия не достижимо и получается многозначное решение. Предполагается, что выполняется $N > 2$.

Доказательство.

В силу существования двукратного корня, равного b_N уравнение (3.1) можно привести к виду (3.2) с вырожденной матрицей линеаризованной системы

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial F_s}{\partial x_k} \Big|_{x_p=a_p} (x_k - a_k) + \frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^N \frac{\partial^2 F_s}{\partial x_l \partial x_p} \Big|_{x_p=a_p} (x_l - a_l)(x_k - a_k) + \dots$$

Т.е. определитель матрицы $\frac{\partial F_l}{\partial x_k} \Big|_{x_p=a_p}$ равен нулю в этом представлении.

Решаем линеаризованное уравнение (3.3)

$$\frac{dx_l}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial F_l}{\partial x_k} \Big|_{x_p=a_p} (x_k - a_k), l = 1, \dots, N \quad (3.3)$$

Это уравнение имеет решение в окрестности положения равновесия

$$x_l = a_l + \sum_{k=1}^{N-1} g_{lk} \exp[\lambda_k(t-t_1)]c_k + g_{lN}c_N, \text{ так как } \lambda_N = 0, \text{ где собственные векторы}$$

g_{lk} и собственные числа λ_k определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial F_l}{\partial x_k} \Big|_{x_p=a_p} - \lambda_\alpha \delta_{lk} \right| &= 0 \\ \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial F_l}{\partial x_k} \Big|_{x_p=a_p} - \lambda_\alpha \delta_{lk} \right) g_{k\alpha} &= 0 \end{aligned}$$

Причем наблюдается приближение x_l к значению $x_l = a_l + g_{lN}c_N$. Но при приближении к положению равновесия, в момент времени t_1 имеем значение координаты x_l^1 , откуда определяются константы c_k . Причем в общем случае все константа $c_k = g_{kn}^{-1}(x_n^1 - a_n)$ не равны нулю. Т.е. положение равновесия не обязательно достижимо в случае кратных корней, даже для системы с $\text{Re } \lambda_k < 0, k = 1, \dots, N-1$, так как выполняется условие $\lambda_N = 0$. Найдем условие сходимости к кратному корню. При этом для определения константы c_N при дискретном вычислении решения имеем следующее рекуррентное

соотношение $c_N^{k+1} = \sum_{l=1}^N g_{NI}^{-1} g_{lN} c_N^k$ при достижении устойчивыми координатами положения равновесия. Т.е. условием сходимости решения в направлении g_{IN} является неравенство $|\sum_{l=1}^N g_{NI}^{-1} g_{lN}| < 1$. При условии $|\sum_{l=1}^N g_{NI}^{-1} g_{lN}| > 1$ наблюдается отсутствие сходимости в одном направлении g_{IN} , остальные c_l не растут. Скачок решения осуществляется мгновенно на произвольное значение величины c_N , по формуле $c_N^t = \exp\{t[\ln(|\sum_{l=1}^N g_{NI}^{-1} g_{lN}|) + i \arg(\sum_{l=1}^N g_{NI}^{-1} g_{lN}) + 2\pi i s]/h\} c_N^0$, в момент времени, когда по устойчивым направлениям достигнуто положение равновесия. При этом решение увеличится в разы

$$\exp\{k[\ln(|\sum_{l=1}^N g_{NI}^{-1} g_{lN}|) + i \arg(\sum_{l=1}^N g_{NI}^{-1} g_{lN}) + 2\pi i s]\} \quad (3.4)$$

Но в силу приближенности решения, получится не бесконечность, а переход к другому положению равновесия. Точное решение при численном счете получается мгновенно при условии $h \rightarrow 0$ и имеет значение, зависящее от малости величины h . Т.е. происходит произвольный скачок. Остальные направления $g_{lk}, k = 1, \dots, N-1$ собственного вектора, соответствуют устойчивому собственному числу положения равновесия.

Причем в случае численной схемы получится в случае рационального значения k в формуле (3.4) конечное число состояний, а в общем случае при иррациональном значении k получится счетное число состояний. Численный счет в случае k целого определит единственное решение, так как период умножается на целое число. Более точное описание определит теорема 4.

Если же наблюдается одно положительное собственное число при остальных отрицательных, то имеем $x_l = \sum_{k=1}^N g_{lk} c_k^t$; $c_k^t = g_{kl}^{-1} g_{lN} \exp(\lambda_N t) c_N$ и приближения к положению равновесия не наблюдаются, растут все константы c_k^t .

Получается, что в случае одного нулевого собственного числа и остальных отрицательных собственных числах, наблюдается приближение к положению равновесия вдоль собственных векторов с отрицательными собственными числами и при определенных условиях удаление по направлению собственных векторов с нулевым собственным числом.

Отметим, что подобная картина наблюдается и у системы (3.1), так ее положения равновесия достигаются одновременно с положениями равновесия системы (3.2) в силу преобразования координат. Приближение будет по всем направлениям к положению равновесия, и удаление по одному направлению, даже если нет собственного числа равного нулю. Все равно будет существовать направление удаления решения в силу одинаковости приближения к положению равновесия этих систем уравнений.

Конец доказательства.

Аналогичная теорема справедлива для задачи Коши в комплексной плоскости. Т.е. при кратных корнях наблюдается хаотическое решение и в случае решения в комплексной плоскости.

Опишем структуру возможно хаотического решения, которое является турбулентным при кратных положениях равновесия. В случае уравнения Навье – Стокса кратные корни, это свойство комплексного решения, или турбулентного решения, что следует из вида уравнения (П.3.3), которое сводится к квадратному уравнению при определенном преобразовании координат.

Теорема 4. В случае системы (3.1) с двукратным корнем положения равновесия решение задачи Коши в комплексной плоскости для системы дифференциальных уравнений (3.1) с действительными и комплексными положениями равновесия будет определяться рядом Лорана с существенно особой точкой и, следовательно, при приближении к особенности может носить хаотический характер. Может иметь полюсы со знаменателем $1/[H(t, t_0) - H(t_n, t_0)]^{1/(K+1)}$, где $K + 2$ количество положений равновесия. Положений равновесия должно быть больше двух. В общем случае решение задачи не единственно, а имеется счетное количество решений. Причем реализуется состояние с наименьшей энергией. Аргумент решения t является действительным.

Доказательство.

В случае двух кратного корня a_N систему дифференциальных уравнений (3.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx_l}{dt} &= \exp[G_l(x_1, \dots, x_N)] \prod_{k=1}^{K+2} (x_l - a_l^k), l = 1, \dots, N-1 \\ \frac{dx_N}{dt} &= \exp[G_N(x_1, \dots, x_N)] (x_N - a_N^{K+1})^2 \prod_{k=1}^K (x_N - a_N^k) \end{aligned}, \quad (3.5)$$

где введен не обращающийся в ноль множитель $\exp[G_l(x_1, \dots, x_N)]$, который равен $\exp[G_l(x_1, \dots, x_N)] = F_l(x_1, \dots, x_N) / \prod_{k=1}^{K+2} (x_l - a_l^k)$. При подстановке этого множителя в (3.5), получим (3.2). Покажем, что этот множитель в ноль не обращается. Величины a_l^k удовлетворяют условию $F_s(a_1^k, \dots, a_N^k) = 0, s = 1, \dots, N; k = 1, \dots, K + 2$, где величина K конечна.

При условии $x_l \rightarrow a_l^k, k = 1, \dots, K$ имеем конечный предел

$$\begin{aligned} \exp[G_l(x_1, \dots, x_N)] &= \\ &= \frac{\partial F_l(a_1^k, \dots, a_N^k)}{\partial x_l} / [(a_l^k - a_l^1) \dots (a_l^k - a_l^{k-1})(a_l^k - a_l^{k+1}) \dots (a_l^k - a_l^{K+2})] \\ \exp[G_N(x_1, \dots, x_N)] &= \\ &= \frac{\partial F_N(a_1^k, \dots, a_N^k)}{\partial x_N} / [(a_N^k - a_N^1) \dots (a_l^k - a_N^{k-1})(a_N^k - a_N^{k+1}) \dots (a_N^k - a_N^{K+2})] \end{aligned}$$

При условии $x_N \rightarrow a_N^{K+1}$ тоже имеем конечный предел

$$\begin{aligned} \exp[G_N(x_1, \dots, x_N)] &= \\ &= \frac{\partial^2 F_N(a_1^{K+1}, \dots, a_N^{K+1})}{2\partial x_N^2} / [(a_N^{K+1} - a_N^1) \dots (a_l^{K+1} - a_l^K)] \end{aligned}$$

В случае совпадающих корней сокращается множитель $(x_N - a_N^{K+1})^2$. При этом получается не обращающийся в ноль множитель $\exp[G_N(x_1, \dots, x_N)]$.

При этом дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx_l}{dH_l(t, t_0)} &= \prod_{k=1}^{K+2} (x_l - a_l^k) \\ \frac{dx_N}{dH_N(t, t_0)} &= (x_N - a_N^{K+1})^2 \prod_{k=1}^K (x_N - a_N^k), \\ H_l(t, t_0) &= \int_{t_0}^t \exp\{G_l[x_1(t), \dots, x_N(t)]\} dt \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $H_l(t, t_0)$ стремящаяся к бесконечности функция при условии $t \rightarrow \infty$. В случае решения в действительной плоскости это монотонная функция.

Запишем дифференциальное уравнение с кратным значением положения

равновесия

$$\begin{aligned}\frac{dx_N}{dt} &= \exp[G_N(x_1, \dots, x_N)](x_N - a_N^{K+1})^2 \prod_{k=1}^K (x_N - a_N^k) \\ \frac{dx_N}{dH_N(t, t_0)} &= (x_N - a_N^{K+1})^2 \prod_{k=1}^K (x_N - a_N^k) \quad . \\ H_N(t, t_0) &= \int_{t_0}^t \exp[G_N(x_1, \dots, x_N)] dt\end{aligned}$$

Величина $\exp[G_N(x_1, \dots, x_N)]$ в ноль не обращается. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$\sum_k \lambda_N^k \ln |x_N - a_N^k| \Big|_{t_0}^t + \frac{\mu_N^{K+1}}{x_N - a_N^{K+1}} \Big|_{t_0}^t = H_N(t, t_0) = \int_{t_0}^t \exp[G_N(x_1, \dots, x_N)] dt, \quad (3.7)$$

a_i^k координаты положения равновесия, величина a_N^{K+1} значение двух кратного положения равновесия.

Имеем три возможных варианта разложения функции в ряд. Либо в точке $V = t_1$ имеется существенная особая точка, и решение стремится к произвольным точкам при приближении к особенности, либо справедливо

$$x_N = a_N^{K+1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (V - t_1)^k + \sum_{k=1}^K \frac{a_{-k}}{(V - t_1)^k}, V = H_N(t, t_0). \quad (3.8)$$

либо решение регулярно. Допустим справедливо (3.8). Определим решение этого дифференциального уравнения, для чего подставим часть решения в

виде полюса $x_N = \frac{\alpha}{(V - t_1)^\beta}$ в уравнение

$$\frac{dx_N}{dV} = (x_N - a_N^{K+1})^2 \prod_{k=1}^K (x_N - a_N^k). \quad (3.9)$$

При этом оказывается, что приравниваются члены

$$\frac{-\alpha\beta}{(V-t_1)^{\beta+1}} = \frac{\alpha^{K+2}}{(V-t_1)^{\beta(K+2)}}, \quad \text{что приводит к равенству}$$

$$\beta + 1 = \beta(K + 2), \beta = 1/(K + 1) \neq 1 \quad \text{и для множителя справедливо } -\beta = \alpha^{K+1}.$$

При этом решение при условии $\beta = 1/(K + 1)$ имеет сложную структуру и не имеет однозначного решения в комплексной плоскости, т.е. в точке t_1 имеется ветвление решения и значит, возможен переход к комплексному решению. Откуда имеем $\alpha = [-\ln(K + 1) - i\pi + 2i\pi s]/(K + 1)$. Т.е. решение в этом случае является турбулентным, комплексным и имеющим множество ветвей.

Допустим, решение регулярно. Разложим решение в окрестности точки a_N^{K+1} по положительным степеням $V - t_1$, т.е. $x_N - a_N^{K+1} = b(V - t_1) + 0(V - t_1)^2$. Тогда решение представимо в виде

$$\lambda_N^{K+1} \ln(x_N - a_N^{K+1}) + \frac{\mu_N^{K+1}}{b(V - t_1)} = f(V)$$

Т.е. справедлива формула

$$x_N - a_N^{K+1} = \exp\left\{ \left[f(V) - \frac{\mu_N^{K+1}}{b(V - t_1)} \right] / \lambda_N^{K+1} \right\}$$

Т.е. предположение о регулярности решения не подтверждается, решение имеет бесконечное число членов с отрицательной степенью $V - t_1$. Значит, решение имеет существенную особую точку при условии $V = t_1$.

При этом решение с существенной особой точкой определяется из уравнения (3.7). Т.е. по мере приближения к положению равновесия $a_l^{K+1}, l = 1, \dots, N$ координаты x_N происходит скачок решения, который является произвольным, так как решение в виде ряда Лорана содержит существенную особую точку и при приближении к особой точке, значение функции x_N

произвольно. При достижении положения равновесия остальными координатами $x_l, l = 1, \dots, N - 1$, в случае, если положения равновесия кратные, наблюдается скачок решения на сходимость к другому положению равновесия. В результате решения в окрестности кратного положения равновесия, получаются ряды Лорана с существенной особой точкой.

Причем коэффициенты ряда Лорана могут оказаться многозначной функцией, так как согласно теореме 3 решение многозначно при кратных координатах положения равновесия, а значит в турбулентном режиме. Отметим, что ряд Лорана принимает бесчисленное количество раз любое комплексное значение в окрестности существенно особой точки, кроме быть может, одного значения, при комплексном аргументе.

При этом многозначное решение имеет вид ряда Лорана и может иметь существенно особую точку, а может быть многозначное решение имеет вид

$$x_N = a_N^{K+1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (V - t_1)^k + \frac{[-\ln(K+1) - i\pi + 2i\pi s]}{(K+1)(V - t_1)^{1/(K+1)}}, V = H_N(t, t_0) \quad (3.10)$$

В случае ряда Лорана реализуется хаотическое решение, которое соответствует случаю $|g_{NI}^{-1}g_{IN}| > 1$ теоремы 3 и происходит отскок от положения равновесия. В случае решения вида (3.10) реализуется случай $|g_{NI}^{-1}g_{IN}| < 1$, и положение равновесия достигается в комплексной плоскости. В первом случае решение является многозначной функцией.

Конец доказательства.

В случае двукратного положения равновесия по переменной x_N решение

уравнения Навье – Стокса имеет вид

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n(t) \varphi_n(t, \mathbf{r})$$

$$\sum_{s=1}^S \lambda_l^s \ln(x_l - a_l^s) \Big|_{t_0}^t = H_l(t, t_0), l = 1, \dots, 2N$$

$$x_{n+2N}(t) = \sum_{m=1}^{2N} c_{nm} x_m(t), x_{n+3N}(t) = \sum_{m=1}^{2N} b_{nm} x_m(t) + \sum_{p,q=1}^{2N} F_{mpq}^1 x_p(t) x_q(t), n = 1, \dots, N$$

$$\sum_{s=1}^S \lambda_N^s \ln(x_N - a_N^s) \Big|_{t_0}^t + \frac{\mu_N^S}{x_N - a_N^S} \Big|_{t_0}^t = H_N(t, t_0)$$

$$\lambda_l^s = 1 / [(a_l^s - a_l^1) \dots (a_l^s - a_l^{s-1}) (a_l^s - a_l^{s+1}) \dots (a_l^s - a_l^S)]$$

Т.е. определены и коэффициенты для давления $y_n(t) = x_{n+3N}(t)$

$$P(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N y_n(t) \varphi_n(t, \mathbf{r}).$$

Где величины $a_l^s, l = 1, \dots, N, s = 1, \dots, S - 1; a_l^S, l = 1, \dots, N - 1$ однократные координаты положения равновесия, а величины a_N^S двукратные положения равновесия.

Причем решением этого первого интеграла для переменной x_N является либо ряд Лорана с существенно особой точкой, либо функция (3.10), причем в обоих случаях решение многозначно. Ситуация аналогична уравнению Шредингера, когда имеется в общем случае счетное количество решений. Это не удивительно, ведь уравнение Шредингера сводится к уравнению Навье – Стокса. Докажем это. Для чего запишем уравнение Шредингера и преобразуем

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_l^2} + U\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi \sum_{l=1}^3 \left[\frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial x_l^2} + \frac{1}{\psi^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_l} \right)^2 \right] + U\psi.$$

Разделив на массу $m\psi$, получим уравнение

$$i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial \ln\psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m^2}\sum_{l=1}^3\left(\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l}\right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2m^2}\sum_{l=1}^3\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2} + U/m.$$

Получим уравнение в частных производных, взяв градиент от обеих частей уравнения, введем действительную скорость по формуле $\mathbf{V} = -i\frac{\hbar}{m}\text{grad} \ln\psi$.

$$\frac{\partial i\frac{\hbar}{m}\text{grad} \ln\psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{m^2}\sum_{l=1}^3\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l}\frac{\partial \text{grad} \ln\psi}{\partial x_l} = \frac{i\hbar}{2m}\sum_{l=1}^3\frac{\partial^2 i\frac{\hbar}{m}\text{grad} \ln\psi}{\partial x_l^2} + \text{grad}U/m$$

Подставляя значение скорости в преобразованное уравнение Шредингера,

получим

$$\frac{\partial V_p}{\partial t} + \sum_{l=1}^3 V_l \frac{\partial V_p}{\partial x_l} = v \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 V_p}{\partial x_l^2} - \frac{\partial U}{\partial x^p} / m, v = \frac{i\hbar}{2m}.$$

Получим трехмерное уравнение Навье – Стокса с давлением, соответствующим потенциалу. Но задача гидродинамики отличается от уравнения Навье – Стокса, полученного из уравнения Шредингера, уравнением неразрывности.

Покажем, что уравнение Шредингера определяет уравнение неразрывности. Для этого запишем уравнение Шредингера и комплексно сопряженное уравнение

$$\begin{aligned} i\hbar\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\psi^* \Delta\psi + U\psi^* \psi \\ -i\hbar\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\psi \Delta\psi^* + U\psi\psi^* \end{aligned}$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим

$$i\hbar \frac{\partial \psi^* \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} (\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^*).$$

Воспользуемся тождеством

$$\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^* = \operatorname{div}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

Получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^* \psi}{\partial t} &= \frac{i\hbar}{2m} \operatorname{div}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = \\ &= \frac{\hbar}{2m} \operatorname{div}[\psi^* \psi (i\nabla \ln \psi - i\nabla \ln \psi^*)] = -\operatorname{div}(\psi^* \psi \mathbf{V}), \\ \mathbf{V} &= (\mathbf{V}_{NS}^* + \mathbf{V}_{NS}) \cdot 0.5 = \frac{\hbar}{2m} (i\nabla \ln \psi^* - i\nabla \ln \psi) = \\ &= \pi c (i\nabla_k \ln \psi^* - i\nabla_k \ln \psi), \nabla_k = \frac{\partial}{\partial k \mathbf{r}}, k = mc / \hbar, \mathbf{V}_{NS} = -\frac{i\hbar}{m} \nabla \ln \psi \end{aligned}$$

При действительной скорости оба определения скорости, через уравнение Навье – Стокса и через уравнение неразрывности, совпадают. Т.е. получаем уравнение неразрывности потока с плотностью $\psi^* \psi$ и соответствующей скоростью потока. При этом потенциал представим в виде $U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}_0) + 0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$.

Тогда решение можно представить в виде локальной плоской волны $\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp\{i[(E - U_0)dt - \mathbf{p}d\mathbf{r}] / \hbar\} + 0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^3$ (эта формула следует из подстановки ψ в этом виде в уравнение Шредингера, и получается, что дважды продифференцированная ошибка равна ошибке вычисления потенциала $0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$), где постоянное значение потенциала $U(\mathbf{r}_0) = U_0$ вычитается из значения энергии. Причем величина $\psi^* \psi$ играет роль плотности среды. А величина скорости равна $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}}{m}$, причем имеем, градиент от константы равен нулю $\operatorname{grad}(E - U_0) = 0$. Получается, что

скорость частиц среды определяется градиентом логарифма волновой функции.

При этом можно провести аналогию между ламинарным однозначным режимом и классическим однозначным описанием тел. Между турбулентным режимом, имеющим счетное количество решений и квантовым описанием частиц, имеющих счетное количество решений. В случае турбулентного и ламинарного режима между ними имеется граница, критическое число потока. Аналогичная граница имеется между классическим и квантовым описанием частиц, соответствующая переходу энергии из отрицательного в положительное состояние. При этом главное квантовое число становится мнимым непрерывным. Уравнение Шредингера должно иметь решение в виде ряда Лорана с существенно особой точкой, описывающее хаотическое решение уравнения Шредингера. В свою очередь уравнение Навье – Стокса должно иметь дискретные уровни энергии состояния турбулентного потока, должны реализовываться переходы между этими состояниями с выделением энергии или поглощением энергии. Если давление в уравнении Навье – Стокса определяется с точностью до неизвестного ряда, то и внешний потенциал в уравнении Шредингера должен определяться с точностью до воздействия на этот внешний потенциал. Для этого необходимо дополнительное уравнение, можно использовать комплексно сопряженное уравнение, используя одинаковое комплексное воздействие на эти два уравнения при комплексно сопряженных волновых функциях. В результате определится влияние частиц системы на внешний потенциал.

Границу между классическим описанием частиц и квантовым можно провести, это переход к комплексному квантовому числу, или бесконечности главного квантового числа атома водорода. Ламинарному квантовому числу, при котором имеется однозначное решение, соответствует волновая функция свободного пространства, которая однозначна, при непрерывной энергии. Причем при большом квантовом числе система является квазиклассической, т.е. близко к граничному квантовому числу, равному бесконечности, система

почти классическая. Многозначному турбулентному режиму соответствует многозначное квантовое решение.

Причем имеется граница, между классическим свободным решением, и квантовым решением. Это нулевое значение энергии, также как и в нелинейных уравнениях в частных производных, существует граница между турбулентным комплексным решением и ламинарным действительным решением.

Причем в случае кратного положения равновесия получается хаотическое решение, приближение к положению равновесия и быстрое удаление от него на не предсказуемую координату, см. теорему 3,4. При этом возможна ситуация, когда комплексное решение определится не однозначно. Тогда для получения однозначного результата надо искать состояние с наименьшей энергией. Но при численном счете при постоянном шаге времени, как показано в теореме 3 получается однозначный результат. При переменном шаге времени может получаться разное решение. При этом значение решения с наименьшим модулем правых частей дифференциального уравнения характеризуется наибольшим приближением к положению равновесия.

Но как же реализовать численный счет системы нелинейных уравнений, ведь монотонные функции $H_l(t, t_0)$ можно получить только в результате итераций. Необходимо сказать, что для коэффициента сопротивления жидкости в трубопроводе имеется эмпирические зависимости, которые интерполированы при разных диапазонах числа Рейнольдса. Т.е. получить с учетом шероховатостей можно непрерывные кривые зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса. В случае не кратных положений равновесия решение системы стремится к координатам положения равновесия. В случае кратных положений равновесия нужно прибегать к специальным приемам решения. Для этого нужно воспользоваться теоремой 3, о приближении решения к положению равновесия. Минимум модуля правых частей дифференциального уравнения определит максимальное приближение к координатам положения равновесия

и значит, запоминая координаты минимума, получим усредненное решение задачи. При этом проблема введения шероховатости, для описания турбулентного решения требует отдельного рассмотрения.

Для круглого трубопровода эмпирические кривые имеют вид Рис.1

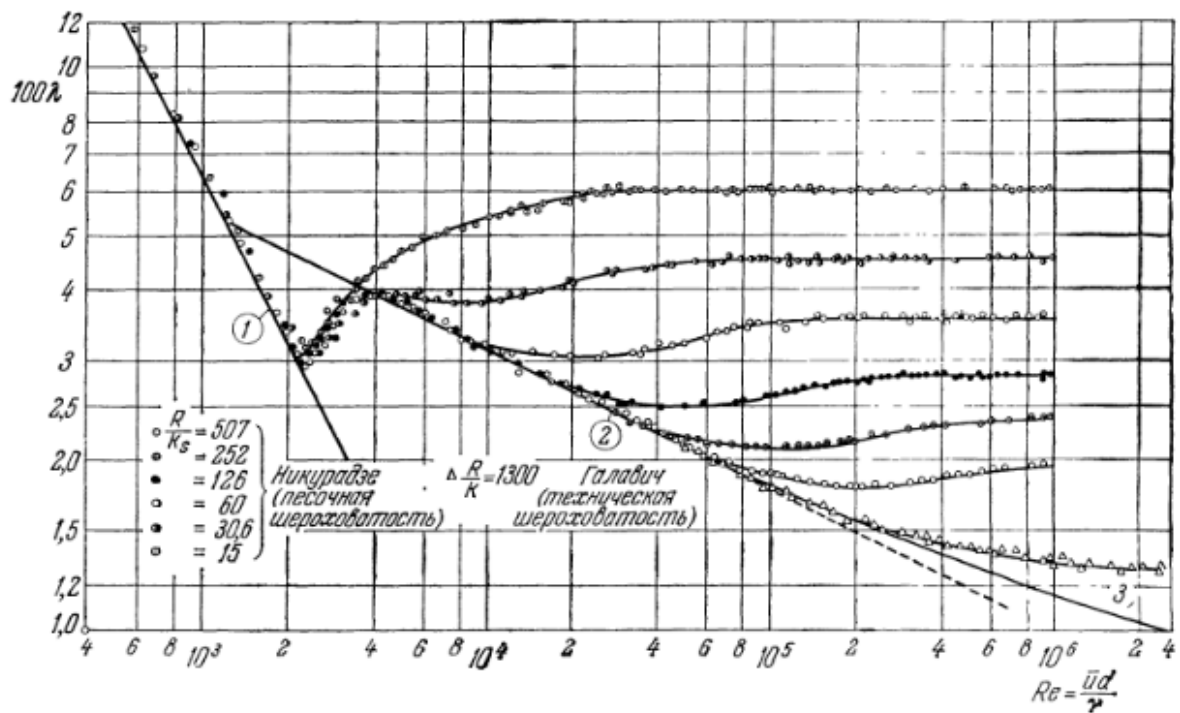


Рис.1

Была составлена программа решения дифференциальных уравнений (П.3.3) в комплексной плоскости, которая в случае ламинарного режима автоматически переходит в действительную плоскость. Находились координаты минимума модулей правых частей дифференциального уравнения, координаты минимума запоминались. В ламинарной части

решения был достигнут минимум $10^{-10} \div 10^{-17}$, а в турбулентном режиме максимальное значение минимума 7, с убыванием по мере уменьшения безразмерного давления, или числа Рейнольдса, и значит уменьшением мнимой части. Но определение коэффициента сопротивления в каждой точке занимает время порядка 5 минут при частоте ЭВМ 3.1GHz для Intel®Core(TM) i3-2100 .

Графики на Рис.2 состоящие из красных точек соответствуют $\delta/l = 1/3000$, а график зеленого цвета $\delta/l = 1/75$, где δ высота шероховатостей, l средний период шероховатостей, величина δ/l среднеквадратичное отклонение тангенса наклона шероховатостей. Сплошная линия соответствует графику, построенному на основе эмпирических данных при отсутствии шероховатостей.

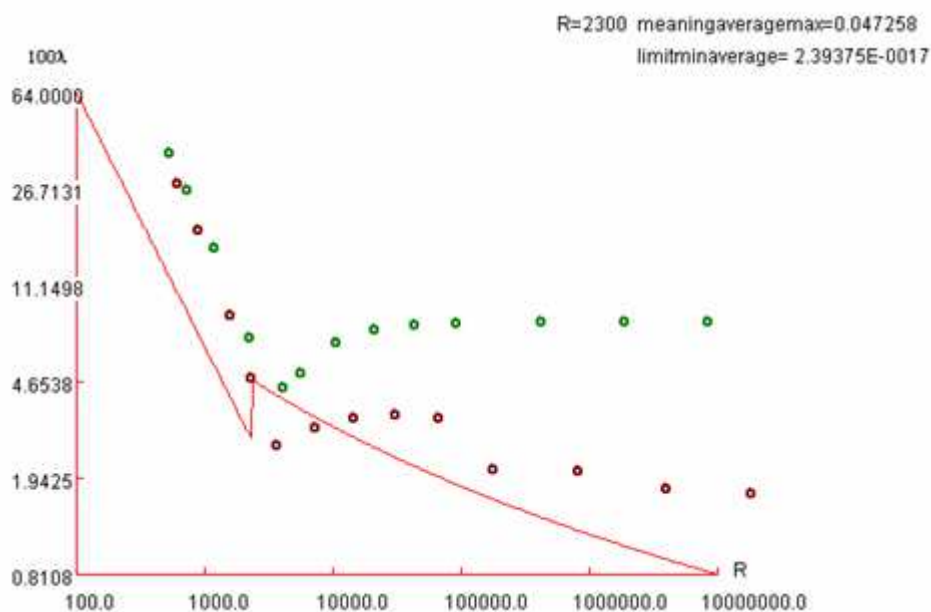


Рис. 2

Отметим, что ламинарное решение не зависит от степени шероховатости. Ламинарное решение удовлетворяет уравнению Навье – Стокса с большой точностью, но не совпадает с зависимостью коэффициента сопротивления λ от числа Рейнольдса Re по формуле $\lambda = 64/Re$.

Дело в том, что на удалении от входа формируется пристенный турбулентный пограничный слой после линии отрыва, который при одностороннем обтекании тела, уходит внутрь жидкости, а в трубопроводе прилегает к поверхности трубопровода. Этот пограничный слой искажает теоретическую формулу $\lambda = 64/Re$ учетом конвективного члена. Дело в том, что описание продольной скорости содержит шероховатость, которая является в среднем периодической функцией длины трубопровода. В эксперименте Никурадзе, графики «песочной шероховатости» приведены на рис.1 и их ламинарная часть решения соответствует формулам, выведенным для ламинарного режима. Но дело в том, что опыты Никурадзе осуществлялись в коротких трубах, когда турбулентный пограничный слой не сформировался. Примером этого турбулентного пограничного слоя является обтекание плоской пластины, где в начале идет ламинарный пограничный слой, но на расстоянии происходит отрыв пограничного слоя и формируется турбулентный пограничный слой, толщина которого резко растет. Толщина ламинарного пограничного слоя $\delta = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$, но на большом расстоянии x от входа ламинарный пограничный слой превращается в турбулентный пограничный слой, который прилегает к стенкам трубопровода. График на рис.2 строился для одномерного потока с продольной скоростью, с зависимостью от радиуса, с зависимостью радиуса трубопровода от продольной координаты в виде шероховатости. При этом учитывается турбулентный пограничный слой, прилегающий к стенкам трубопровода, имеющийся по всей длине трубопровода, как точное решение уравнения Навье – Стокса. Причем турбулентный пограничный слой имеется и в ламинарном режиме трубопровода, в зависимости от среднеквадратичного тангенса наклона шероховатостей, а не от высоты шероховатостей. Но почему же турбулентный режим пограничного слоя не привел к комплексному решению. Дело в том, что решение усредняется по сечению трубопровода, при основном ламинарном течении. Поэтому

усредненные коэффициенты не приводят к комплексному решению. Если найти границу турбулентного подслоя и усреднять коэффициенты отдельно для пограничного слоя и в основном ламинарного потока, то пограничный слой определит комплексное решение. Что было и проделано в другом методе решения задачи гидродинамики.

Литература

1. *Н.А. Магницкий, С.В.Сидоров* Новые методы хаотической динамики. – М.: Едиториал УРСС, 2004г, 320