

Yakubovski Eugene G.
National mineral University Mountain
St. Petersburg, Russia

DETERMINATION OF COEFFICIENT OF RESISTANCE ROUND PIPE

Abstract

The coefficient of resistance of the round pipe with arbitrary Reynolds number and roughness is known only from the experiment. Complex solution of the Navier - Stokes equations is obtained and on the basis of qualitative considerations is determined the effect of roughness on the solution of the Navier - Stokes equations. At the same time with an accuracy of 10% managed to build a classic graphics of Nikuradze dependence of the resistance of the round pipe, depending on the arbitrary Reynolds number and roughness.

Якубовский Евгений Георгиевич

*Национальный Минерально-Сырьевой Университет Горный
Санкт-Петербург, Россия*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА СОПРОТИВЛЕНИЯ КРУГЛОГО ТРУБОПРОВОДА

Аннотация

Значение коэффициента сопротивления круглого трубопровода при произвольном числе Рейнольдса и степени шероховатости известно только из эксперимента. Предлагается с помощью комплексного решения получить решение уравнения Навье – Стокса и на основе качественных соображений определить влияние шероховатости на решение уравнения Навье – Стокса. При этом с точностью 10% удалось построить классические графики Никурадзе зависимости коэффициента сопротивления круглого трубопровода в зависимости от произвольного числа Рейнольдса и степени шероховатости.

Keywords: coefficient of resistance; turbulent regime; graphics Nikuradze

Ключевые слова: коэффициент сопротивления; турбулентный режим; графики Никурадзе

Введение

Проблема описания движения жидкости в турбулентном режиме не решена. Это создает трудности при расчете нефтяных, газовых трубопроводов. Кроме того, не существует теоретических методов описания движения тела в турбулентной среде. Это и описание движения летательного аппарата, движения подводной лодки или надводного корабля в турбулентном режиме. Без использования моделирования движущегося тела в аэродинамических трубах, или водных бассейнах, невозможно проектирование движущихся в вязкой среде тел. Существуют приближенные формулы аппроксимации коэффициента сопротивления трубопровода на отдельных участках числа Рейнольдса см.[1],[2]. Известны классические экспериментальные графики Никурадзе по определению коэффициента сопротивления круглого трубопровода в зависимости от числа Рейнольдса и степени шероховатости. Применяется аппроксимация конвективного члена, сводящая задачу решения уравнения Навье – Стокса к линейной с эффективной турбулентной вязкостью. Но такое преобразование искажает решение уравнения Навье – Стокса и для совпадения с экспериментом коэффициент турбулентной вязкости может иметь произвольное значение, вплоть до отрицательного. Применяется метод Галеркина, сводящий решение задачи гидродинамики к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Но при турбулентном режиме эта система нелинейных уравнений имеет комплексные положения равновесия, т.е. решение комплексное. И действительно в турбулентном режиме система уравнений гидродинамики в действительной плоскости не имеет решения, решение уравнения стремится к бесконечности см. [3]. При этом комплексное решение конечно. Физический смысл комплексного решения и его колебательный характер мнимой части см. [4],[5]. Т.е. решать задачу гидродинамики в турбулентном режиме надо в комплексной плоскости.

1. Алгоритм решения задачи гидродинамики

при произвольной геометрии потока

Уравнение Навье – Стокса в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 V_k \frac{\partial V_i}{\partial x^k} = -\frac{\partial P}{\rho \partial x^i} + \nu \Delta V_i. \quad (1.1)$$

Для этого решаем трехмерную ламинарную задачу без учета конвективного члена при заданном внешнем воздействии g_l

$$\frac{\partial P}{\rho \partial x_i} = \nu \Delta V_i.$$

Приведем эту задачу к безразмерному виду, разделив на величину ν^2 / d^3 , получим

безразмерное уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial y_i} = \Delta R_i,$$

$$R_s = V_s d / v, p = \frac{P d^2}{\rho v^2}, y_s = x_s / d, h_s = g_s d^2 / v^2$$

Решением этой задачи служит функция

$$R_s(y_1, y_2, y_3) = - \int_V \frac{1}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{z}|} \frac{\partial p}{\partial z_s} dz_1 dz_2 dz_3.$$

Строим решение уравнения неразрывности по внешнему воздействию, где величина r_i отклик на внешнее воздействие

$$\frac{\partial R_i - r_i}{\partial x^i} = \int_V \frac{y_s - z_s}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2} \left(\frac{\partial p}{\partial z_s} - h_s \right) dz_1 dz_2 dz_3 = 0$$

Откуда получаем уравнение по определению давления в потоке

$$\int_V \frac{y_s - z_s}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2} \frac{\partial p}{\partial z_s} dz_1 dz_2 dz_3 = \int_V \frac{y_s - z_s}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2} h_s dz_1 dz_2 dz_3.$$

Давление ищем в виде $p = \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(z_1, z_2, z_3)$. Подставляем его в подынтегральное

выражение, умножаем на величину $\varphi_m(y_1, y_2, y_3)$, и интегрируем по пространству, получаем систему линейных уравнений

$$b_m = A_{mn} a_n.$$

Где имеем значения коэффициентов

$$A_{mn} = \int_V \int_V \varphi_m(y_1, y_2, y_3) \frac{y_s - z_s}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2} \frac{\partial \varphi_n(z_1, z_2, z_3)}{\partial z_s} dz_1 dz_2 dz_3 dy_1 dy_2 dy_3$$

$$b_m = \int_V \int_V \varphi_m(y_1, y_2, y_3) \frac{y_s - z_s}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2} h_s(z_1, z_2, z_3) dz_1 dz_2 dz_3 dy_1 dy_2 dy_3$$

Где величина $h_s(y_1, y_2, y_3)$, определяется внешним воздействием. Приведем уравнение

Навье – Стокса к безразмерному виду, разделив его на величину v^2 / d^3 , получим безразмерное уравнение

$$\frac{\partial \mathfrak{R}_l}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^3 \mathfrak{R}_k \frac{\partial \mathfrak{R}_l}{\partial y_k} = -\frac{\partial p}{\partial y_l} + \Delta \mathfrak{R}_l$$

$$\mathfrak{R}_l = \frac{V_l d}{\nu}, y_l = x_l / d, \tau = tv / d^2, p = \frac{P d^2}{\rho \nu^2}, h_l = g_l \frac{d^2}{\nu^2} = \frac{\partial p}{\partial y_l}.$$

Умножаем уравнение Навье – Стокса на сечение трубки тока, записываем уравнение вдоль ламинарного решения, вводя трубку тока, поток в которой имеет постоянное значение см. [6]

$\Gamma_s = \int_{S_s} \mathfrak{R}_s ds_s / d^2$. В конвективном члене и в градиенте давления введем производную по

направлению, соответствующую направлению линий потока ламинарного решения. При подстановке в уравнение решения в виде

$$\Gamma_s = \alpha_s(\tau) \int_{S_s} R_s[y_1(\alpha, \beta), y_2(\alpha, \beta), y_3(\alpha, \beta)] d\alpha d\beta / d^2 \quad (1.3)$$

Где величина S_s сечение трубки тока в ламинарном режиме.

Причем эти трубки тока строим при любом внешнем воздействии, проявляющемся в перепаде давления. Далее учитываем шероховатости, и при некоторых условиях получаем комплексное турбулентное решение, которое связано с влиянием малого квадратичного конвективного члена, который приводит к комплексному решению при большом перепаде давления. При этом действительное решение, которое получается при другом знаке модуля среднеквадратичного отклонения, отбрасываем, как не определяющее колеблющееся, турбулентное решение. Причем мнимая часть решения определяет пульсации решения. При этом появляется граница между ламинарным действительным решением и турбулентным комплексным решением в виде критического числа Рейнольдса. В случае выбора другого знака квадратного корня при учете корреляционной функции процесса $\langle u'_l u'_k \rangle$, где величина u'_k отклонение скорости от среднего значения, турбулентная вязкость становится отрицательной.

Введение шероховатости приводит к зависимости $\Gamma_s(s)$, так как функции $y_l(\alpha, \beta, s), l=1, \dots, 3$ начинают зависеть от величины s , через зависимость радиуса $a_0(s)$ от степени микро-шероховатости. Далее выделяем член da_0/ds связанный с шероховатостью, находим его среднеквадратичное значение. При этом произведем усреднение уравнения по величине s . При подстановке в оператор Лапласа и производную по направлению, сначала считается оператор Лапласа, а потом интегрируется трубка тока.

Причем получается, что конвективный член в ламинарном режиме равен нулю. При этом

величину \mathfrak{R}_n представим в виде $\mathfrak{R}_s = \frac{\int \mathfrak{R}_s d\alpha d\beta}{S_s} = \frac{\Gamma_s d^2}{S_s}$. Получим уравнение

$$\frac{\partial \Gamma_s}{\partial \tau} + \frac{\Gamma_s d^2}{S_s} \frac{\partial \Gamma_s}{\partial s} = - \frac{\partial \int \frac{pd\alpha d\beta}{d^2}}{\partial s} + \Delta \Gamma_s, S_s = \int_{S_s} d\alpha d\beta, \Gamma_s = \int_{S_s} \mathfrak{R}_s d\alpha d\beta / d^2$$

Чтобы учесть шероховатость поверхности трубопровода, и получить турбулентное решение, надо учесть среднеквадратичный тангенс наклона шероховатостей поверхности. Тогда этот конвективный член будет мал, но отличен от нуля и пропорционален

среднеквадратичной величине тангенса наклона шероховатостей $\langle |\frac{da_0}{ds} - \langle \frac{da_0}{ds} \rangle| \rangle$ при наличии члена, связанного с не постоянным сечением трубопровода $\frac{d \langle a_0 \rangle}{ds}$. При этом у

комплексного турбулентного решения линии тока сохраняются, соответствующие линиям тока ламинарного решения. Но будет пульсирующее решение, относительно ламинарных линий тока. Причем пульсации определяются мнимой частью скорости, причем мнимая часть решения, равная константе, означает пульсации с амплитудой, равной мнимой части скорости.

Подставим решение (1.1.2) в уравнение Навье – Стокса и проинтегрируем по трубкам тока, умножим на величину R_{cr} , где эта величина удовлетворяет условию $1/R_{cr} = \langle |\tan \alpha| \rangle$, где $\langle |\tan \alpha| \rangle$ среднеквадратичный тангенс наклона не устранимых микро-шероховатостей, огибающая которых определяет макро шероховатости, получим уравнение

$$R_{cr} \frac{d\alpha_s(\tau)}{d\tau} = F_s \alpha_s^2 - 2R_{cr} \alpha_s G_s + H_s$$

$$F_s = \int_V \frac{\Gamma_s d^2}{S_s} [y_1(\alpha, \beta, s), y_2(\alpha, \beta, s), y_3(\alpha, \beta, s)] \times$$

$$\times \frac{\partial R_n [y_1(\alpha, \beta, s), y_2(\alpha, \beta, s), y_3(\alpha, \beta, s)]}{\partial s} d\alpha d\beta ds$$

$$G_s = - \int_V \Delta R_s [y_1(\alpha, \beta, s), y_2(\alpha, \beta, s), y_3(\alpha, \beta, s)] d\alpha d\beta ds / d^2 > 0$$

$$H_s = \int_V \frac{\partial p [y_1(\alpha, \beta, s), y_2(\alpha, \beta, s), y_3(\alpha, \beta, s)]}{d^2 \partial s} R_{cr} d\alpha d\beta ds$$

Где величины $R_k(y_1, y_2, y_3), p(y_1, y_2, y_3)$ определены из ламинарного решения и уравнения неразрывности, функция внешнего воздействия $h_l(y_1, y_2, y_3)$ задается. Получается, что микро-шероховатости, расположенные по всей длине трубопровода, определяют критическое число Рейнольдса. Эти микро-шероховатости меньше макро шероховатостей, которые оказывают влияние на коэффициент сопротивления, при больших числах Рейнольдса. Но так как число Рейнольдса зависит от геометрии трубопровода, через его диаметр, то критическое число Рейнольдса только обратно пропорционально среднеквадратичному тангенсу наклона микро-шероховатостей, и зависит от геометрии трубопровода.

Координаты положения равновесия определяются из квадратного уравнения

$$\alpha_s^2 - \alpha_s \frac{2R_{cr} G_s}{F_s} + \frac{H_s}{F_s} = \alpha_s^2 - 2R_{cr}^s \alpha_s + T_s \gamma_s = 0, T_s = \frac{\Delta P_s d^3 R_{cr}}{\rho^2 v^2 L}, R_{cr}^s = \frac{R_{cr} G_s}{F_s}$$

При этом ламинарное решение уточняется и имеет вид $\alpha_s = R_{cr}^s - \sqrt{(R_{cr}^s)^2 - T_s \gamma_s}$, которое при малом перепаде давления переходит в линейное ламинарное решение $\alpha_s = T_s \gamma_s / (2R_{cr}^s)$.

При этом справедлива турбулентная формула учета шероховатостей в силу одинакового метода усреднения в турбулентном режиме

$$\frac{\alpha_s}{\sqrt{T_s}} = \frac{R_{cr}^s}{\sqrt{T_s}} - i^4 \sqrt{\gamma_s - \frac{(R_{cr}^s)^2}{T_s}} \sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{(R_{cr}^s)^2}{T_s} + \sqrt{\gamma_s - \frac{(R_{cr}^s)^2}{T_s}} \lambda \exp(i\varphi)}$$

$$\lambda = \{\alpha / [k(T_s, \xi_0) R_{cr} / \omega l(T_s, \xi_0) + 1]\}^\sigma$$

Где величина $k(T_s, \xi_0) / l(T_s, \xi_0)$ это эффективный среднеквадратичный тангенс наклона шероховатостей, ξ_0 это отношение высоты шероховатости к радиусу трубопровода.

Где критическое число Рейнольдса $\alpha_s = R_{cr}^s$ удовлетворяет значению числа Рейнольдса, соответствующее началу комплексного решения. При этом при малом числе Рейнольдса получаем ламинарное решение. Но проблемы получения турбулентного решения на этом не кончаются. Нужно определить влияние шероховатостей поверхности, для чего пока необходимо использование экспериментальных данных. В принципе необходимо точное

значение зависимости числа Рейнольдса для гладкой поверхности от микро-шероховатостей.

2. Расчет трубопровода с круглым сечением в случае несжимаемой жидкости

Реализацией данного алгоритма решения является расчет трубопровода с круглым сечением. Решение задачи о трубопроводе с круглым сечением, будем искать в виде $V_z = V_0(t)[1 - r^2/a^2(z)]$ в цилиндрической системе координат. Так как внешнее воздействие имеется только для продольной оси $P(z) = P_2 + \frac{P_1 - P_2}{L}z$, где P_2, P_1 давление в начальной и конечной части трубопровода, величина L это длина трубопровода, радиальной и угловой скоростью пренебрегаем. Внешнее воздействие равно $h_z = \frac{P_1 - P_2}{L}$.

Согласно формуле (1.2) градиент давления равен $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_1 - P_2}{L}$. Получим уравнение

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{P_1 - P_2}{L} + \nu \Delta V_z.$$

Подставляем значение числа Рейнольдса, получим уравнение

$$\frac{\partial V_0}{\partial t}(1 - r^2/a^2) + 2V_0^2(1 - r^2/a^2) \frac{r^2}{a^3} \frac{da}{dz} = -\frac{P_1 - P_2}{\rho L} - \nu \frac{4V_0}{a^2}$$

Умножаем это уравнение на радиус и интегрируем это уравнение по радиусу, так как система координат цилиндрическая, получим

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} a^2/6 + \frac{(P_1 - P_2)a^2}{2\rho L} + 2\nu V_0 = -V_0^2 \frac{ada}{6dz}.$$

Беря модуль правой части, и находя среднеквадратичное отклонение, получим

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} a^2/6 + \frac{(P_1 - P_2)a^2}{2\rho L} + 2\nu V_0 = V_0^2 \frac{a \langle |da/dz| \rangle}{6} = V_0^2 \frac{2ak}{l} \quad (2.1)$$

В случае выбора знака минус у значения среднеквадратичного отклонения, получится, что шероховатости увеличивают скорость потока, так как полная производная $\frac{dV_0}{dt}$ увеличится, что не правильно, скорость потока должна уменьшаться за счет шероховатостей. При ведении турбулентной вязкости используется отрицательный знак у модуля среднеквадратичного тангенса наклона шероховатости, связанного с корреляционной функцией скорости процесса

$-\rho \langle u'_i u'_k \rangle = \rho K \frac{\partial \langle u'_i \rangle}{\partial x_k}$ см. [1], что приводит к знаку плюс у среднеквадратичного

члена. Кроме того, надо выбирать знак плюс у среднеквадратичного тангенса модуля наклона шероховатости, чтобы получилось комплексное турбулентное решение. В противном случае, решение, описывающее пульсирующий турбулентный режим не получится.

Переходя от радиуса к диаметру трубопровода и разделив на величину $v^2 k / (dl)$, получим

$$\frac{dR_0}{d\tau} = R_0^2 - 2R_0 R_{cr} + \frac{T}{8}; T = \frac{(P_2 - P_1) d^3 R_{cr}}{\rho v^2 L} \quad (2.2)$$

$$\tau = 24t \cdot v / (R_{cr} d^2), R_0 = V_0 d / v, 1 / R_{cr} = \langle |da/dz| \rangle / 12 = k/l = \langle |\tan \alpha| \rangle$$

Если микро-шероховатости $\langle |\tan \alpha| \rangle$ распределены по всей поверхности трубопровода, они находятся и на макро шероховатостях и определяют критическое число Рейнольдса и коэффициент сопротивления при числе Рейнольдса, равном 2300. Микро-шероховатости имеют молекулярную природу и определяются средним размером ядра, равным среднему геометрическому с коэффициентом, между размером ядра и размером атома $\sigma = \sqrt{0.7155 r_A a_0}$, при расстоянии между атомами $a = 2.87 a_0$. Расстояние между атомами железа $a_{Fe} = 2.87 a_0$, между атомами титана $a_{Ti} = 3.46 a_0$, между атомами углерода $a_C = 3.567 a_0$ см. [7]. При этом абсолютная величина тангенса наклона высоты микро-шероховатости поверхности металла в трубопроводе определяется по формуле

$$h(z) = \langle |\tan \alpha| \rangle = \sum_{n=-N}^N \exp[-(z - na)^2 / 2\sigma^2] / (2N\sqrt{2\pi}).$$

Среднеквадратичный тангенс наклона равен

$$\begin{aligned} \frac{2}{R_{cr}} &= \int_{-\infty}^{\infty} h(z) \frac{dz}{4\pi Na} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(z - na)^2 / 2\sigma^2] dz}{2\pi a} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi} a} = \\ &= \frac{1}{2.87} \sqrt{\frac{r_A}{2\pi \cdot 0.7155 \cdot a_0}} = \frac{1}{2.87} \sqrt{\frac{1.4 \cdot 10^{-13}}{2 \cdot 3.1416 \cdot 0.7155 \cdot 0.5 \cdot 10^{-8}}} = \frac{1}{1150} \end{aligned}$$

Эта величина определяет критическое число Рейнольдса при использовании в числе Рейнольдса радиуса, вместо диаметра. При использовании диаметра критическое число Рейнольдса равно $R_{cr} = 2300$. Необходимо отметить, что к микро-шероховатостям относятся и ступенчатое изменение высоты поверхности. Его тангенс наклона образует дельта функцию и при усреднении дает вклад в критическое число Рейнольдса в данном

сечении $\frac{2}{R_{cr}} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^P \frac{|\Delta a_k|}{2\pi P a} \delta(z - z_k) dz = \sum_{k=1}^P \frac{|\Delta a_k|}{2\pi P a}$, где скачок высоты произошел на разных углах данного сечения.

Макро-шероховатости $\langle |da/dz| \rangle$ более редкие и определяют коэффициент сопротивления на числах Рейнольдса в 12 и более раз больше, чем критическое число Рейнольдса.

Получаем условие стационарности для уравнения Навье – Стокса с учетом одного члена ряда-решения в одномерном случае

$$R_0^2 - 2R_0 R_{cr} + T/8 = 0,$$

В одномерном случае при постоянстве сечения трубопровода уравнение неразрывности выполняется тождественно. Ламинарное решение этого уравнения равно

$$R_0 = R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8} = [R_{cr}/\sqrt{T} - \sqrt{R_{cr}^2/T - 1/8}]\sqrt{T}.$$

При внешнем давлении, равном $T = 8R_{cr}^2$ начинается комплексное решение и турбулентный режим, так как число Рейнольдса в этой точке равно критическому значению.

Из эксперимента имеем значение критического числа Рейнольдса для круглого трубопровода

$$R_{cr} = \frac{l}{k} \langle \tan \alpha \rangle = \frac{1}{\langle \tan \alpha \rangle} = 2300. \quad \text{Коэффициент сопротивления трубопровода с круглым}$$

сечением определяется по формуле (в формулу подставляем перепад давления, выраженный через безразмерное давление)

$$\lambda = \frac{2\Delta P_L d}{\rho V_a^2 L} = \frac{2T v^2 k}{V_a^2 d^2 l} = \frac{2T}{R_{cr} |R_a^2|},$$

Средняя скорость, входящая в число Рейнольдса, равна

$$V_a = \int_0^a r V_0 (1 - \frac{r^2}{a^2}) dr / \int_0^a r dr = V_0/2, R_a = \frac{V_a d}{\nu} = \frac{R_0}{2}.$$

Асимптотика коэффициента сопротивления трубопровода с круговым сечением для ламинарного режима λ_{lam} вычислена верно.

$$R_a = R_0/2 = (R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8})/2 \cong \frac{T}{32R_{cr}}, \frac{T}{8R_{cr}^2} \ll 1, \lambda_{lam} = \frac{2T}{R_{cr} |R_a^2|} = \frac{64}{|R_a|}$$

Асимптотика получена при малом числе Рейнольдса, когда конвективный член мал.

В случае большого перепада давления, получаем комплексное турбулентное решение

$$R_0 = R_{cr} - i\sqrt{T/8 - R_{cr}^2} = (R_{cr}/\sqrt{T} - i\sqrt{1/8 - R_{cr}^2/T})\sqrt{T}. \quad \text{Если считать точнее, то}$$

вклад вращательной мнимой части в поступательную скорость движения потока соответствует корню из мнимой части согласно формуле (2.3)

$$\frac{R_0}{\sqrt{T}} = \frac{R_{cr}}{\sqrt{T}} - i^4 \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{R_{cr}^2}{T}} \beta = \sqrt{\frac{R_{cr}^2}{T} + \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{R_{cr}^2}{T}} \beta \exp(i\varphi)}$$

$$\beta = \{\alpha / [k(T, \xi_0) R_{cr} / \omega l(T, \xi_0) + 1]\}^\sigma, \quad (1.1.3)$$

$$\alpha = \omega = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} = 1.31, \sigma = 0.25 \cdot 3/2 = 3/8$$

причем необходимо использовать величину отношения числа Рейнольдса на корень из безразмерного давления, как величину порядка единицы в турбулентном режиме. Число Рейнольдса потока пропорционально на бесконечности давления $R \sim \sqrt{T} \sim d_{eff}^{3/2}$. При этом степень усреднения пропорциональна высоте шероховатости, стремящейся к нулю, хотя самая гладкая поверхность соответствует среднему модулю тангенса наклона, равному обратной величине критического числа Рейнольдса. Так как из мнимой части выражения для числа Рейнольдса потока извлекается корень четвертой степени, имеем для эффективного диаметра

формулу

$$d_{eff} / d \sim \lim_{k \rightarrow 0} [\alpha(1 - kR_{cr} / \omega l)]^{1/4} = \lim_{k \rightarrow 0} (\alpha - kR_{cr} / l)^{1/4} = \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{1 + kR_{cr} / \omega l} \right)^{1/4}. \quad \text{Величины}$$

$\alpha = \omega$, и при бесконечно малой шероховатости сокращаются, хотя такая ситуация и не реализуется. Но эти формулы справедливы для данной схемы решения. При решении в виде ряда получится вычисляемое другое значение α . Самая гладкая поверхность соответствует среднему модулю тангенса наклона, равного обратному значению критического числа Рейнольдса, так как самые малые модули тангенса наклона соответствуют молекулярному уровню шероховатости. При этом эффективный диаметр меньше истинного диаметра. Высота шероховатости может стремиться к нулю, одновременно с периодом шероховатости

l . Т.е. величина $\left(\frac{\alpha}{1 + 1/\omega}\right)^{1/4}$ это максимальное отношение эффективного диаметра к

истинному диаметру. Для внешней задачи эффективный диаметр увеличится, и коэффициент β определится по формуле $\beta = \{[k(T, \xi_0) R_{cr} / \omega l(T, \xi_0) + 1] / \alpha\}^\sigma$. Для обтекания сферы при нулевой высоте шероховатости эффективный размер сферы совпадет с истинным размером сферы, т.е. коэффициенты $\alpha = \omega = 1$. При переходе от сферического тела к цилиндрическому с круговым сечением, этот коэффициент будет равен

$\alpha = \omega = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} = 1.31$. Причем у сферического тела этот коэффициент равен 1.

При этом коэффициент β пропорционален

$$\beta \sim \langle d^{3/2} \rangle = d^{3/2} \{ \alpha / [k(T, \xi_0) R_{cr} / \omega l(T, \xi_0) + 1] \}^\sigma, \sigma = \frac{1}{4} \frac{3}{2} = \frac{3}{8},$$

макро шероховатости эффективный диаметр равен $\alpha^{2\sigma/3}$, т.е. при увеличении степени шероховатости эффективный диаметр уменьшается. При этом отношение тангенса наклона макро шероховатостей к микро шероховатостям больше чем величина $k / (l \langle |\tan \alpha| \rangle) = 1$.

Вычислим изменение диаметра трубопровода при условии равенства макро шероховатостей микро-шероховатостям из эмпирической формулы по уменьшению среднего квадрат значения диаметра, получится, что диаметр уменьшился в $[(1/\omega + 1)/\alpha]^{1/4} = 1.14$ раза. При отношении $l/k = 30$, получаем уменьшение диаметра трубопровода в $[2300/(30 \cdot \omega) + 1]^{1/4} = 2.73$ раза.

При этом диаметр изменяется только у коэффициента пульсирующей части решения, т.е. у мнимой части, откуда и возникает множитель $\beta = \{ \alpha / [k(T, \xi_0) R_{cr} / \omega l(T, \xi_0) + 1] \}^\sigma$, так как мнимый член пропорционален $\sqrt{T} \sim d^{3/2}$, который усредняется. Квадратный корень $\sqrt[4]{1/8 - R_{cr}^2/T}$ при этом соответствует среднему значению диаметра.

При этом учтено влияние шероховатости стенок турбулентного потока на мнимую часть числа Рейнольдса потока. Чтобы получить графики с постоянной высотой шероховатости, надо ввести эффективный средний модуль тангенса угла наклона шероховатостей. Эффективный средний модуль тангенса угла шероховатостей должно зависеть от внешнего

давления $\frac{k(T, \xi_0)}{l(T, \xi_0)}$.

Причем на бесконечности числа Рейнольдса, или безразмерного давления имеем шероховатость, соответствующую постоянной высоте шероховатости $\frac{k(\infty, \xi_0)}{l(\infty, \xi_0)} = \frac{k}{r_0} = \frac{1}{\xi_0}$,

где k среднеквадратичная высота шероховатости, r_0 радиус круглого сечения трубопровода.

Формула подобрана таким образом, чтобы правильно определять зависимость числа Рейнольдса относительно внешнего давления и коэффициент сопротивления трубопровода при бесконечном числе Рейнольдса и внешнего давления

$\text{Im} R_0 = -i\sqrt[4]{1/8} \{ \alpha / [k(\infty, \xi_0) R_{cr} / \omega(\infty, \xi_0) + 1] \}^\sigma \sqrt{T}$ при коэффициенте сопротивления, равном величине $\lambda = \frac{8}{R_{cr} \sqrt{1/8} [\alpha / (R_{cr} / \omega \xi_0 + 1)]^{2\sigma}}$.

Эти же коэффициенты получаются при решении с помощью ряда, но вместо величины $1/8$ в случае ряда используется коэффициент $4/9$. Другое значение константы приводит к другому значению коэффициента α .

При постоянном среднем модуле тангенса угла наклона шероховатостей $\frac{k}{l}$, но разной высоте шероховатостей k , получается график отличный от графика Никурадзе.

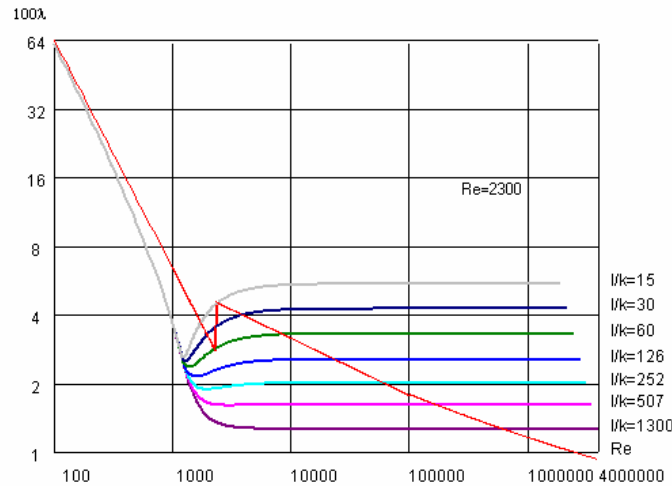


Рис.1 График зависимости коэффициента сопротивления круглого трубопровода от числа Рейнольдса при разных среднеквадратичных тангенсах наклона шероховатости

Но формула Никурадзе получена при постоянном отношении радиуса трубопровода r_0 к средней высоте шероховатости k . Формула (1.1.3) содержит эффективный средний модуль тангенса угла наклона шероховатости, который выражен через отношение радиуса трубопровода к средней высоте шероховатости через безразмерное давление.

$$\frac{l(T, \xi_0)}{\delta(T, \xi_0)} = \{ \xi_1 \exp[-|\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}}| / |\alpha(\xi_0)|] + \xi_0 [1 - \exp(-|\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}}| / |\alpha(\xi_0)|)] \} \times \\ \times \{ 1 + 0.4 \exp\{-[\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}} \beta(\xi_0)] / \gamma(\xi_0)\} \}, \xi_0 = r_0 / k, \xi_1 = (R_{cr} / 2)^{1/10} = 2$$

Величина $T_{cr} = 8R_{cr}^2$. Влияния эффективного среднего модуля тангенса наклона шероховатостей на свойство потока зависит от числа Рейнольдса или перепада давления.

Эмпирическая формула по определению коэффициентов $\alpha(\xi_0), \beta(\xi_0), \gamma(\xi_0)$ следующая

$$\alpha(\xi_0) = R_{cr} \frac{\xi_0}{1.5} \eta, \quad \beta(\xi_0) = \frac{\xi_0}{4} \eta, \quad \gamma(\xi_0) = R_{cr} \xi_0^{1.5} \eta / 4$$

При этом в начале образования мнимой части комплексного решения $T = T_{cr} = 8 R_{cr}^2$, или начале турбулентного решения, тангенс наклона шероховатостей приближенно равен 2, и графики при разных тангенсах наклона шероховатостей совпадают. Величина η для данных формул равна 1, в случае решения в виде ряда получается другое значение.

При этом коэффициент сопротивления потока в круглом трубопроводе определяется по

формуле $\lambda = \frac{2T}{R_{cr} |R_a|^2}$, число Рейнольдса, вычисленное на основании средней скорости

течения потока, равно $R_a = R_0 / 2$. Коэффициент сопротивления на бесконечности давления

пропорционален $\lambda = \frac{16\sqrt{2}}{R_{cr} [\alpha / (R_{cr} / \omega \xi_0 + 1)]^{2\sigma}}$. Приведем график решения, полученного с

помощью одного члена ряда.

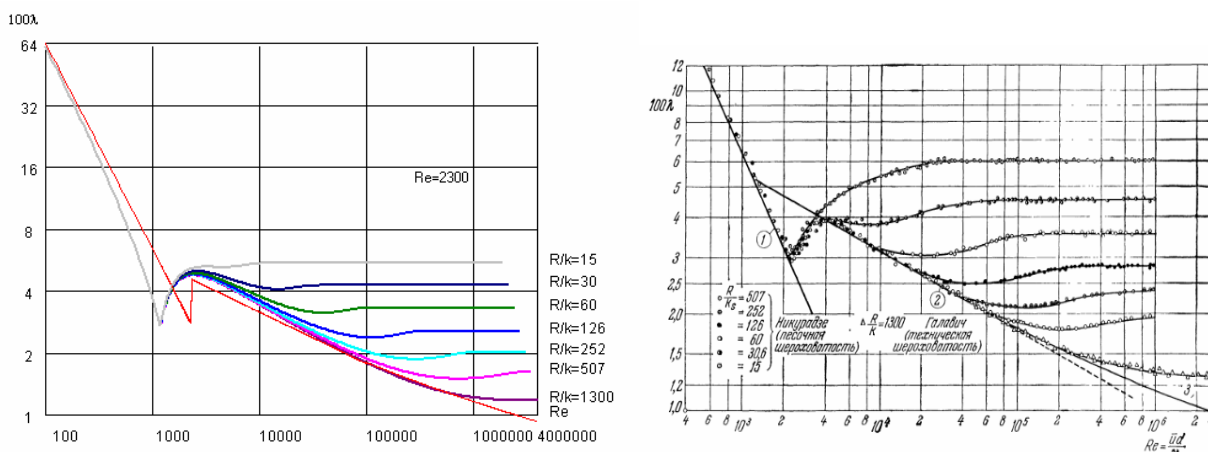


Рис.2 Теоретическая и экспериментальная зависимость коэффициента сопротивления круглого трубопровода от числа Рейнольдса при разной степени шероховатости

Для сравнения теоретического и экспериментального графика зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса потока приведен экспериментальный график Никурадзе справа на рис.2. Ошибка теоретического графика относительно экспериментального примерно 10%. Отмечу, что график, приведенный на рисунке Никурадзе в ламинарной части решения не точен, по мере приближения к критическому числу Рейнольдса появляется отличие от соотношения $\lambda = 64/R$, что отражено на теоретическом графике, и мало проявляется на экспериментальном. Экспериментальный график для логарифма давления и

числа Рейнольдса изображен прямой линией, а должно быть отличие от прямой линии по мере увеличения влияния конвективного члена.

Данный график решения получен для постоянной температуры потока для каждого сечения потока, поэтому в случае слабой зависимости кинематической вязкости от температуры формулы не изменятся. Для его реализации в случае турбулентного режима необходимо подставить в формулу приведенное давление и отношение радиуса трубопровода к высоте шероховатости

$$|R_0| = \sqrt{R_{cr}^2 + \sqrt{T^2/8 - TR_{cr}^2} \beta}$$

$$\beta = 1/[k(T, \xi_0)R_{cr} / \omega l(T, \xi_0) + 1]^\sigma$$

$$\frac{l(T, \xi_0)}{k(T, \xi_0)} = \{\xi_1 \exp[-|\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}}| / \alpha(\xi_0)] + \xi_0 [1 - \exp(-|\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}}| / \alpha(\xi_0))]\} \times$$

$$\times \{1 + 0.4 \exp\{-[\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}} \beta(\xi_0)] / \gamma(\xi_0)\}, \xi_0 = \frac{r_0}{\delta_0}$$

Причем формула построена таким образом, чтобы $\frac{l(\infty, \xi_0)}{k(\infty, \xi_0)} = \xi_0$. В случае ламинарного

режима имеется простая формула для определения числа Рейнольдса

$$R_0 = R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8}.$$

Выводы

На основании решения уравнения Навье – Стокса построены графики зависимости коэффициента сопротивления круглого трубопровода от числа Рейнольдса при постоянном тангенсе наклона шероховатости и постоянной высоте шероховатости. Получена конечная формула, определяющая зависимость числа Рейнольдса потока от внешнего давления, как в ламинарном, так и в турбулентном режиме, а значит и зависимость коэффициента сопротивления потока от внешнего давления. Остается не решенной теоретически проблема шероховатостей. Это вызывает необходимость привлечения экспериментального материала для определения влияния шероховатости. Характерный размер тела и его шероховатость общая для разных задач и должна считаться одинаково как для движения тела в вязкой сжимаемой среде, так и в круглом трубопроводе с несжимаемой жидкостью. Переход от среднеквадратичного тангенса наклона шероховатостей к постоянной высоте шероховатостей одинаков для разных задач. Но имеются другие шероховатости, например, синусоидальная высота шероховатостей, для которых так же надо находить эффективный

тангенс наклона шероховатостей. Причем, разный тип шероховатостей сказывается на мнимой части числа Рейнольдса.

Список литературы

1. *Монин А.С. Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика Механика турбулентности Часть 1. М.: Наука, 1965. 640с.
2. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя М.: «Наука», 1974. 713с.
3. *Якубовский Е.Г.* Комплексные ограниченные решения уравнений в частных производных. // Материалы международной научно-практической конференции. Теоретические и практические аспекты естественных и математических наук. Новосибирск: Изд. Сибак, - 2012, -С. 19-30. <http://sibac.info/index.php/2009-07-01-10-21-16/5809-2013-01-17-07-57-12>
4. *Якубовский Е.Г.* Модель комплексного пространства //Материалы XIII международной научно-практической конференции, Т.1 М.: «Институт стратегических исследований», изд. «Спецкнига», - 2014, -С.26-32.
5. *Якубовский Е. Г.* Модель комплексного пространства и распознавание образов. //На стыке наук. Физико-химическая серия. Т.2, Казань, - 2014, С. 186-187. <http://istina.msu.ru/media/publications/article/211/bd0/6068343/raspoznavobrazovwithoutequiti on.pdf>
6. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начало тензорного анализа М.: Наука, 1965. 427с.
7. *Кикоин И.К.* Таблицы физических величин Справочник М.: Атомиздат, 1976. 1009с.