Аналогии между ОТО и СТО

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Пользуясь аналогией между ОТО и СТО вычислим значение четырехмерной скорости, и на этой основе определим метрический тензор ОТО двигающегося тела. Построим новые координаты, зависящие от электромагнитного и гравитационного поля, для которых справедливо глобальное преобразование Лоренца. В этих координатах тело при наличии электромагнитного и гравитационного поля движется с постоянной скоростью. В новых однородных и изотропных координатах можно записывать линейные уравнения Максвелла, Дирака, Клейна-Гордона, как в свободном пространстве.

Определение метрического тензора сводится к уравнению, где метрический тензор зависит от гравитационного и электромагнитного поля (см. [1])

$$g_{nm}u^n u^m = g_{nm}\frac{p^n}{mc}\frac{p^m}{mc} = 1$$

$$g_{00}(p^0)^2 + 2\sum_{n=1}^{3} g_{n0}(a_k^n)^{-1}a_m^k p^m p^0 + \sum_{n,m=1}^{3} g_{nm}p^n p^m =$$

$$=\sum_{n=0}^{3} p_n p^n = m^2c^2 = g_{00}(p^0)^2 + \sum_{\beta=1}^{3}[g_{k0}(a_\beta^k)^{-1}]^2(p^0)^2/\lambda_\beta - .(1)$$

$$-\sum_{\beta=1}^{3}[\sqrt{\lambda_\beta}a_k^\beta p^k + g_{k0}(a_\beta^k)^{-1}p^0/\sqrt{\lambda_\beta}]^2 = m^2c^2;$$

$$(g_{nm} - \lambda_\beta\delta_{nm})a_\beta^n = 0; |g_{nm} - \lambda_\beta\delta_{nm}| = 0$$

Где собственные числа $\lambda_\beta > 0$. В случае пространства Минковского $a_\beta^n = \delta_\beta^n, P^\beta = p^k = \frac{mV^k}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, E/c = p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$. Причем справедливо

$$\frac{E^2}{c^2} = g_{00}(p^0)^2 + \sum_{\beta=1}^{3} [g_{k0}(a_\beta^k)^{-1}]^2 (p^0)^2 / \lambda_\beta$$

$$P^\beta = \sum_{k=1}^{3} [\sqrt{\lambda_\beta} a_k^\beta p^k + g_{k0}(a_\beta^k)^{-1} p^0 / \sqrt{\lambda_\beta}]$$

$$\frac{E^2}{c^2} = \sum_{\beta=1}^{3} (P^\beta)^2 + m^2 c^2$$

Аналогом этой формулы в СТО является формула $\frac{E^2}{c^2} = \sum_{\beta=1}^{3} (p^k)^2 + m^2 c^2$ см. [2].

Величина $(E/c, P^\beta)$ соответствует четырехмерному импульсу тела с учетом гравитационного и электромагнитного поля. При этом можно ввести четырехмерную обобщенную скорость, зависящую от электромагнитного и гравитационного поля $U^k / c = \frac{P^k / mc}{\sqrt{1 + \sum_{l=1}^{3} (P^l / mc)^2}}$, которая определяется с помощью формулы $P^\beta / mc = \frac{U^\beta / c}{\sqrt{1 - \sum_{k=1}^{3} (U^k / c)^2}}$.

При этом в случае множества тел, квадрат метрического тензора складывается, и, имеем, $ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} ds_\alpha^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} g_{lk\alpha} dx_\alpha^l dx_\alpha^k$ см. [3] и импульс определяется по отдельности для каждого тела. Формулы связи координат и метрического тензора $dx^l = \sum_{\alpha=1}^{N} dx_\alpha^l, g_{lk} = \sum_{\alpha=1}^{N} g_{lk\alpha} \frac{dx_\alpha^l}{dx^l} \frac{dx_\alpha^k}{dx^k}$.

Причем импульсы отдельных тел складываются. В уравнении движения переменные разделяются, и их можно использовать в форме уравнений Гамильтона для каждого тела.

Но предварительно надо связать величины скоростей $V^l / c = dx^l / cdt$, полученных дифференцированием по собственному времени тела, с четырехмерными скоростями $u^l = dx^l / ds$ по формуле

$V^l/c = u^l\alpha, l = 0,...,3, V^0 = c$, где необходимо определить коэффициент пропорциональности α. Причем это нужно сделать для каждой частицы или тела. Назовем скорость V^l/c четырехмерной собственной скоростью в собственной системе координат. Скорость u^l называется четырехмерной скоростью. Это скорость движения тела. Тогда имеем связь собственной скорости с четырехмерной скоростью, полученной, по аналогии с СТО, при этом будем записывать и формулы СТО для сравнения

$$u^n = \frac{V^n/c}{\sqrt{g_{00} + 2g_{k0}V^k/c + g_{kn}V^kV^n/c^2}}$$

$$u^n = \frac{V^n/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Формулу можно преобразовать к виду

$$\frac{2g_{k0}V^k/c + g_{kn}V^kV^n/c^2}{g_{00} + 2g_{k0}V^k/c + g_{kn}V^kV^n/c^2} = 2g_{k0}u^ku^0 + g_{kn}u^ku^n.$$

Преобразуем это уравнение, получив из равенства $\frac{a}{b} = \frac{c}{1}$ соотношение $\frac{a}{b-a} = \frac{c}{1-c}$

$$\frac{2g_{k0}V^k/c + g_{kn}V^kV^n/c^2}{g_{00}} = \frac{2g_{k0}u^ku^0 + g_{kn}u^ku^n}{1 - 2g_{k0}u^ku^0 - g_{kn}u^ku^n}$$

Подставляя значение собственной скорости, выраженное через компоненту четырехмерной скорости, получим уравнение по определению α

$$\frac{2g_{k0}u^ku^0 + \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^ku^n}{g_{00}}\alpha^2 = \frac{2g_{k0}u^ku^0 + \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^ku^n}{1 - 2g_{k0}u^ku^0 - \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^ku^n}$$

Откуда находим

$$\alpha = \sqrt{\frac{g_{00}}{1 - 2g_{k0}u^ku^0 - \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^ku^n}}.$$

При условии $g_{k0}=0$, получаем значение $\alpha=\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-\sum\limits_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^k u^n}}$. При этом значение трехмерной собственной скорости равно $V^l/c=u^l\sqrt{\frac{g_{00}}{1-2g_{k0}u^k u^0-\sum\limits_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^k u^n}}$, которая является аналогом формулы $V^l/c=\frac{u^l}{\sqrt{1+\sum\limits_{l=1}^{3}(u^l)^2}}<1$. При значении $u^l=1$, получаем значение скорости $V^l/c=\sqrt{\frac{g_{00}}{1-2\sum\limits_{k=1}^{3} g_{k0}-\sum\limits_{k,n=1}^{3} g_{kn}}}$. В пространстве Минковского эта скорость равна $V^l/c=1/2$. Значению $V^0/c\to 1$ соответствует $\frac{g_{00}(u^0)^2}{1-2\sum\limits_{k=1}^{3} g_{k0}u^k u^0-\sum\limits_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^k u^n}=1$, откуда определяется u^0 при конечных остальных четырехмерных пространственных скоростях.

Как следует из формулы (1), подставляя формулу для импульса среды, получим четырехмерный импульс тела

$$P^0=H(x_i,V^i)/c=mc\sqrt{\frac{[g_{k0}(a^k_\beta)^{-1}/\sqrt{\lambda_\beta}]^2+g_{00}}{g_{00}+2g_{k0}V^k/c+g_{kn}V^kV^n/c^2}}$$
$$P^\beta=mc\frac{\sqrt{\lambda_\beta}a^\beta_k V^k/c+g_{k0}(a^k_\beta)^{-1}/\sqrt{\lambda_\beta}}{\sqrt{g_{00}+2g_{k0}V^k/c+g_{kn}V^kV^n/c^2}} \qquad (2)$$

Эти формулы аналогичны формулам СТО

$$P^0=\frac{mc}{\sqrt{1-V^2/c^2}},P^\beta=\frac{mV^\beta}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

И соответствуют импульсу движения тела с учетом электромагнитного и гравитационного поля.

Имеем функцию Гамильтониана $H_\alpha^2 = (P_\alpha^\beta)^2 c^2 + m_\alpha^2 c^4$, т.е. переменные для каждого α тела разделились. Уравнения движения запишутся в виде $\frac{dP^\beta}{d\tau} = 0, \frac{dx^\beta}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial P^\beta} = -\frac{P^\beta c}{\sqrt{P^2 + m^2 c^2}}$ для каждого тела со своим индексом, который не пишем. Решение этой системы нелинейных уравнений $P^\beta = P_0^\beta$, $x^\beta = x_0^\beta - \frac{P_0^\beta c(\tau - \tau_0)}{\sqrt{\sum\limits_{\beta=1}^{3} (P_0^\beta)^2 + m^2 c^2}}$, где x_0^β произвольная точка пространства.

Причем в силу того, что имеем несколько взаимодействующих тел $P_0^\beta \neq 0$. Откуда имеем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно скоростей $V^k(x_1, x_2, x_3)$

$$\frac{P_0^\beta}{mc} = \frac{\sqrt{\lambda_\beta} a_k^\beta V^k / c + g_{k0} (a_\beta^k)^{-1} / \sqrt{\lambda_\beta}}{\sqrt{g_{00} + 2 g_{k0} V^k / c + g_{kn} V^k V^n / c^2}}.$$

Откуда имеем для скорости в декартовых координатах

$$\begin{gathered}(\frac{P_0^\beta}{mc})^2 [g_{00} + 2 g_{k0} V^k / c + g_{kn} V^k V^n / c^2] = \\ = \lambda_\beta a_k^\beta a_n^\beta V^k V^n / c^2 - 2 a_k^\beta g_{n0} (a_\beta^n)^{-1} V^k / c + g_{k0} g_{n0} (a_\beta^k)^{-1} (a_\beta^n)^{-1} / \lambda_\beta\end{gathered}$$

Приведем подобные члены

$$\begin{gathered}[\lambda_\beta a_k^\beta a_n^\beta - g_{kn} (\frac{P_0^\beta}{mc})^2] V^k V^n / c^2 - \\ - 2[a_k^\beta g_{n0} (a_\beta^n)^{-1} - (\frac{P_0^\beta}{mc})^2 g_{k0}] V^k / c + \\ + g_{k0} g_{n0} (a_\beta^k)^{-1} (a_\beta^n)^{-1} / \lambda_\beta - (\frac{P_0^\beta}{mc})^2 g_{00} = 0\end{gathered} \quad (3)$$

Откуда из системы трех нелинейных уравнений определяем величину трехмерной скорости тел $V^k(x^1, x^2, x^3), k = 1,...,3,$ где имеем $x^\beta = x_0^\beta - \frac{P_0^\beta c(\tau - \tau_0)}{\sqrt{\sum\limits_{\beta=1}^{3} (P_0^\beta)^2 + m^2 c^2}}$, и значит, знаем из (2) распределение импульса и метрического тензора по пространству в любой момент времени. В случае диагонального метрического тензора имеем

$$\begin{gathered}[\lambda_\beta a_n^\beta a_n^\beta - g_{nn}(\frac{P_0^\beta}{mc})^2](V^n)^2/c^2 = A_n^\beta (V^n)^2/c^2 = (\frac{P_0^\beta}{mc})^2 g_{00} \\ A_n^\beta = \lambda_\beta (a_n^\beta)^2 - g_{nn}(\frac{P_0^\beta}{mc})^2 > 0, g_{nn} < 0\end{gathered} \quad . \quad (4)$$

Откуда имеем $V^k(x^1,x^2,x^3)/c = \sqrt{(A_\beta^k)^{-1}(\frac{P_0^\beta}{mc})^2 g_{00}}$, причем скорость может оказаться мнимой, что соответствует либо колебаниям, либо вращению тела. Причем величина $V^k(x^1,x^2,x^3)$ как решение квадратного уравнения (3) может оказаться комплексной. Если рассмотреть случай, одного единственного тела, для которого импульс $P_0^\beta = 0$, то имеем стационарную скорость движения тела $V^k(x^1,x^2,x^3)/c = -(a_\beta^k)^{-1} g_{k0}(a_\beta^k)^{-1}/\lambda_\beta$ при неизменном метрическом тензоре. В случае диагонального метрического тензора и условия $P_0^\beta = 0$, скорость тела равна нулю $V^k = 0$. В противоположном случае метрический тензор и величина собственной скорости смещается с постоянной скоростью $-\frac{P_0^\beta c}{\sqrt{\sum_{\beta=1}^{3}(P_0^\beta)^2 + m^2c^2}}$. Движение тела с этой скоростью при нулевой массе тела соответствует скорости света при произвольном значении импульса $P_0^\beta = \hbar k^\beta$.

Введем координаты по формуле

$$\begin{gathered}dy^\beta = \sum_{k=1}^{3}[\sqrt{\lambda_\beta} a_k^\beta dx^k + g_{k0}(a_\beta^k)^{-1} dx^0/\sqrt{\lambda_\beta}] \\ dy^0 = \sqrt{g_{00} + \sum_{\beta=1}^{3}[g_{k0}(a_\beta^k)^{-1}]^2/\lambda_\beta] dx^0}\end{gathered} \quad . \quad (5)$$

Для нахождения обобщенных координат $y^\beta(x^0,...,x^3)$, рассмотрим уравнение Пфаффа с N переменными

$$\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial\Phi}{\partial x_l} = A_l .$$

Или запишем это уравнение в другой форме

$$d\Phi = \sum_{l=1}^{N} A_l(x^1,...,x^N)dx^l$$

Построим локальное решение уравнения Пфаффа, причем в случае интегрируемости уравнения Пфаффа, эта формула определит точное решение. Гиперповерхность начальных условий задается в виде $G(x_1^0,...,x_N^0)=0$. Из нее выходят кривые, заполняющие все пространство. Точное решение в точке $x_0^l, l=1,...,N$, имеет вид

$$\Phi = \Phi^0 + \sum_{l=1}^{N} A_l^0(x^l - x_0^l) + 0(x^l - x_0^l)^2 \qquad (6)$$

При этом верхний индекс 0, означает, что функция берется при начальных значениях координат. При этом локально интерполируется коэффициент A_l. В самом деле

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_l} = A_l^0 + 0(x^l - x_0^l).$$

и в точке $x^l = x_0^l$ точно аппроксимирует решение. Для получения глобального решения вдоль кривых $\frac{dx^l}{dt} = V^l(x^1,...,x^N)$, нужно составить дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sum_{l=1}^{N} A_l[x^1(t),...,x^N(t)]\frac{dx^l}{dt}. \qquad (7)$$

причем поправка к дифференциальному уравнению, равна нулю $\lim_{\Delta t\to 0} B_l(\frac{dx^l}{dt})^2\Delta t = 0$. Кроме того, необходимо решать дифференциальное уравнение $\frac{dx^l}{dt} = V^l(x^1,...,x^N)$, тогда решение будет задано параметрическим образом, но зависит от пути интегрирования. Так как путь интегрирования определен при условии $g_{k0} \neq 0$, это не представляет проблему. Задавая начальные координаты тела, получим решение, покрывающее все используемое в данной задаче пространство.

В случае $g_{k0} = 0, P_0^\beta = 0$, т.е. в случае одного неподвижного тела, построение системы координат невозможно, так как в случае неподвижного не вращающегося тела скорость тела равна нулю.

Из дифференциального уравнения (7) найдем величину $\Phi^0(x_0^1,...,x_0^N)$ и построим решением в точке $x_0^l, l = 1,...,N$ по формуле (6).

Отметим, что эти координаты в случае неподвижного одного вращающегося тела $P_0^\beta = 0, g_{k0} \neq 0$, тоже существуют, так как определяется вектор $V^l(x^1, x^2, x^3)$ и, следовательно, можно построить координаты $y^l, l = 0,...,3$. В случае одного неподвижного тела с диагональным метрическим тензором $P_0^\beta = 0, g_{k0} = 0$ формулы не работают и обобщенные координаты не определяются. При этом тело, если метрический тензор явно не зависит от времени, в этой системе координат неподвижно.

Но эта скорость определена в декартовых координатах. Для обобщенных координат справедливо $(dy^0)^2 - \sum_{\beta=1}^{3} (dy^\beta)^2 = ds^2 = g_{lk} dx^l dx^k$ по их построению и имеем обобщенную скорость U_l. Т.е. при соответствующих условиях Риманово пространство для данного распределения скорости тела, можно отобразить на декартово пространство.

При этом в этих обобщенных координатах справедливо преобразование Лоренца

$$dy_1 = \frac{dy_1' + dy_0' U / c'}{\sqrt{1 - U^2 / c'^2}}$$

$$dy_0 = \frac{dy_0' + dy_1' U / c'}{\sqrt{1 - U^2 / c'^2}}$$

$$dy_2 = dy_2', dy_3 = dy_3'$$

Причем, так как обобщенная скорость тела с учетом электромагнитного и гравитационного поля равна константе, имеем в этих координатах

$$y_1 = \frac{y_1' + y_0' U / c'}{\sqrt{1 - U^2 / c'^2}}$$

$$y_0 = \frac{y_0' + y_1' U / c'}{\sqrt{1 - U^2 / c'^2}}. \qquad (8)$$

$$y_2 = y_2', y_3 = y_3'$$

Следовательно, формула (5) определяет координаты, инвариантные относительно преобразования Лоренца. При этом данное преобразование определяет связь между неинерциальными системами координат в декартовом пространстве и инерциальными в обобщенном пространстве в силу справедливости формулы (8) в однородном и изотропном пространстве. При этом движение по инерции в этих координатах имеет постоянную скорость U_l, связанную со скоростью U_l' в движущейся со скоростью U_0 вдоль оси y_1 системе координат

$$U_1 = \frac{U_1' + U_0}{1 + U_1' U_0 / c^2}, U_2 = \frac{U_2' \sqrt{1 - (U_0 / c)^2}}{1 + U_1' U_0 / c^2}, U_3 = \frac{U_3' \sqrt{1 - (U_0 / c)^2}}{1 + U_1' U_0 / c^2}.$$

При этом в этих координатах будет справедливы основные уравнения СТО для свободного пространства. Волновое уравнение, следующее из уравнений Максвелла, запишется в виде

$$\frac{\partial^2 A_l}{\partial y_0^2} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 A_l}{\partial (y^k)^2} = 0.$$

При этом движение с постоянной скоростью при отсутствии источников электромагнитного поля, говорит об отсутствии излучения электромагнитной энергии и об отсутствии полей излучения, которые учтены при определении скорости.

При этом уравнение Дирака в обобщенных координатах в случае наличия электромагнитного поля запишется в виде

$$(\gamma^{\mu}{}_{ik} \widehat{p}_{\mu} - mc\delta_{ik})\psi_k = 0.$$

Не стандартное решение этого уравнения, записанного для свободного пространства, но в координатах, учитывающих гравитационное и электромагнитное поле, приведено в [4], и в случае нулевой массы в [5].

В случае, если частица является бозоном, ее волновая функция в обобщенных координатах, равна (при записи этой формулы учитывается, что импульс частицы в новых обобщенных координатах равен константе, причем учитывается гравитационное и электромагнитное поле, получается что координаты зависят от этих полей)

$$\psi = \sum_{P,\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \{\hat{a}_P^+ \exp[-iP_\alpha^n (x_{n\alpha} - x_{n\alpha}^0)/\hbar] + \hat{b}_P \exp[-iP_\alpha^n (x_{n\alpha} - x_{n\alpha}^0)/\hbar]\} =$$

$$= \sum_{P,\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \{\hat{a}_P^+ \exp[-iE_\alpha t/\hbar + iP_\alpha a(\varphi - \varphi^0)/\hbar] +$$

$$+ \hat{b}_P \exp[iE_\alpha t/\hbar - iP_\alpha a(\varphi - \varphi^0)/\hbar]\} =$$

$$= \sum_{k,\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \{\hat{a}_P^+ \exp[-iE_\alpha t/\hbar + ik_\alpha(\varphi - \varphi^0)] +$$

$$+ \hat{b}_P \exp[iE_\alpha t/\hbar - ik_\alpha(\varphi - \varphi^0)]\},$$

$$P_\alpha = \frac{k_\alpha}{a}\hbar = k_\alpha p_\alpha, E_\alpha = k_\alpha P_\alpha^0 = c\sqrt{(k_\alpha)^2 p_\alpha^2 + m^2 c^2},$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3, P_\alpha^l = k_\alpha \hbar / a$$

Определение угла φ см. [6]. Где величина $\hat{a}_P = \hat{l}_- \exp[i(E_\alpha - E_{\alpha-})t/\hbar]$ оператор уничтожения частицы, а оператор $\hat{b}_P^+ = \hat{l}_- \exp[i(E_{\alpha-} - E_\alpha)t/\hbar]$ рождения частицы, где E_α энергия системы в основном состоянии, $E_{\alpha-}$ энергия системы после действия оператора уничтожения состояния. Где сохраняющаяся величина $P_\alpha^l = k_\alpha \hbar / a$ является квазиимпульсом обратной решетки. В случае фермионов спинор в обобщенных координатах равен

$$\widehat{\psi} = \sum_{P,\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \{\widehat{a}_{P\sigma} u_{P\sigma} \exp[-iP_\alpha^n (x_{n\alpha} - x_{n\alpha}^0)/\hbar] +$$

$$+ \widehat{b}_{P\sigma}^{+} u_{-P-\sigma} \exp[-iP_\alpha^n (x_{n\alpha} - x_{n\alpha}^0)/\hbar]\} =$$

$$= \sum_{P,\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \{\widehat{a}_{P\sigma} u_{P\sigma} \exp[-iE_\alpha t/\hbar + iP_\alpha a(\varphi - \varphi^0)/\hbar] +$$

$$+ \widehat{b}_{P\sigma}^{+} u_{-P-\sigma} \exp[iE_\alpha t/\hbar - iP_\alpha a(\varphi - \varphi^0)/\hbar]\} =$$

$$= \sum_{k,\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \{\widehat{a}_{P\sigma} u_{P\sigma} \exp[-iE_\alpha t/\hbar + i(k_\alpha + 1/2)(\varphi - \varphi^0)] +$$

$$+ \widehat{b}_{P\sigma}^{+} u_{-P-\sigma} \exp[iE_\alpha t/\hbar - i(k_\alpha + 1/2)(\varphi - \varphi^0)]\},$$

$$\widehat{\overline{\psi}} = \widehat{\psi}^{+} \gamma^0$$

$$P_\alpha = \frac{k_\alpha + 1/2}{a} \hbar = (k_\alpha + 1/2) p_\alpha,$$

$$E_\alpha = c\sqrt{(k_\alpha + 1/2)^2 p_\alpha^2 + m_\alpha^2 c^2} = (k_\alpha + 1/2) P_\alpha^0$$

Оператор поляризации частицы равен $u_{P\sigma} = \begin{pmatrix} \sqrt{E/mc^2 + 1}w \\ \sqrt{E/mc^2 - 1}(\vec{n}\vec{\sigma})w \end{pmatrix}$, где w произвольная двухкомпонентная величина, удовлетворяющая условию $w^* w = 1$ и определяющая поляризацию волновой функции.

Литература

1. *Якубовский Е.Г.* Общая теория гравитационного и электромагнитного поля. «Энциклопедический фонд России», 2014, http://russika.ru/sa.php?s=434
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля т.II, Наука, М.,1973,564с.
3. *Якубовский Е.Г.* Уравнение ОТО для N тел. «Энциклопедический фонд России», 2015, http://russika.ru/sa.php?s=912
4. *Якубовский Е.Г.* Связь уравнения Дирака с детерминированным уравнением. «Энциклопедический фонд России», 2014, http://russika.ru/sa.php?s=936

5. *Якубовский Е.Г.* Свойства нейтрино. «Энциклопедический фонд России», 2014, http://russika.ru/sa.php?s=933
6. *Якубовский Е.Г.* Система координат и ОТО. Энциклопедический фонд России», 2015, http://russika.ru/sa.php?s=938