Свойства метрического тензора пространства микромира

Е.Г. Якубовский

e-mail yakubovski@rambler.ru

Аннотация

Данная статья посвящена описанию влияния электромагнитного поля на свойства метрического тензора пространства микромира. Если в макромире заряды скомпенсированы, то в микромире частицы обладают зарядами, причем заряды бывают положительными и отрицательными. Это приводит к дополнительным эффектам, в частности к изменению свойства пространства. В частности появляется понятие диэлектрической и магнитной проницаемости, но это макроэффекты. Микроэффектом является изменение свойства пространства времени.

Обобщение понятия поля при больших значениях нелинейности получено с помощью уравнения ОТО. Для введения зарядов в уравнение ОТО, его правая часть умножена на множитель, содержащий заряд и массу, причем при малом заряде, или большой массе этот множитель равен единице. При этом для единообразного описания зарядов одного знака и масс, введено понятие мнимого заряда. При этом при малых поправках к метрическому тензору Минковского уравнение ОТО сводится к волновому уравнению. Причем правая часть волнового уравнения относительно вектор потенциалов пропорциональна величине $ie + m\sqrt{\gamma}$, где величина γ это гравитационная постоянная. При этом описана зависимость метрический интервал от малого потенциала поля, т.е. получены значения метрического тензора в зависимости от малой электрической энергии по сравнению с энергией покоя частицы. Вычислена линейная часть силы, действующая на массы и заряды, причем оказалась она совпадает с силой Лоренца. Получены поправки к силе, действующей на массы и заряды во втором порядке малости. Показано, что

траектории существуют в комплексном пространстве, а так как в действительном пространстве они изрезаны, используется уравнение квантовой механики, описывающее вероятность нахождения в данном объеме действительного пространства.

Ключевые слова: нелинейные свойства электромагнитного поля, уравнение ОТО, удержание плазмы

Электромагнитное поле при больших энергиях

1.1. **Введение множителя в уравнение общей теории относительности, позволяющего описывать электромагнитное поле**

Основные попытки обобщения уравнений Максвелла связаны с развитием методов вычисления собственной энергии электрона. Т.е. с необходимостью такого обобщения, чтобы формула для энергии электрона не стремилась к бесконечности, при радиусе, относительно центра электрона, стремящемся к нулю. Причем при больших расстояниях от излучателя, оно должна приводить к уравнениям классической электродинамики.

Существует распространенная ошибка, что классическое электромагнитное поле не применяется при условии (1.1). На самом деле это граница, когда начинается квантовое описание частицы.

$$\hbar\omega_H = \frac{\hbar eH}{m_e c} = \frac{137e^3H}{m_e c^2} < 2m_e c^2 . \qquad (1.1)$$

Существуют границы нелинейного электромагнитного описания тел. Они получаются из формулы (1.14) $|\frac{(ie+m\sqrt{\gamma})A_\alpha}{mc^2}|<1$. Применяя эту формулу нелинейного эффекта к квантовому состоянию электрона, получим порядок величины формулы (1.1) $|\frac{(ie+m\sqrt{\gamma})r_e H}{mc^2}| = \frac{e^3H}{m_e^2c^4} < 1, r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$.

Условие нелинейности электромагнитного поля эквивалентно

$$\frac{eA}{m_e c^2} = \frac{E_{e.m.}}{m_e c^2} >> 1, E_{e.m.} = eA \tag{1.2}$$

Характерная энергия электромагнитного поля при удержании плазмы с помощью электромагнитного поля равна $20 - 100 keV$, при величине энергии электрона $0.5 MeV$.

Получается, что малый параметр ОТО при удержании плазмы равен $\frac{E_{e.m.}}{m_e c^2} = 0.04 \div 0.2$. Для удержания плазмы значение этого коэффициента имеет значение $0.04 \div 0.2$, т.е. классическая электродинамика выполняется с точностью $4 \div 20\%$.

Уравнение общей теории относительности имеет вид (см.[1])

$$R_i^k = \frac{8\pi\gamma}{c^4}(T_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k T), \tag{1.3}$$

где R_i^k получен из тензора Риччи, обозначаемого R_{ik} – свернутого тензора кривизны пространства, T_i^k тензор энергии-импульса единицы объема тела, величина γ это гравитационная постоянная, c скорость света.

Но уравнение общей теории относительности не содержит зарядов частиц, и, следовательно, не описывают электромагнитные взаимодействия. Необходим множитель в правой части уравнения общей теории относительности, позволяющий ввести в уравнение электромагнитные заряды и стремящийся к единице, при нулевом заряде или при большой массе.

Гравитационную массу покоя представим, как $\sqrt{\gamma} m$ и введем дополнительный множитель в правую часть уравнения ОТО

$$(1 + \frac{iq_1}{m_1\sqrt{\gamma}})(1 + \frac{iq_2}{m_2\sqrt{\gamma}}) = (1 + \frac{iq_1}{m_1\sqrt{\gamma}} + \frac{iq_2}{m_2\sqrt{\gamma}} - \frac{q_1 q_2}{m_1 m_2 \gamma}), \tag{1.4}$$

учитывающий электромагнитный заряд частиц разного знака

$$R_i^k = \frac{8\pi\gamma}{c^4}(1 + \frac{iq_1}{m_1\sqrt{\gamma}})(1 + \frac{iq_2}{m_2\sqrt{\gamma}})(T_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k T). \tag{1.5}$$

При величине массы, удовлетворяющей условию $m \to \infty$, получим стандартное детерминированное уравнение общей теории относительности. Причем гравитационный радиус

$$r_g = 2\gamma m_2 / c^2 - 2q_1 q_2 /(m_1 c^2) + 2iq_1 m_2 \sqrt{\gamma} / m_1 c^2 + 2iq_2 \sqrt{\gamma} / c^2 \qquad (1.6)$$

для малых частиц имеет размер, соответствующий размерам квантовой механики. При этом, если имеем взаимодействие частицы и античастицы, то гравитационный радиус равен $r_g = 2\gamma m / c^2 + 2e^2 /(mc^2)$. В случае взаимодействия двух электронов гравитационный радиус комплексный и равен $r_g = 2\gamma m / c^2 - 2e^2 /(mc^2) + 4ie\sqrt{\gamma} / c^2$. При этом физический смысл имеет модуль гравитационного радиуса. Для описания микромира необходимо при использовании метрического тензора, чтобы он имел характерный размер, соответствующий размерам элементарных частиц. Процесс излучения электромагнитной энергии связан с имеющим малые размеры электроном.

Но возникает проблема описания электромагнитного поля, спин фотона которого равен 1, а спин гравитационного поля равен 2. Но введение мнимого потенциала снимает эту проблему. Действие электромагнитного поля на диполь составленный из частицы – античастицы проявляет себя как электромагнитное поле со спином 2. При повороте диполя на π надо добавить комплексное сопряжение, так как такой поворот соответствует зарядовому сопряжению диполя. Значит, мнимая величина заряда умножается на минус единицу и получается эквивалентное состояние, значит, спин электромагнитного поля для частицы и античастицы равен двум, так как поворот на π приводит к эквивалентному состоянию. Значит, электромагнитное поле при взаимодействии частицы и античастицы описывается уравнение ОТО. При этом гравитационный радиус считается по формуле $r_g = \frac{2\gamma m}{c^2} + \frac{e^2}{mc^2}$, т.е. получаем одинаковую структуру электромагнитного и гравитационного поля. При взаимодействии произвольных частиц изменяется структура гравитационного радиуса см. формулу (1.6), так как спин гравитационного и электромагнитного поля разный.

Но дело в том, что классическое описание поля применимо для описания движения электрона в поле ядра, несмотря на то, что излученное атомом энергия поля квантуется и «радиус» орбиты электрона дискретен. Аналогично нелинейное классическое описание поля можно использовать до образования электрон-позитронных пар. Для образования электрон-позитронных пар необходимо столкновение двух фотонов, учитывая, что энергия частиц, а значит, и их поле может квантоваться. Но, как и энергия электрона в атоме, энергия частиц в электромагнитном поле может квантоваться, квантуя и электромагнитное поле. Так энергия электронов в поле ядра равна $E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$, причем средняя величина обратного радиуса равна $< \frac{1}{r} >= \frac{me^2}{\hbar^2 n^2}$, т.е. электромагнитная энергия квантуется. Т.е. при описании электрона первоначально теоретически подсчитанная энергия электромагнитного поля непрерывна, а после решения уравнения Шредингера или Дирака, так как средние координаты становятся дискретными при усреднении, энергия электромагнитного поля при усреднении квантуется и становится дискретной. Аналогичный процесс происходит при рождении электрон-позитронных пар.

Построим, метрический тензор общей теории относительности по функции Лагранжа в случае электромагнитного и гравитационного поля. При этом меняется идеология уравнения ОТО. Если уравнения ОТО определяют гравитационное поле и движение среды, то в данном случае рассматривается только значение 10 компонент метрического тензора g_{ik}, при 10 независимых уравнений ОТО. Причем на метрические тензоры наложены четыре условия $\frac{D(R_i^k - \delta_i^k R/2)}{\partial x^k} = \frac{DT_i^k}{\partial x^k} 0$. При этом независимым образом определяется движение макротел, описываемых с помощью равенства нулю ковариантной производной от четырехмерной скорости частиц. При этом для слабого электромагнитного поля для макро частиц определится сила Лоренца, а при сильном электромагнитном поле надо использовать его описание с помощью модифицированной ОТО.

Функция Лагранжа частицы в электромагнитном и гравитационном поле при малых поправках к тензору метрики Галилея, равна

$$L = -mc^2\sqrt{1 - V^2/c^2} - q_1 A_i V^i / c - mU\,, \qquad (1.7)$$

где четырехмерная скорость при малой скорости движения тела равна $V^i / c = (1, V^\alpha / c), \alpha = 1,...,3; i = 0,...,3$. Вводя вместо заряда e комплексный заряд $iq_1 + m\sqrt{\gamma}$, где гравитационный потенциал U входит в потенциал A_0.

Имеем соотношение

$$S = -mc\int ds = \int Ldt\,, \qquad (1.8)$$

Величина A_i определена с точность до градиента функции $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla\alpha, \varphi = \varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ при калибровке Лоренца. Но при подстановке в (1.8) получаем соотношение

$$S = \int Ldt - e\int d\alpha / c = \int Ldt - e\alpha / c\,. \qquad (1.9)$$

Получаем, что величина α включается в действие частицы, т.е. величина четырехмерного потенциала определяется однозначно за вычетом градиента функции при малых энергиях, когда уравнение ОТО сводятся к волновым уравнениям. Т.е. надо определить векторный и скалярный потенциал. Вектор $\mathbf{A}$ содержит $\nabla\alpha$, а скаляр φ содержит $-\frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t}$, причем скаляр α удовлетворяет волновому уравнению в силу условия калибровки Лоренца.

Т.е. скаляр равен функции, удовлетворяющей волновому уравнению

$$\alpha(x_0,..,x_3) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx_0)[a_{nm}H^{(1)}_{n+1/2}(kr) + b_{nm}H^{(2)}_{n+1/2}(kr)]\times$$
$$\times Y_{nm}(\theta,\varphi)/\sqrt{kr}\,dk \qquad (1.10)$$

вне тела и внутри тела равен

$$\alpha(x_0,..,x_3)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}a_{nm}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ikx_0)J_{n+1/2}(kr\sqrt{\varepsilon})Y_{nm}(\theta,\varphi)/\sqrt{kr}dk.$$

Известный вектор $\mathbf{A}$, определенный по однозначному значению метрического тензора, можно представить в виде соленоидальной и градиентной составляющей. Взяв операцию, дивергенция от этого вектора, выделим градиентную составляющую, получим равенство, справедливое внутри тела

$$\nabla\mathbf{A}=\Delta\alpha(x_0,..,x_3)=$$

$$=\Delta\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}a_{nm}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ikx_0-k^2/\sigma^2)J_{n+1/2}(kr\sqrt{\varepsilon})Y_{nm}(\theta,\varphi)/\sqrt{kr}dk= \quad (1.11)$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}a_{nm}\int_{-\infty}^{\infty}k^2\exp(ikx_0-k^2/\sigma^2)J_{n+1/2}(kr\sqrt{\varepsilon})Y_{nm}(\theta,\varphi)/\sqrt{kr}dk$$

При этом произведена регуляризация этого интеграла. Откуда можно определить коэффициенты a_{nm}, и значит определить градиентную составляющую вектора. Значит, можно выделить соленоидальную часть векторного потенциала, для которой и справедливо уравнение ОТО.

Причем справедлива формула

$$ds=[\sqrt{1-V^2/c^2}+(iq_1+m_1\sqrt{\gamma})A_iV^i/(m_1c^3)]cdt. \quad (1.12)$$

Мнимый электрический заряд является естественным обобщением формулы (1.4), так как его использование в сочетании с формулой (1.4), приводит к волновому уравнению с мнимым зарядом в правой части, которое следует из уравнения общей теории относительности.

Введение мнимого заряда позволяет единым образом описать отталкивание зарядов одного знака и притяжение гравитационных масс. Кроме того, заряды и массы подчиняются одинаковым волновым уравнениям. Значение элементарного заряда e гораздо больше массы элементарных частиц $m\sqrt{\gamma}$, и, поэтому, элементарные частицы излучают только электромагнитную энергию, а излученная гравитационная энергия пренебрежимо мала. Поэтому считается, что в волновом уравнении временной член для уравнения относительно гравитационного поля равен нулю.

При этом метрический тензор в микромире при сильном электромагнитном поле является изрезанным, что придает новый физический смысл геометрической структуре микромира. Геометрический смысл имеет метрический тензор, построенный с помощью этой формулы.

При этом метрический интервал равен

$$ds^2 = [\sqrt{1-V^2/c^2} + \frac{Q_\alpha V^\alpha}{m_1 c^3}][\sqrt{1-V^2/c^2} + \frac{Q_\beta^* V^\beta}{m_1 c^3}]c^2 dt^2 .(1.13)$$

Где метрический тензор определен с точностью второго порядка малости. Величина Q_α определяется по формуле $Q_\alpha = (iq_1 + m_1\sqrt{\gamma})A_\alpha$, причем имеем $Q_0 = (iq_1 + m_1\sqrt{\gamma})A_0$, где в последней формуле используется гравитационный и электрический потенциал.

Откуда получаем для значения метрического тензора

$$g_{00} = 1 - \frac{V^2}{c^2} + \sqrt{1-V^2/c^2}\,\frac{2Q_0}{m_1 c^2} + \frac{Q_0}{m_1 c^2}\frac{Q_0^*}{m_1 c^2}$$

$$g_{\alpha 0} = g_{0\alpha}^* = \sqrt{1-V^2/c^2}\,\frac{Q_\alpha}{m_1 c^2} \qquad (1.14)$$

$$g_{\alpha\beta} = \frac{Q_\alpha}{m_1 c^2}\frac{Q_\beta^*}{m_1 c^2}, \alpha \neq \beta$$

$$g_{\alpha\alpha} = 1 - \frac{V^2}{c^2} + 2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,\frac{\sum_{\gamma=0}^{3} \operatorname{Re} Q_\gamma V^\gamma}{m_1 c^3} + \frac{Q_\alpha}{m_1 c^2}\frac{Q_\alpha^*}{m_1 c^2} \qquad (1.15)$$

При этом получатся следующие функции, определяющие значения полей

$$B_\alpha = M_{\alpha 0} = \frac{Q_\alpha}{m_1 c^2}$$

$$B_0 = M_{00} = 1 - \frac{V^2}{c^2} + 2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,\frac{\operatorname{Re} Q_0}{m_1 c^2} + \frac{Q_0}{m_1 c^2}\frac{Q_0^*}{m_1 c^2} \quad , \qquad (1.16)$$

$$M_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}[1 - \frac{V^2}{c^2} + 2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}]\frac{\sum_{\gamma=0}^{3} \operatorname{Re} Q_\gamma V^\gamma}{m_1 c^3} + \frac{Q_\alpha}{m_1 c^2}\frac{Q_\beta^*}{m_1 c^2}$$

Поправка к тензору пространства Галилея имеет второй порядок малости у пространственной части метрического тензора. При этом для вспомогательного тензора энергии-импульса для материальных тел имеем $P_{ik} = \mu c^2 u_i u_k \frac{ds}{cdt}$, μ плотность массы тела. Выберем плотность тела в собственной системе координат, тогда имеем $P_{ik} = \mu_o c^2 u_i u_k$, где μ_o плотность тела в собственной системе координат.

откуда $T_{00} = \mu_o c^2 u_0 u_0$, $T_{0\alpha} = P_{0\alpha}/2 = \frac{\mu_o c^2 u_\alpha u_0}{2}$. Деление на 2 величины $P_{0\alpha}$ основано на равенстве $P_{ik} = T_{ik} + T_{ki}, i \neq k$. При этом необходимо ввести тензор заряда, по аналогии с тензором энергии-импульса массы $P_{ik} = \rho_o c^2 u_i u_k$, где величина ρ_o определяет плотность зарядов в собственной системе координат. Тогда имеем из уравнения общей теории относительности (1.1)

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{8\pi\gamma}{c^4}(1+\frac{iq_1}{m_1\sqrt{\gamma}})(1+\frac{iq_2}{m_2\sqrt{\gamma}})(T_{00} - T/2) \\ R_{0\alpha} &= \frac{8\pi\gamma}{c^4}(1+\frac{iq_1}{m_1\sqrt{\gamma}})(1+\frac{iq_2}{m_2\sqrt{\gamma}})T_{0\alpha} \end{aligned}, \qquad (1.17)$$

$$R_{\alpha\beta} = \frac{8\pi\gamma}{c^4}(1+\frac{iq_1}{m_1\sqrt{\gamma}})(1+\frac{iq_2}{m_2\sqrt{\gamma}})(T_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}T/2) \qquad (1.18)$$

При этом использовано $g_{00}T = g_{00}\mu_o c^2 u_i u^i = g_{00}\mu_o c^2, T_{00} = \mu_o c^2 (u_0)^2$.
Подставляя значение тензора энергии импульса, получим

$$\begin{aligned} R_{00} &= 8\pi(iq_1 + m_1\sqrt{\gamma})(iq_2 + m_2\sqrt{\gamma})[(u_0)^2 - g_{00}^{(0)}/2]\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)/(m_1 c^2) \\ R_{\alpha 0} &= 4\pi(iq_1 + m_1\sqrt{\gamma})(iq_2 + m_2\sqrt{\gamma})u_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)/(m_1 c^2) \\ R_{\alpha\beta} &= 4\pi(iq_1 + m_1\sqrt{\gamma})(iq_2 + m_2\sqrt{\gamma})(u_\alpha u_\beta - g_{\alpha\beta}^{(0)}/2)\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)/(m_1 c^2) \end{aligned} . \qquad (1.19)$$

При малой поправки к тензору Галилея, имеем следующее уравнение по определению этой поправки и так как выполняется

$$R_{ik} = \frac{1}{2}[\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}]h_{ik}, \qquad (1.20)$$

где h_{ik} малая поправка к тензору метрического пространства Галилея, получим $R_{00} = (\Delta B_0 - 1/c^2 \partial^2 B_0/\partial t^2)/2$. Имеем уравнение для тензора $R_{\alpha 0} = 2(\Delta B_\alpha - 1/c^2 \partial^2 B_\alpha/\partial t^2)/2$, $R_{\alpha\beta} = 2(\Delta M_{\alpha\beta} - 1/c^2 \partial^2 M_{\alpha\beta}/\partial t^2)/2$. Двойка появилась, так как имеется две компоненты $(g_{\beta\alpha} + g_{\alpha\beta})dx^\alpha dx^\beta$ в метрическом интервале ds^2. Для чисто пространственного индекса в правую часть волнового уравнения войдут члены с производной от метрического тензора, которые являются величинами второго порядка малости.

Т.е. имеем волновые уравнения

$$[\Delta_a M_{\alpha\beta} - \frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial x^{0^2}}] = 2\pi(u_\alpha u_\beta - g^{(0)}_{\alpha\beta}/2)\delta[(\vec{r} - \vec{r}_0)/r_g]$$

$$\begin{gathered}[\Delta_a B_\alpha - \frac{\partial^2 B_\alpha}{\partial x^{0^2}}] = 2\pi u_\alpha u_0 \delta[(\vec{r} - \vec{r}_0)/r_g] = \\ = 2\pi u_\alpha[1 - O(V^2/c^2)]\delta[(\vec{r} - \vec{r}_0)/r_g] \qquad .(1.21) \\ [\Delta_a B_0 - \frac{\partial^2 B_0}{\partial x^{0^2}}] = 8\pi[(u_0)^2 - 1/2]\delta[(\vec{r} - \vec{r}_0)/r_g] = \\ = 4\pi[1 - O(V^2/c^2)]\delta[(\vec{r} - \vec{r}_0)/r_g]\end{gathered}$$

Где дельта функция берется в собственной системе координат. Второе и третье уравнение эквивалентны уравнениям Максвелла при малых скоростях движения зарядов.

Где величина $r_g = 2\gamma m_2/c^2 - 2q_1 q_2/(m_1 c^2) + 2iq_1 m_2\sqrt{\gamma}/m_1 c^2 + 2iq_2\sqrt{\gamma}/c^2$.

Получим волновое уравнение с поправками второго порядка относительно безразмерной величины первого порядка $P_s = M_{s0} = \frac{Q_s}{mc^2}, P_0 = M_{00} = \frac{2Q_0}{mc^2}$ и безразмерной величины второго порядка $M_{\alpha\beta}$. Запишем уравнение ОТО с точностью до третьего порядка малости

$$\begin{gathered}\Delta_a M_{sm} - \frac{\partial^2 M_{sm}}{\partial x^{0^2}} + \lambda^{\delta\mu l}_{sm}\frac{\partial M_{\delta\mu}}{\partial x^l} + \gamma^{ikl}_{sm} M_{i0}\frac{\partial M_{k0}}{\partial x^l} + \delta^{iknl}_{sm}\frac{\partial M_{i0}}{\partial x^n}\frac{\partial M_{k0}}{\partial x^l} = \\ = 4\pi(T_{sm} - g_{sm}T/2)\end{gathered} \quad . (1.22)$$

При этом при больших энергиях не будет выполняться условие $M_{\alpha\beta} = P_\alpha P_\beta$, а это будет независимая величина (уравнение выведено при малых поправках к метрическому тензору пространства Галилея).

При этом векторный потенциал удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathrm{A}_k - \frac{\partial^2 \mathrm{A}_k}{c^2 \partial t^2} = 4\pi (iq_2 + m_2\sqrt{\gamma}) u_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \qquad (1.23)$$

1.2. **Получение из уравнения движения силу Лоренца**

При этом дополнительное уравнение движения материального тела следует из уравнений

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{lk} \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \qquad (2.1)$$

где сила Лоренца входит в формулу для символа Кристоффеля Γ^i_{lk} в уравнении (2.1) при малой скорости движения. При этом, так как эта сила получена с помощью метрического тензора, она описывает силу Лоренца. Докажем, что в нерелятивистском случае формула (2.1) определяет силу, являющуюся электромагнитной и гравитационной. Т.е. силу, определяемую напряженностью магнитного и электрического поля, плюс сила гравитационного потенциала. Символ Кристоффеля $\Gamma_{i,kl}$ симметричен по индексам k, l, значит, комплексный символ Кристоффеля будет эрмитов по этим индексам, и как докажем далее, равен

$$\Gamma_{i,kl} = \Gamma^*_{i,lk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g^*_{kl}}{\partial x^i}\right), \qquad (2.2)$$

Вычислим символ Кристоффеля для комплексного метрического тензора

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl}, \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{l,ik}, -\frac{\partial g^*_{kl}}{\partial x^i} = -\Gamma^*_{l,ki} - \Gamma^*_{k,li} = -\Gamma_{l,ik} - \Gamma_{k,il} \quad (2.3)$$

Складывая эти равенства, получим (2.2).

При значении метрического тензора близком к метрическому тензору пространства Галилея, получим линейную часть силы

$$-F_{il}/mc^2=\Gamma_{i,0k}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^k}{ds}+\Gamma_{i,k0}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^k}{ds}+\Gamma_{i,00}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^0}{ds}, i=1,...,3, \quad (2.4)$$

где для величины $\Gamma_{i,0k},\Gamma_{i,k0}$ получим следующее выражение

$$\begin{aligned}\Gamma_{i,0k}&=\frac{1}{2}\frac{iq_1+m_1\sqrt{\gamma}}{c^2m_1}\frac{\partial A_i}{\partial x^k}-\frac{1}{2}\frac{-iq_1+m_1\sqrt{\gamma}}{c^2m_1}\frac{\partial A_k^*}{\partial x^i},k\neq 0\\ \Gamma_{i,k0}=\Gamma_{i,0k}^*&=\frac{1}{2}\frac{-iq_1+m_1\sqrt{\gamma}}{c^2m_1}\frac{\partial A_i^*}{\partial x^k}-\frac{1}{2}\frac{iq_1+m_1\sqrt{\gamma}}{c^2m_1}\frac{\partial A_k}{\partial x^i},k\neq 0\end{aligned}, \quad (2.5)$$

$$\Gamma_{i,00}=(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^0}+\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0}-\frac{\partial g_{00}^*}{\partial x^i})/2, i\neq 0$$

где величина A_l является четырехмерным электродинамическим потенциалом. Получаем силу Лоренца, равную

$$\begin{aligned}-F_{il}/m_1c^2=&[\frac{iq_1+m_1\sqrt{\gamma}}{c^2m_1}\frac{\partial A_i}{\partial x^k}-\frac{-iq_1+m_1\sqrt{\gamma}}{c^2m_1}\frac{\partial A_k^*}{\partial x^i}+\frac{-iq_1+m_1\sqrt{\gamma}}{c^2m_1}\frac{\partial A_i^*}{\partial x^k}-\\ &-\frac{iq_1+m_1\sqrt{\gamma}}{c^2m_1}\frac{\partial A_k}{\partial x^i}]\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^k}{ds}/2+(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^0}+\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i})/2\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^0}{ds}= \quad (2.6)\\ =&[\frac{-q_1}{c^2m_1}(\frac{\partial \operatorname{Im}A_i}{\partial x^k}-\frac{\partial \operatorname{Im}A_k}{\partial x^i})+\frac{m_1\sqrt{\gamma}}{c^2m_1}(\frac{\partial \operatorname{Re}A_i}{\partial x^k}+\frac{\partial \operatorname{Re}A_k}{\partial x^i})]\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^k}{ds}+\\ &+(\frac{iq_1+m_1\sqrt{\gamma}}{c^2m_1}\frac{\partial A_i}{\partial x^0}-\frac{-iq_1+m_1\sqrt{\gamma}}{c^2m_1}\frac{\partial A_0^*}{\partial x^i})\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^0}{ds}, i=1,...,3,\end{aligned}$$

т.е. никакого дополнительного члена в уравнение движения (2.1), учитывающего влияния электромагнитного поля, вводить не надо. Кроме того, описывается и гравитационная сила, входящая в потенциал A_0. Сила F_{iq}, ответственная за действие массы мала для элементарных частиц $F_{iq}=m_1\sqrt{\gamma}(\frac{\partial \operatorname{Re}A_i}{\partial x^k}+\frac{\partial \operatorname{Re}A_k}{\partial x^i})]\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^k}{ds}$ и ей можно пренебречь, для описания удержания плазмы.

Интерес представляет статический член, который равен в линейном приближении, так как скорость тела равна нулю

$$-F_i=(iq_1+m_1\sqrt{\gamma})\frac{\partial A_i}{\partial x^0}-(-iq_1+m_1\sqrt{\gamma})\frac{\partial A_0^*}{\partial x^i})=-(-iq_1+m_1\sqrt{\gamma})(-iq_2+m_2\sqrt{\gamma})\times$$

$$\times\frac{\partial 1/[R-\frac{(\mathbf{R},\mathbf{V})}{c}]}{\partial x^i})=[-q_1q_2+m_1m_2\gamma-i\sqrt{\gamma}(q_1m_2+q_2m_1)]\frac{x_i/R-V_i/2c}{[R-\frac{(\mathbf{R},\mathbf{V})}{c}]^2}.$$

Т.е. возможна компенсация действительной части гравитационного поля с помощью электромагнитного поля. Но при этом появится мнимая колеблющаяся дополнительная сила.

1.3 Уравнение ОТО для N тел

Аннотация

Уравнение ОТО описывает одно тело и определяет метрический тензор, зависящий от координат, связанных с этим телом. При этом должно быть соответствие между количеством неизвестных функций и количеством аргументов. Причем как будет доказано в статье, количество аргументов может быть меньше чем количество неизвестных функций, но не больше, т.е. нельзя использовать компоненты одного метрического тензора, зависящего от 4N переменных. При использовании одного метрического тензора невозможно определить импульс каждого тела, а можно определить импульс всех тел. Предлагается система уравнений ОТО описывающая N тел, каждое со своим метрическим тензором, зависящим от 4N координат, связанных с этими N телами. Суммарная сила, действующая на каждое тело, разная в уравнении движения тела, так же как и метрический тензор, входящий в символ Кристоффеля, описывает воздействие на тело в уравнении движения. Существует 6 компонент метрического тензора, воздействующих на данное тело, на другое тело воздействует другие 6 компонент. На все тела воздействует 6N компонент метрического тензора. Но как же описать метрический тензор двигающихся тел, зависящий от 4N координат. Для этого необходимо учесть зависимость координат от метрического интервала. Так

же как вектор-потенциал электромагнитного поля зависит от инварианта $R_l u^l$, *где* R_l *четырех вектор координат, а* u^l *четырех вектор скорости, причем учитываются все запаздывания в разных системах координат, так и зависимость от метрического интервала учтет все запаздывания. Причем в результате решения уравнения движения, определится зависимость метрического интервала от радиус вектора и скорости тел. При этом пространство, в котором движутся N тел, имеет размерность 4N. Поле характеризуется псевдотензором энергии-импульса, и построенными на его основе энергией, импульсом и моментом импульса для каждого тела и его поля, заданного метрическим тензором каждого тела. При этом можно определить суммарный псевдотензор энергии-импульса, и нельзя определить один метрический тензор, общий для всех тел. Каждое тело в отдельности характеризует свой метрический тензор. Метрические тензоры или символы Кристоффеля характеризуют суммарное воздействие, действующее на одно тело, со стороны других тел в уравнении движения каждого тела.*

Будем обозначать номер тела индексами α, β, пространственные и временные координаты индексами i, k, l, n.

Для каждой из совокупности двигающихся частиц тензор энергии-импульса равен $T_{ik\alpha} = m_\alpha \delta[\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\alpha^0(s)] u_{i\alpha} u_{k\alpha} \frac{ds_\alpha}{\sqrt{-g_\alpha} dt}$. Причем этот тензор энергии-импульса и будем исследовать. Этот случай описывает гравитационное поле, созданное взаимодействием N тел, и вместе с уравнением движения описывает систему N тел.

Метрический интервал запишется в виде

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} ds_\alpha^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i,k=0}^{3} g_{ik\alpha} dx_\alpha^i dx_\alpha^k.$$

Т.е. квадраты метрических интервалов каждого тела складываются.

При этом тензор Риччи каждого тела равен

$$R_{ik\alpha}=\frac{\partial\Gamma^l_{ik\alpha}}{\partial x^l_\alpha}-\frac{\partial\Gamma^l_{il\alpha}}{\partial x^k_\alpha}+\Gamma^l_{ik\alpha}\Gamma^m_{lm\alpha}-\Gamma^m_{il\alpha}\Gamma^l_{km\alpha}$$

Где величина символа Кристоффеля равна

$$\Gamma^i_{kl\alpha}=\frac{g^{im}_\alpha}{2}\left(\frac{\partial g_{mk\alpha}}{\partial x^l_\alpha}+\frac{\partial g_{ml\alpha}}{\partial x^k_\alpha}-\frac{\partial g_{kl\alpha}}{\partial x^m_\alpha}\right)$$

Тогда уравнение ОТО запишется в виде

$$R_{ik\alpha}-R_\alpha g_{ik\alpha}/2=\frac{8\pi k}{c^4}T_{ik\alpha}$$

Где величины тензоров и символа Кристоффеля зависят от всех координат.

Где для тел имеем выражение для тензора энергии-импульса материи

$$T^{ik}_\alpha=m_\alpha\delta[\mathbf{x}_\alpha-\mathbf{x}^0_\alpha(s)]u^i_\alpha u^k_\alpha\frac{ds_\alpha}{\sqrt{-g_\alpha}dt}=m_\alpha\delta(\mathbf{y}_\alpha)u^i_\alpha u^k_\alpha\frac{ds_\alpha}{\sqrt{-g_\alpha}dt}$$

Уравнение движения α тела или частицы запишется в виде

$$\frac{du^i_\alpha}{ds}=-\sum_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{N}\Gamma^i_{pq\beta}u^p_\alpha u^q_\beta,u^i_\alpha=\frac{dx^i_\alpha}{ds} \qquad (1.3.1)$$

Координаты x^l_α соответствуют координатам свободного пространства, в котором находится тело α. При этом символ Кристоффеля $\Gamma_{lpq\beta}$ зависит от координат $x^l_\gamma, l=0,...,3;\gamma=1,...,N$, определяющих «силу», действующую на тело α. От этих же аргументов зависит правая часть выражения для суммарной силы в задаче многих тел.

В случае наличия нескольких приращений $dx^q_\alpha,\alpha=1,...,N$, имеем формулы для приращений $\delta u^i=-\sum_{\alpha=1}^{N}\Gamma^i_{pq\alpha}u^p dx^q_\alpha$, $du^i=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial u^i}{\partial x^q_\alpha}dx^q_\alpha$. Так как, имеем $Du^i=du^i-\delta u^i$, значит формула для нескольких приращений выглядит таким образом

$$Du^i=\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^q_\alpha}+\Gamma^i_{pq\alpha}u^p\right)dx^q_\alpha=du^i+\sum_{\alpha=1}^{N}\Gamma^i_{pq\alpha}u^p dx^q_\alpha$$

Или уравнение движения запишется в виде

$$\frac{du^i}{ds} + \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma^i_{pq\alpha} u^p \frac{dx^q_\alpha}{ds} = 0 .$$

Где уравнение записано для β тела, со скоростью равной $u^p = \frac{dx^p_\beta}{ds_\beta}$. При этом суммарный импульс тела не сохраняется, так как необходимо учитывать импульс поля.

Вывод уравнений для символа Кристоффеля, для тензора кривизны, уравнения ОТО одного из множества тел ничем не отличается от вывода уравнения для одного тела, приведенный в [1]. Только дифференцировать надо по координатам α тела, как у тензора кривизны $R_{iknm\alpha}$, у тензора Риччи и у определения символа Кристоффеля и у метрического тензора имеется зависимость от координат всех N тел. Величина тензора кривизны для α тела равна

$$R_{iklm\alpha} = \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 g_{im\alpha}}{\partial x^k_\alpha \partial x^l_\alpha} + \frac{\partial^2 g_{kl\alpha}}{\partial x^i_\alpha \partial x^m_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{il\alpha}}{\partial x^k_\alpha \partial x^m_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{il\alpha}}{\partial x^i_\alpha \partial x^m_\alpha}] +$$
$$+ g_{mp\alpha}(\Gamma^n_{kl\alpha}\Gamma^p_{im\alpha} - \Gamma^n_{km\alpha}\Gamma^p_{il\alpha})$$

Причем он обладает теми же свойствами при перестановке индексов $iklm$, что и тензор кривизны для одного тела.

При этом получим $4N$ координат, описывающих $6N$ независимых метрических тензоров

Вычислим для начала метрический тензор, для неподвижной системы тел. Метрический интервал для решения уравнение ОТО для взаимодействия α и β тела, при этом определен метрический интервал каждого тела, который имеет вид

$$ds_{\alpha\beta}^2 = \exp(\nu_\alpha)c^2 dt_{\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\beta}^2[d\theta_{\alpha\beta}^2 + \sin^2\theta_{\alpha\beta} d\varphi_{\alpha\beta}^2] - \exp(\lambda_\alpha) dR_{\alpha\beta}^2$$

$$ds_\alpha^2 = \sum_{\beta=1}^N ds_{\alpha\beta}^2 / N = \exp(\nu_\alpha)c^2 dt_\alpha^2 - R_\alpha^2[d\theta_\alpha^2 + \sin^2\theta_\alpha d\varphi_\alpha^2] - \exp(\lambda_\alpha) dR_\alpha^2$$

$$dt_\alpha^2 = \sum_{\beta=1}^N dt_{\alpha\beta}^2 / N, R_\alpha^2 = \sum_{\beta=1}^N R_{\alpha\beta}^2 / N, R_\alpha^2 d\theta_\alpha^2 = \sum_{\beta=1}^N R_{\alpha\beta}^2 d\theta_{\alpha\beta}^2 / N, \tag{1.3.2}$$

$$R_\alpha^2 \sin^2\theta_\alpha d\varphi_\alpha^2 = \sum_{\beta=1}^N R_{\alpha\beta}^2 \sin^2\theta_{\alpha\beta} d\varphi_{\alpha\beta}^2 / N$$

Где величина $\nu_\alpha = \sum_{\beta=1}^N \nu_{\alpha\beta}(R_{\alpha\beta}, t_\alpha)$, $\lambda_\alpha = \sum_{\beta=1}^N \lambda_{\alpha\beta}(R_{\alpha\beta}, t_\alpha)$. Величина

$$g_{00\alpha}^{sh} = g_{00\alpha\beta} = \exp(\nu_\alpha), g_{11\alpha}^{sh} = g_{11\alpha\beta} = -\exp(\lambda_\alpha), g_{22\alpha}^{sh} = -R_\alpha^2, g_{22\alpha\beta} = -R_{\alpha\beta}^2,$$

$$g_{33\alpha}^{sh} = -R_\alpha^2 \sin^2\theta_\alpha, g_{33\alpha\beta} = -R_{\alpha\beta}^2 \sin^2\theta_{\alpha\beta}. \tag{1.3.3}$$

Уравнение ОТО для α тела, нужно рассматривать относительно координаты центра инерции этого тела, равного $\mathbf{r}_\alpha$. При этом радиус другого тела равен $R_{\alpha\beta} = |\mathbf{r}_\beta - \mathbf{r}_\alpha|$. При этом уравнение ОТО для индексов α, β имеем $\alpha \neq \beta$.

При этом уравнения ОТО распадутся на уравнения координат каждого тела. Уравнения для α тела, относительно координат β тела при тензоре энергии импульса равном нулю (см.[1]) сведутся к уравнениям

$$\begin{gathered} \exp(-\lambda_\alpha)(\frac{\nu'_{\alpha\beta}}{R_{\alpha\beta}} + \frac{1}{R_{\alpha\beta}^2}) - \frac{1}{R_{\alpha\beta}^2} = 0 \\ \exp(-\lambda_\alpha)(\frac{\lambda'_{\alpha\beta}}{R_{\alpha\beta}} - \frac{1}{R_{\alpha\beta}^2}) + \frac{1}{R_{\alpha\beta}^2} = 0 \end{gathered} . \tag{1.3.4}$$

$$\dot{\lambda}_{\alpha\beta} = 0$$

Где штрих означает производную по радиусу $R_{\alpha\beta}$, а точка производную по времени. Складывая первое и второе уравнение (1.3.4) получим $\lambda'_{\alpha\beta} + \nu'_{\alpha\beta} = 0$, откуда имеем $\lambda_\alpha + \nu_\alpha = f_\alpha(t_\alpha)$, где в силу выбора формулы (1.3.2) имеется произвол в преобразовании времени, т.е. к величине ν_α можно добавить произвольную функцию времени, поэтому можно выбрать $f_\alpha(t_\alpha)$, равной нулю. Решая второе уравнение (1.3.2), получим

$$\exp(-\lambda_{\alpha\beta})c(R_{\alpha 1})c[R_{\alpha(\beta-1)}]c[R_{\alpha(\beta+1)}]...c(R_{\alpha N}) = 1 + \frac{const}{R_{\alpha\beta}}. \quad (1.3.5)$$

Постоянную можно выбрать из условия совпадения с законом тяготения Ньютона, используя формулу при малом потенциале $g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} = 1 - \frac{2\gamma m}{c^2 R}$.

Имеем формулу $c(R_{\alpha\beta}) = \frac{\exp(-\lambda_{\alpha\beta})}{1 - \frac{2\gamma m_\beta}{c^2 R_{\alpha\beta}}}$, которая следует из (1.3.4). При этом

имеем соотношение $\prod_{\beta=1}^{N} c(R_{\alpha\beta}) = 1$. Причем, используя выведенную формулу $\lambda_\alpha + \nu_\alpha = 0$, и определенное значение $c(R_{\alpha\beta})$, имеем

$$\exp(-\lambda_\alpha) = \exp(\nu_\alpha) = \prod_{\beta=1, \beta\neq\alpha}^{N} (1 - \frac{r_{g\beta}}{R_{\alpha\beta}}), r_{g\beta} = \frac{2e^2}{m_\beta c^2} + \frac{2\gamma m_\beta}{c^2}.$$

Откуда имеем формулы для метрического тензора для α тела $g_{00\alpha}$, который будет равен

$$g_{00\alpha}^{sh} = \prod_{\beta=1, \beta\neq\alpha}^{N} (1 - \frac{r_{g\beta}}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}). \quad (1.3.6)$$

При этом для величины $g_{rr\alpha}$ имеем

значение $g_{rr\alpha}^{sh} = -\frac{1}{\prod_{\beta=1, \beta\neq\alpha}^{N} (1 - \frac{r_{g\beta}}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|})}, r_{g\beta} = \frac{2e^2}{m_\beta c^2} + \frac{2\gamma m_\beta}{c^2}. \quad (1.3.7)$

$$g_{22\alpha} = -\sum_{\beta=1}^{N} R_{\alpha\beta}^2, g_{33\alpha} = -\sum_{\beta=1}^{N} R_{\alpha\beta}^2 \sin^2\theta_{\alpha\beta},$$

$$R_{\alpha\beta} = |\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|, \theta_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{(x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2}}{R_{\alpha\beta}}$$

Функция Лагранжа релятивистской задачи N тел для α тела имеет вид

$$L = \sum_{\alpha=1}^{N} L_\alpha = -\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha c^2 \sqrt{g_{ik\alpha} \frac{dx_\alpha^i}{cdt} \frac{dx_\alpha^k}{cdt}} =$$

$$=-\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha c^2 \sqrt{\prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{N}(1-\frac{r_{g\beta}}{R_{\alpha\beta}})-\frac{V_{\alpha r}^2/c^2}{\prod\limits_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{N}(1-\frac{r_{g\beta}}{R_{\alpha\beta}})}-\frac{V_{\alpha\theta}^2}{c^2}-\frac{V_{\alpha\varphi}^2}{c^2}\sin^2\theta_\alpha} =$$

$$=-\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha c^2 \sqrt{1-\prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{N}\frac{r_{g\beta}}{R_{\alpha\beta}}+\prod_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \beta,\gamma\neq\alpha}}^{N}\frac{r_{g\beta}}{R_{\alpha\beta}}\frac{r_{g\gamma}}{R_{\alpha\gamma}}-\frac{V_{\alpha r}^2}{c^2}\prod_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{N}\frac{r_{g\beta}}{R_{\alpha\beta}}-\frac{V_\alpha^2}{c^2}}$$

Разложение в первом порядке малости функции Лагранжа для 1 тела имеет вид

$$L_{1\alpha}=-m_\alpha c^2+\sum_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{N}\frac{\gamma m_\alpha m_\beta}{R_{\alpha\beta}}+\frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2}$$

Во втором порядке малости добавляются члены

$$L_{2\alpha}=-\sum_{\beta,\gamma=1,\beta,\gamma\neq\alpha}^{N}\frac{3\gamma^2 m_\alpha m_\beta}{2c^2 R_{\alpha\beta}}\frac{m_\gamma}{R_{\alpha\gamma}}+\frac{m_\alpha V_\alpha^4}{8c^2}+$$

$$+\sum_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{N}\frac{\gamma m_\alpha m_\beta}{2R_{\alpha\beta}}(\frac{3V_{\alpha r}^2}{c^2}+\frac{V_{\alpha\theta}^2}{c^2}+\frac{V_{\alpha\varphi}^2}{c^2}\sin^2\theta_\alpha)$$

При этом функция Лагранжа для всех тел не равна сумме функций Лагранжа для каждого тела. В самом деле, если сложить функции Лагранжа всех тел, то кинетическая энергия будет считаться в первом приближении правильно, но вычисленная потенциальная энергия равна удвоенному правильному значению.

Единый суммарный метрический тензор построить невозможно, так как тогда он должен зависеть от $4N$ координат, описывающих N тел. Каждое тело описывается 4 координатами. При этом пространство координат, описывающих метрический тензор, будет не полностью заполнено, так как имеется 10 уравнений $g_{ik}=g_{ik}(y_1^0,y_1^1,y_1^2,y_1^3,...,y_N^0,y_N^1,y_N^2,y_N^3)$ при $4N$ неизвестных $\mathbf{y}_\alpha=\mathbf{x}_\alpha-\mathbf{x}_\alpha^0(s),\alpha=1,...,N$, где вектор координаты четырехмерны. Решение этого уравнения определит множество 10 мерных подобластей в $4N$ мерном пространстве. Т.е. получится множество значений энергий, импульсов и моментов импульса, так как это множество 10 мерных областей имеет разный объем, причем соответствующий разным ветвям корней этого уравнения. Поэтому размерность координат, описывающих параметры задачи, может быть меньше размерности параметров задачи, но не больше.

Существует точка зрения, что можно построить один метрический тензор уравнения ОТО в зависимости от произвольной точки пространства времени для N тел. Но при этом он будет зависеть от $4N$ начальных условий координаты. Тогда метрическому тензору g_{lk} будет соответствовать $4N$ чисел, причем определить можно только 10 чисел, по значениям заданных метрических тензоров. Решение этого уравнения определит множество 10 мерных подобластей в $4N$ мерном пространстве. Причем необходимо определить импульс и момент импульса каждого тела. Если определять импульс и момент импульса α тела, по метрическому тензору, определяемому по координатам α тела, то не понятно, каковы значения других координат. Если вычислить метрический тензор в зависимости от метрического интервала и начальных условий, при заданном значении метрического интервала, то невозможно будет определить импульс и момент импульса каждого тела. Если бы пространство аргументов было бы 10 мерным, сохраняющийся импульс и момент импульса были бы однозначны. Причем каждой области соответствует свой сохраняющийся импульс и момент импульса. Т.е. заданному метрическому тензору соответствует множество импульсов и моментов импульса. Скорость тел определяется по другим уравнениям и определяет тензор энергии импульса материи.

Но как определить запаздывание вычисленных метрических тензоров, ведь они получены в случае статического состояния тел, а под действием силы взаимодействия они придут в движение.

Для этого необходимо определить метрический тензор с учетом запаздывания по формуле

$$g_{ll\alpha} = h_{l\alpha}(s) g_{ll\alpha}^{sh}(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_N). \qquad (1.3.8)$$

Где величина $\mathbf{x}_\alpha$ четырехмерная координата α тела, и используется решение Шварцшильда для N статических тел. Подставляя решение (1.3.8) в уравнение

ОТО, умножим на величину $g_{mm\alpha}^{sh}(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_N)$ и проинтегрируем по четырехмерным координатам. Кроме того, необходимо ввести функции координат для каждого тела в зависимости от метрического интервала и решить уравнение движения (1.3.1), при известных метрических тензорах (1.3.3), (1.3.6) и (1.3.7). Это определит движение каждого тела с учетом запаздывания и распределение метрического интервала в пространстве и во времени.

При этом производная от величины метрического интервала равна

$$\frac{\partial s}{\partial x_\beta^p} = \frac{\partial\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{N} g_{ik\alpha} dx_\alpha^i dx_\alpha^k}}{\partial x_\beta^p} = \frac{g_{ik\beta}(\delta_p^i dx_\beta^k + \delta_p^k dx_\beta^i) + \dfrac{\partial g_{ik\alpha}}{\partial x_\beta^p} dx_\alpha^i dx_\alpha^k}{2\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{N} g_{ik\alpha} dx_\alpha^i dx_\alpha^k}} =$$

$$= g_{pk\beta}\frac{dx_\beta^k}{ds} + \frac{\partial g_{ik\alpha}}{\partial x_\beta^p}\frac{dx_\alpha^k}{ds} dx_\alpha^i \qquad .$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x_\beta^p \partial x_\gamma^q} = \frac{\partial g_{pk\beta}}{\partial x_\gamma^q}\frac{dx_\beta^k}{ds} + \frac{\partial g_{qk\gamma}}{\partial x_\beta^p}\frac{dx_\gamma^k}{ds}$$

Получим систему нелинейную обыкновенных автономных дифференциальных уравнений относительно $h_{l\alpha}(s), \mathbf{x}_\alpha(s), \dfrac{d\mathbf{x}_\alpha(s)}{ds}$ относительно второй производной по метрическому тензору. Начальные условия этой задачи следующие, статическое поле тел, т.е. условие $h_{l\alpha}(0) = 1$, начальное положение и скорость тел произвольны. Решение этих уравнений описано в [12], причем в случае наличия комплексных координат положения равновесия, эти решения являются комплексными. Физический смысл комплексного решения см. [13].

В результате решения нелинейной системы дифференциальных уравнений ОТО, получим

$$\sum_{\alpha=1}^{N} h_{l\alpha}(s) g_{ll\alpha}^{sh}(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_N)[\frac{dx_\alpha^l(s)}{ds}]^2 = 1.$$

Из этого нелинейного уравнения определим величину s, как функцию $g^{sh}_{ll\alpha}(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_N)$ и получим не стационарный метрический тензор,

$$g_{ll\alpha} = h_{l\alpha}\{s[g^{sh}_{001}(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_N),...,g^{sh}_{33N}(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_N),\frac{dx^0_1}{ds},...,\frac{dx^3_N}{ds}]\}g_{ll\alpha}(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_N) \tag{1.3.9}$$

с двигающими телами.

В результате вычисления метрических тензоров, решение получится зависящим от всего внешнего по отношению к телам пространства, т.е. получается не локальное решение, а глобальное.

Но какой суммарный параметр можно определить для системы N тел. Оказывается это псевдотензор энергии-импульса, для каждого тела и для всех тел. Причем определится импульс и момент импульса каждого тела. Определяется псевдотензор энергии-импульса каждого тела, который суммируется, образуя суммарный псевдотензор энергии-импульса.

Выводы

Решение задачи по обобщению уравнений ОТО на множество тел показало, что существует $6N$ мерный метрический тензор ОТО для N тел. На каждое тело воздействуют свои компоненты метрического тензора ОТО, зависящие от координат всех N остальных тел, так же как и разную суммарную силу, действующую на одно тело в случае классической задачи N тел. При этом, как показано в статье, задачу определения движения каждого из N тел можно описать нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, где аргументом является значение метрического интервала. Вычислен метрический тензор каждого тела в случае его зависимости от модуля расстояния других тел до этого каждого тела.

1.4. Свойства метрического тензора пространства микромира

Автор в книге [9] доказывает, что квантовую механику нужно рассматривать в комплексном пространстве. Докажем, что это пространство имеет осциллирующий метрический тензор, как по пространству, так и по времени. Зависимость метрического тензора от векторного и скалярного потенциала электромагнитного поля приводит к осцилляциям свойства пространства микромира. Это приводит к вынужденным колебаниям заряженных частиц микромира в случае наличия других движущихся заряженных микрочастиц. Это описывается с помощью введения комплексного пространства, введения комптоновской частоты колебания частиц и комплексной диэлектрической и магнитной проницаемости вещества. Комплексное пространство означает колебания частиц вакуума, из которых состоят элементарные частицы. Причем элементарным частицам соответствует большая концентрация частиц вакуума см. [3], стр. 33, образующая большую плотность элементарных частиц. В вакууме плотность частиц вакуума ничтожна, а в элементарных частицах огромна.

Комплексная диэлектрическая и магнитная проницаемость описывает электромагнитные свойства каждого вещества. Причем действительная часть описывает дисперсию зарядов в веществе, а мнимая часть пропорциональна среднему времени между столкновениями частиц потока. Причем эта дисперсия частиц описывает усредненное электромагнитное поле макромира. А в микромире метрический тензор элементарных частиц колеблется по пространству и по времени.

За счет вращения частиц вакуума в поле реликтового излучения образуется спин элементарных частиц.

Для изучения спина элементарных частиц изучим остаточное поле вакуума. Остаточное поле вакуума определится из формулы

$$\frac{Q_0}{mc^2}\frac{Q_0^*}{mc^2}+\frac{2Q_0}{mc^2}+\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}-1=0\,.$$

Где величина массы частиц вакуума очень мала $m=8.4\cdot 10^{-55}g$ см. [1] стр.30. В силу равенства нулю мнимой части поля имеем квадратное уравнение, решая которое определим остаточное поле частиц вакуума

$$\frac{Q_0}{mc^2}=\frac{\mathrm{Re}(ie+m\sqrt{\gamma})A}{mc^2}=\frac{E}{mc^2}=-1\pm\sqrt{2-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,.$$

Т.е. имеем как отрицательную энергию связанного состояния, так и положительную энергию свободного состояния. Энергия свободного состояния равна $E=mV^2/2=kT$ и гораздо меньше энергии реликтового излучения.

В вакууме имеется остаточное электромагнитное поле, связанное с реликтовым излучением. При этом траектории частиц вакуума закручиваются. В случае движения частицы в постоянном магнитном поле имеем формулу для частоты вращения

$$\omega=\frac{qcH}{\mathrm{E}}=\frac{ecH}{\mathrm{E}}\sqrt{\frac{l}{r_r}}\,.$$

Где используется эффективный заряд частицы вакуума $q=e\sqrt{\frac{l}{r}}$. При этом радиус вращения определяется по формуле

$$r_r=\frac{\sqrt{V^2-V_{0t}^2}}{\omega}=\frac{\sqrt{V^2-V_{0t}^2}\,\mathrm{E}}{ecH}\sqrt{\frac{r_r}{l}}\,.$$

Причем скорость поступательного движения V_{0t} много меньше полной скорости частиц, с учетом скорости вращения. Полная скорость равна V. Скорость вращения электрона совпадает со скоростью вращения частиц вакуума в поле реликтового излучения. При этом введем величину $\alpha^2=\frac{(V^2-V_{0t}^2)}{c^2}=\frac{\omega^2 r_r^2}{\omega^2 r_\gamma^2}$, т.е. скорость вращения частиц вакуума меньше скорости света

$$r_r = \frac{(V^2 - V_{0t}^2)\mathrm{E}^2}{e^2c^2H^2l} = \frac{(V^2 - V_{0t}^2)m_\gamma^2c^2}{e^2H^2l(1-V^2/c^2)} =$$

$$= \frac{6\cdot\sqrt{2}\pi(V^2 - V_{0t}^2)c\rho_\gamma r_\gamma\hbar(r_\gamma/l_\gamma)^{1/3}}{e^2H^2(1-V^2/c^2)} = \quad (1.4.1)$$

$$= \frac{3\cdot\sqrt{2}c^3\alpha^2\rho_\gamma r_\gamma\hbar(r_\gamma/l_\gamma)^{1/3}}{4e^2\varepsilon} = \alpha r_\gamma$$

Откуда имеем

$$\alpha = \frac{\sqrt{V^2 - V_{0t}^2}}{c} = \frac{4e^2\varepsilon}{3\sqrt{2}c^3\rho_\gamma\hbar(r_\gamma/l_\gamma)^{1/3}} = 3.35\cdot10^{-17}.$$

Энергия гамма кванта реликтового излучения, равна величине $kT = 3.8\cdot10^{-16}\mathrm{erg}$ при температуре реликтового излучения $T = 2.73°K$ см. [4]. Плотность числа реликтовых фотонов составляет примерно 400 штук на кубический сантиметр см. [4]. При этом плотность энергии реликтового излучения равна энергии $\varepsilon = nkT = 1.5\cdot10^{-13}\mathrm{erg/cm}^3 = H^2/8\pi$.

Величина среднего радиуса вращения частиц вакуума $r_r = 3.35\cdot10^{-17}r_e$ много меньше радиуса электрона, равного $r_e = \dfrac{e^2}{m_ec^2} = 2.84\cdot10^{-13}cm$. При изменении энергии реликтового излучения, частота и радиус частиц со спином изменится, так как напряженность реликтового излучения определяет собственную скорость вращения частиц и их размер.

Остаточное электромагнитное поле определяется формулой $\dfrac{e\varphi}{m_\gamma c^2} \sim 1$, откуда имеем $e\varphi \sim m_\gamma c^2 = 8.4\cdot10^{-55}9\cdot10^{20} = 7.56\cdot10^{-34}erg$, масса частицы вакуума m_γ определяется по формулам (2.1.4) см. [3] стр.30. При средней энергии фотона реликтового излучения $kT = 3\cdot10^{-16}erg$. Т.е. энергия реликтового излучения может уменьшиться в $4\cdot10^{17}$ раз. Но это остаточное электромагнитное поле в вакууме, в атоме и в ядре атома остаточное электромагнитное поле больше, и близко к полю электрона. В самом деле $e\varphi = Nm_{\gamma}c^2 = m_e c^2$, где величина m_e это масса электрона. Это поле соответствует полю электрона на его поверхности. В ядре атома остаточное электромагнитное поле еще больше, и определяется массой протона.

При этом остаточное поле наряду со статической компонентой, содержит переменную во времени компоненту, но она усредняется по пространству. Но эта переменная компонента электромагнитного поля проявляется в частоте дискретного излучения электромагнитной волны атомом.

Изрезанность пространства атома велико, но еще больше изрезанность ядра атома. Остальные компоненты метрического тензора (кроме g_{00}) меняются во времени и в пространстве в связи с большими скоростями элементарных частиц и изрезанным значением векторного потенциала A_l. Причем частота колебаний электромагнитного поля, а значит и метрического тензора, вокруг частицы массы m равна $\omega = \frac{mc^2}{\hbar}$.

Не стационарность метрического тензора микромира приводит к отсутствию понятия траектории электрона. Причем образуют эту не стационарность частицы вакуума, определяющие электромагнитное поле см. [3], стр.37-39. А электромагнитное поле определяет метрический тензор ОТО см. раздел 1.1.

1.5 Аналогия между ОТО и СТО и ее следствия

Пользуясь аналогией между ОТО и СТО вычислим значение четырехмерной скорости, и на этой основе определим метрический тензор ОТО двигающегося тела. Построим новые координаты, зависящие от электромагнитного и гравитационного поля, для которых справедливо глобальное преобразование Лоренца. В этих координатах тело при наличии электромагнитного и гравитационного поля движется с постоянной скоростью. При этом траектория в декартовом пространстве является изрезанной, вследствие влияния изрезанного электромагнитного поля. В новых обобщенных однородных и изотропных координатах можно записывать линейные уравнения Максвелла, Дирака, Клейна-Гордона, как в свободном пространстве.

Определение метрического тензора сводится к уравнению, где метрический тензор зависит от гравитационного и электромагнитного поля (см. [5])

$$g_{nm}u^n u^m = g_{nm}\frac{p^n}{mc}\frac{p^m}{mc} = 1$$

$$g_{00}(p^0)^2 + 2\sum_{n=1}^{3} g_{n0}(a_k^n)^{-1}a_m^k p^m p^0 + \sum_{n,m=1}^{3} g_{nm}p^n p^m =$$

$$= \sum_{n=0}^{3} p_n p^n = m^2c^2 = g_{00}(p^0)^2 + \sum_{\beta=1}^{3} [g_{k0}(a_\beta^k)^{-1}]^2 (p^0)^2/\lambda_\beta - .(1.5.1)$$

$$-\sum_{\beta=1}^{3} [\sqrt{\lambda_\beta}a_k^\beta p^k + g_{k0}(a_\beta^k)^{-1} p^0/\sqrt{\lambda_\beta}]^2 = m^2c^2;$$

$$(g_{nm} - \lambda_\beta \delta_{nm})a_\beta^n = 0; | g_{nm} - \lambda_\beta \delta_{nm} | = 0$$

Где собственные числа $\lambda_\beta > 0$. В случае пространства Минковского $a_\beta^n = \delta_\beta^n, g_{k0} = 0, \lambda_\beta = 1, g_{00} = 1$. Причем справедливо

$$\frac{E^2}{c^2} = g_{00}(p^0)^2 + \sum_{\beta=1}^{3} [g_{k0}(a_\beta^k)^{-1}]^2 (p^0)^2/\lambda_\beta$$

$$P^\beta = \sum_{k=1}^{3} [\sqrt{\lambda_\beta}a_k^\beta p^k + g_{k0}(a_\beta^k)^{-1} p^0/\sqrt{\lambda_\beta}]$$

$$\frac{E^2}{c^2} = \sum_{\beta=1}^{3} (P^\beta)^2 + m^2c^2$$

Аналогом этой формулы в СТО является формула $\frac{E^2}{c^2} = \sum_{\beta=1}^{3} (p^k)^2 + m^2c^2$ см. [1].

Величина $(E/c, P^\beta)$ соответствует четырехмерному импульсу тела с учетом гравитационного и электромагнитного поля. При этом можно ввести четырехмерную обобщенную скорость, зависящую от электромагнитного и гравитационного поля $U^k/c = \dfrac{P^k/mc}{\sqrt{1+\sum\limits_{l=1}^{3}(P^l/mc)^2}}$, которая определяется с помощью формулы $P^\beta/mc = \dfrac{U^\beta/c}{\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{3}(U^k/c)^2}}$.

При этом в случае множества тел, квадрат метрического тензора складывается, и, имеем, $ds^2 = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} ds_\alpha^2 = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} g_{lk\alpha} dx_\alpha^l dx_\alpha^k$ см. [6] и импульс определяется по отдельности для каждого тела. Формулы связи координат и метрического тензора $dx^l = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} dx_\alpha^l, g_{lk} = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} g_{lk\alpha} \dfrac{dx_\alpha^l}{dx^l}\dfrac{dx_\alpha^k}{dx^k}$.

Причем импульсы отдельных тел складываются. В уравнении движения переменные разделяются, и их можно использовать в форме уравнений Гамильтона для каждого тела.

Но предварительно надо связать величины скоростей $V^l/c = dx^l/cdt$, полученных дифференцированием по собственному времени тела, с четырехмерными скоростями $u^l = dx^l/ds$ по формуле $V^l/c = u^l\alpha, l = 0,...,3, V^0 = c$, где необходимо определить коэффициент пропорциональности α. Причем это нужно сделать для каждой частицы или тела. Назовем скорость V^l/c четырехмерной собственной скоростью в собственной системе координат. Скорость u^l называется четырехмерной скоростью. Это скорость движения тела. Тогда имеем связь собственной скорости с четырехмерной скоростью, полученной, по аналогии с СТО, при этом будем записывать и формулы СТО для сравнения

$$u^n = \frac{V^n/c}{\sqrt{g_{00} + 2g_{k0}V^k/c + g_{kn}V^kV^n/c^2}}$$

$$u^n = \frac{V^n/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

Формулу можно преобразовать к виду, умножая скорость u^n, u^0 на метрический тензор и суммируя

$$\frac{2g_{k0}V^k/c + g_{kn}V^kV^n/c^2}{g_{00} + 2g_{k0}V^k/c + g_{kn}V^kV^n/c^2} = 2g_{k0}u^ku^0 + g_{kn}u^ku^n.$$

Преобразуем это уравнение, получив из равенства $\frac{a}{b} = \frac{c}{1}$ соотношение

$\frac{a}{b-a} = \frac{c}{1-c}$

$$\frac{2g_{k0}V^k/c + g_{kn}V^kV^n/c^2}{g_{00}} = \frac{2g_{k0}u^ku^0 + g_{kn}u^ku^n}{1 - 2g_{k0}u^ku^0 - g_{kn}u^ku^n}$$

Подставляя значение собственной скорости, выраженное через компоненту четырехмерной скорости, получим уравнение по определению α

$$\frac{2g_{k0}u^ku^0 + \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^ku^n}{g_{00}}\alpha^2 = \frac{2g_{k0}u^ku^0 + \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^ku^n}{1 - 2g_{k0}u^ku^0 - \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^ku^n}$$

Откуда находим

$$\alpha = \sqrt{\frac{g_{00}}{1 - 2g_{k0}u^ku^0 - \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^ku^n}}.$$

При условии $g_{k0} = 0$, получаем значение $\alpha = \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^ku^n}}$. При этом значение трехмерной собственной скорости равно $V^l/c = u^l\sqrt{\frac{g_{00}}{1 - 2g_{k0}u^ku^0 - \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^ku^n}}$, которая является аналогом формулы $V^l/c = \frac{u^l}{\sqrt{1 + \sum_{l=1}^{3} (u^l)^2}} < 1$. При значении $u^l = 1$, получаем значение скорости

$V^l/c=\sqrt{\dfrac{g_{00}}{1-2\sum\limits_{k=1}^{3}g_{k0}-\sum\limits_{k,n=1}^{3}g_{kn}}}$. В пространстве Минковского эта скорость равна $V^l/c=1/2$.

Как следует из формулы (1.5.1), подставляя формулу для импульса среды, получим четырехмерный импульс тела

$$\begin{aligned} P^0 &= H(x_i,V^i)/c = mc\sqrt{\frac{g_{00}+[g_{k0}(a^k_\beta)^{-1}/\sqrt{\lambda_\beta}]^2}{g_{00}+2g_{k0}V^k/c+g_{kn}V^kV^n/c^2}} \\ P^\beta &= mc\frac{\sqrt{\lambda_\beta}a^\beta_kV^k/c+g_{k0}(a^k_\beta)^{-1}/\sqrt{\lambda_\beta}}{\sqrt{g_{00}+2g_{k0}V^k/c+g_{kn}V^kV^n/c^2}} \end{aligned} \qquad (1.5.2)$$

Эти формулы аналогичны формулам СТО

$$P^0=\frac{mc}{\sqrt{1-V^2/c^2}},P^\beta=\frac{mV^\beta}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

И соответствуют импульсу движения тела с учетом электромагнитного и гравитационного поля.

Имеем функцию Гамильтониана $H^2_\alpha=(P^\beta_\alpha)^2c^2+m^2_\alpha c^4$, т.е. переменные для каждого α тела разделились. Уравнения движения запишутся в виде $\dfrac{dP^\beta}{d\tau}=0,\dfrac{dx^\beta}{d\tau}=-\dfrac{\partial H}{\partial P^\beta}=-\dfrac{P^\beta c}{\sqrt{P^2+m^2c^2}}$ для каждого тела со своим индексом, который не пишем. Где величина τ равна собственному времени частицы. Решение этой системы нелинейных уравнений $P^\beta=P^\beta_0$, $x^\beta=x^\beta_0-\dfrac{P^\beta_0c(\tau-\tau_0)}{\sqrt{\sum\limits_{\beta=1}^{3}(P^\beta_0)^2+m^2c^2}}$, где x^β_0 произвольная точка пространства. Причем в силу того, что имеем несколько взаимодействующих тел $P^\beta_0\neq0$. Откуда имеем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно скоростей $V^k(x_1,x_2,x_3)$

$$\frac{P_0^{\beta}}{mc}=\frac{\sqrt{\lambda_{\beta}}a_k^{\beta}V^k/c+g_{k0}(a_{\beta}^k)^{-1}/\sqrt{\lambda_{\beta}}}{\sqrt{g_{00}+2g_{k0}V^k/c+g_{kn}V^kV^n/c^2}}.$$

Откуда имеем для скорости в декартовых координатах

$$(\frac{P_0^{\beta}}{mc})^2[g_{00}+2g_{k0}V^k/c+g_{kn}V^kV^n/c^2]=$$
$$=\lambda_{\beta}a_k^{\beta}a_n^{\beta}V^kV^n/c^2-2a_k^{\beta}g_{n0}(a_{\beta}^n)^{-1}V^k/c+g_{k0}g_{n0}(a_{\beta}^k)^{-1}(a_{\beta}^n)^{-1}/\lambda_{\beta}$$

Приведем подобные члены

$$\begin{gathered}[\lambda_{\beta}a_k^{\beta}a_n^{\beta}-g_{kn}(\frac{P_0^{\beta}}{mc})^2]V^kV^n/c^2-\\ -2[a_k^{\beta}g_{n0}(a_{\beta}^n)^{-1}-(\frac{P_0^{\beta}}{mc})^2g_{k0}]V^k/c+\\ +g_{k0}g_{n0}(a_{\beta}^k)^{-1}(a_{\beta}^n)^{-1}/\lambda_{\beta}-(\frac{P_0^{\beta}}{mc})^2g_{00}=0\end{gathered}\qquad(1.5.3)$$

Откуда из системы трех нелинейных уравнений определяем величину трехмерной скорости тел $V^k(x^1,x^2,x^3),k=1,...,3,$ где имеем $x^{\beta}=x_0^{\beta}-\frac{P_0^{\beta}c(\tau-\tau_0)}{\sqrt{\sum_{\beta=1}^{3}(P_0^{\beta})^2+m^2c^2}}$, и значит, знаем из (1.5.2) распределение импульса и метрического тензора по пространству в любой момент времени. В случае диагонального метрического тензора имеем

$$\begin{gathered}[\lambda_{\beta}a_n^{\beta}a_n^{\beta}-g_{nn}(\frac{P_0^{\beta}}{mc})^2](V^n)^2/c^2=A_n^{\beta}(V^n)^2/c^2=(\frac{P_0^{\beta}}{mc})^2g_{00}\\ A_n^{\beta}=\lambda_{\beta}(a_n^{\beta})^2-g_{nn}(\frac{P_0^{\beta}}{mc})^2>0,g_{nn}<0\end{gathered}.\qquad(1.5.4)$$

Откуда имеем $V^k(x^1,x^2,x^3)/c=\sqrt{(A_{\beta}^k)^{-1}(\frac{P_0^{\beta}}{mc})^2g_{00}}$.

Причем величина $V^k(x^1,x^2,x^3)$ как решение квадратного уравнения (1.5.3) может оказаться комплексной. Если рассмотреть случай, одного единственного тела, для которого импульс $P_0^{\beta}=0$, то имеем стационарную скорость движения тела $V^k(x^1,x^2,x^3)/c = -(a_\beta^k)^{-1} g_{k0} (a_\beta^k)^{-1}/\lambda_\beta$ при неизменном метрическом тензоре. В случае диагонального метрического тензора и условия $P_0^\beta = 0$, скорость тела равна нулю $V^k = 0$.

В противоположном случае метрический тензор и величина собственной скорости смещается с постоянной скоростью $-\frac{P_0^\beta c}{\sqrt{\sum_{\beta=1}^{3} (P_0^\beta)^2 + m^2 c^2}}$. Движение тела с этой скоростью при нулевой массе тела соответствует скорости света при произвольном значении импульса $P_0^\beta = \hbar k^\beta$.

Введем координаты для α тела по формуле (индекс α не пишем) используя формулы

$$\begin{aligned} dy^\beta &= \sum_{k=1}^{3} \sqrt{\lambda_\beta} a_k^\beta dx^k \\ dy^0 &= \sqrt{g_{00}} dx^0 \end{aligned} . \qquad (1.5.5)$$

Для нахождения обобщенных координат $y^\beta(x^0,...,x^3)$, рассмотрим уравнение Пфаффа с N переменными

$$\sum_{l=1}^{N} \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} = A_l .$$

Или запишем это уравнение в другой форме

$$d\Phi = \sum_{l=1}^{N} A_l(x^1,...,x^N) dx^l$$

Построим локальное решение уравнения Пфаффа, причем в случае интегрируемости уравнения Пфаффа, эта формула определит точное решение. Гиперповерхность начальных условий задается в виде $G(x_1^0,...,x_N^0) = 0$. Из нее выходят кривые, заполняющие все пространство. Точное решение в точке $x_0^l, l = 1,...,N$, имеет вид

$$\Phi = \Phi^0 + \sum_{l=1}^{N} A_l^0 (x^l - x_0^l) + 0(x^l - x_0^l)^2 \qquad (1.5.6)$$

При этом верхний индекс 0, означает, что функция берется при начальных значениях координат. При этом локально интерполируется коэффициент A_l. В самом деле

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_l} = A_l^0 + 0(x^l - x_0^l).$$

и в точке $x^l = x_0^l$ точно аппроксимирует решение. Для получения глобального решения вдоль кривых $\frac{dx^l}{ds} = V^l(x^1,...,x^N)$, нужно составить дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Phi}{ds} = \sum_{l=1}^{N} A_l[x^1(s),...,x^N(s)]\frac{dx^l}{ds}. \qquad (1.5.7)$$

причем поправка к дифференциальному уравнению, равна нулю $\lim_{\Delta t \to 0} B_l(\frac{dx^l}{ds})^2 \Delta s = 0$. Кроме того, необходимо решать дифференциальное уравнение $\frac{dx^l}{ds} = V^l(x^1,...,x^N)$, тогда решение будет задано параметрическим образом, но зависит от пути интегрирования. Так как путь интегрирования определен при условии $g_{k0} \neq 0$, или если имеется несколько тел, это не представляет проблему. Задавая начальные координаты тела, получим решение, покрывающее все используемое в данной задаче пространство.

В случае $g_{k0} = 0, P_0^\beta = 0$, т.е. в случае одного неподвижного тела, построение системы координат невозможно, так как в случае неподвижного не вращающегося тела скорость тела равна нулю.

Из дифференциального уравнения (1.5.7) найдем величину $\Phi^0(x_0^1,...,x_0^N)$ и построим решением в точке $x_0^l, l = 1,...,N$ по формуле (1.5.6).

Отметим, что эти координаты в случае неподвижного одного вращающегося тела $P_0^\beta = 0, g_{k0} \neq 0$, тоже существуют, так как определяется вектор $V^l(x^1,x^2,x^3)$ и, следовательно, можно построить координаты $y^l, l = 0,...,3$. В случае одного неподвижного тела с диагональным метрическим тензором $P_0^\beta = 0, g_{k0} = 0$ формулы не работают и обобщенные координаты не определяются. При этом тело, если метрический тензор явно не зависит от времени, в этой системе координат неподвижно.

Но эта скорость определена в декартовых координатах. Для обобщенных координат справедливо $(dy^0)^2 - \sum_{\beta=1}^{3} (dy^\beta)^2 = ds^2 = g_{lk} dx^l dx^k$ по их построению и имеем обобщенную скорость U_l. Т.е. при соответствующих условиях Риманово пространство для данного распределения скорости тела, можно отобразить на декартово пространство.

При этом в этих обобщенных координатах справедливо преобразование Лоренца

$$
\begin{aligned}
dy_1 &= \frac{dy'_1 + dy'_0 U / c'}{\sqrt{1 - U^2 / c'^2}} \\
dy_0 &= \frac{dy'_0 + dy'_1 U / c'}{\sqrt{1 - U^2 / c'^2}} \\
dy_2 &= dy'_2, dy_3 = dy'_3
\end{aligned}
$$

Причем, так как обобщенная скорость тела с учетом электромагнитного и гравитационного поля равна константе, имеем в этих координатах

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{y'_1 + y'_0 U / c'}{\sqrt{1 - U^2 / c'^2}} \\
y_0 &= \frac{y'_0 + y'_1 U / c'}{\sqrt{1 - U^2 / c'^2}} . \\
y_2 &= y'_2, y_3 = y'_3
\end{aligned}
\qquad (1.5.8)
$$

Следовательно, формула (1.5.5) определяет координаты, инвариантные относительно преобразования Лоренца. При этом данное преобразование определяет связь между неинерциальными системами координат в декартовом пространстве и инерциальными в обобщенном пространстве в силу справедливости формулы (1.5.8) в однородном и изотропном пространстве. При этом движение по инерции в этих координатах имеет постоянную скорость U_l.

Эта скорость связанна со скоростью U'_l, в движущейся со скоростью U_0, вдоль оси y_1 системы координат

$$U_1 = \frac{U'_1 + U_0}{1 + U'_1 U_0 / c^2}, U_2 = \frac{U'_2 \sqrt{1-(U_0/c)^2}}{1 + U'_1 U_0 / c^2}, U_3 = \frac{U'_3 \sqrt{1-(U_0/c)^2}}{1 + U'_1 U_0 / c^2}.$$

При этом в этих координатах будет справедливы основные уравнения СТО для свободного пространства. Волновое уравнение, следующее из уравнений Максвелла, запишется в виде

$$\frac{\partial^2 A_l}{\partial y_0^2} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 A_l}{\partial (y^k)^2} = 0.$$

При этом движение с постоянной скоростью при отсутствии источников электромагнитного поля, говорит об отсутствии излучения электромагнитной энергии и об отсутствии полей излучения, которые учтены при определении скорости.

При этом уравнение Дирака в обобщенных координатах в случае наличия электромагнитного поля запишется в виде

$$(\gamma^{\mu}{}_{ik} \widehat{p}_{\mu} - mc\delta_{ik})\psi_k = 0.$$

Не стандартное решение этого уравнения, записанного для свободного пространства, но в координатах, учитывающих гравитационное и электромагнитное поле, приведено в [7], и в случае нулевой массы в [8].

Формула для определения обобщенных сферических осей координат следующая, где формулы справедливы для α тела

$$\begin{aligned}
&\frac{dR_{k\alpha}}{ds} = \sqrt{g_{rr\alpha}} \frac{dR_{\alpha}}{ds} \\
&R_{k\alpha} \frac{d\theta_{k\alpha}}{ds} = R_{\alpha} \frac{d\theta_{\alpha}}{ds} \\
&R_{k\alpha} \sin\theta_{k\alpha} \frac{d\varphi_{k\alpha}}{ds} = \sqrt{g_{33\alpha}} \frac{d\varphi_{\alpha}}{ds} \\
&\frac{dy^0_{k\alpha}}{ds} = \sqrt{g_{00\alpha}} \frac{dx^0_{\alpha}}{ds}
\end{aligned}. \qquad (1.5.9)$$

Построим решение этой системы уравнений, считая метрический тензор постоянной величиной, что справедливо для периодической решетки. Имеем

$$
\begin{aligned}
&R_{k\alpha} = \sqrt{g_{rr\alpha}} R_\alpha \\
&\cos\theta_{k\alpha} = \frac{\cos\theta_\alpha}{\sqrt{g_{rr\alpha}}} \\
&\varphi_{k\alpha} = \frac{\sin\theta_\alpha}{\sin[\theta_\alpha / g_{rr\alpha}]} g_{rr\alpha}\varphi_\alpha \\
&y^0_{k\alpha} = \sqrt{g_{00\alpha}} x^0_\alpha
\end{aligned}
.
$$

Где если величины $g_{rr\alpha} = 1, g_{00\alpha} = 1$ получаем тождественное равенство криволинейных координат в правой и левой части. Причем это формулы для внешней поверхности частиц, имеющих радиус шара, больше гравитационного радиуса. При этом течение времени замедлится, а эффективный радиус сферы увеличится.

$$R^2_\alpha = \prod_{\beta=-N,\beta\neq\alpha}^{N} |\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|^2 / N = \prod_{\beta=-N,\beta\neq\alpha}^{N} |(\alpha-\beta)\operatorname{Re}\mathbf{d} + i\operatorname{Im}\mathbf{d}|^2 / N,$$

$$g_{rr\alpha} = \frac{1}{\prod\limits_{\beta=-N,\beta\neq\alpha}^{N}(1 - \frac{r_{g\beta}}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|})} = \frac{1}{\prod\limits_{\beta=-N,\beta\neq\alpha}^{N}(1 - \frac{r_{g\beta}}{|(\alpha-\beta)\operatorname{Re}\mathbf{d} + i\operatorname{Im}\mathbf{d}|})}; |d| > r_{g\beta}$$

$$g_{00\alpha} = \prod_{\beta=-N,\beta\neq\alpha}^{N}(1 - \frac{r_{g\beta}}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}) = \prod_{\beta=-N,\beta\neq\alpha}^{N}(1 - \frac{r_{g\beta}}{|(\alpha-\beta)\operatorname{Re}\mathbf{d} + i\operatorname{Im}\mathbf{d}|})$$

$$R^2_\alpha d\theta^2_\alpha = \sum_{\beta=1}^{N} R^2_{\alpha\beta} d\theta^2_{\alpha\beta} / N, \tan\theta_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{(x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2}}{\sqrt{(x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2 + (z_\alpha - z_\beta)^2}}$$

$$R^2_\alpha \sin^2\theta_\alpha d\varphi^2_\alpha = \sum_{\beta=1}^{N} R^2_{\alpha\beta}\sin^2\theta_{\alpha\beta} d\varphi^2_{\alpha\beta} / N, \arg\varphi_{\alpha\beta} = \arg[y_\alpha - y_\beta + i(x_\alpha - x_\beta)]$$

Гравитационный радиус взаимодействия частицы с индексом 2 с частицей с индексом 1 равен $r_{g12} = 2\gamma m_2 / c^2 - 2q_1 q_2 / (m_1 c^2) + 2iq_1 m_2\sqrt{\gamma} / m_1 c^2 + 2iq_2\sqrt{\gamma} / c^2$. Для элементарных частиц существенным является значение гравитационного радиуса $r_{g12} = -2q_1 q_2 (1 + im_2\sqrt{\gamma} / q_2) / (m_1 c^2)$ с малой мнимой частью. В случае кристаллической решетки, с расстоянием между частицами равном $\mathbf{d}$, получаем постоянные метрические тензоры, действующие на частицы, расположенные в узлах кристаллической структуры. При этом получаем, что внутренняя часть тела, состоит из сфер постоянного радиуса, на поверхности которых и происходит перемещение, причем время всех внутренних процессов замедленно в постоянное количество раз. При этом на поверхности сферы имеются отдельные дискретные точки.

$$\theta_{\alpha\beta} = \arg(\sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} + i\sqrt{d_x^2 + d_y^2}), \theta_\alpha \in [0, \pi].$$

$$\theta_{k\alpha\beta} = \sqrt{1 - \frac{r_{g\alpha\beta}}{|(\alpha - \beta)\operatorname{Re}\mathbf{d} + i\operatorname{Im}\mathbf{d}|}}\theta_{\alpha\beta},$$

$$\varphi_{k\alpha\beta} = \frac{\sin\theta_{\alpha\beta}}{\sin[\theta_{\alpha\beta} / g_{rr\alpha\beta}]} g_{rr\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}, \varphi_{\alpha\beta} = \arg(d_y + id_x), \varphi_{\alpha\beta} \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{1}{g_{rr\alpha\beta}} = 1 - \frac{r_{g\alpha\beta}}{|(\alpha - \beta)\operatorname{Re}\mathbf{d} + i\operatorname{Im}\mathbf{d}|}.$$

Значение гравитационного радиуса каждой частиц и величина коэффициента $\mathbf{d}$ определят приближенно структуру положения частиц в атоме, его радиус и угловое распределение частиц. Причем ядро атома образует меньшую сферу, а электроны большую, в связи с большим электрическим гравитационным радиусом у частиц с малой массой. Причем потенциал в точках расположения частиц внутри тела почти постоянный, отрицательный, значит, имеющие мнимый заряд $\pm ie$ частицы собираются в этом потенциале. Причем граничные частицы имеют меньший по модулю потенциал. Причем элементарные частицы, из которых состоит тело, подчиняются условию $\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta = (\alpha - \beta)\operatorname{Re}\mathbf{d} + i\operatorname{Im}\mathbf{d}$ приближенно, значит, они колеблются вокруг стационарных точек с отрицательным потенциалом за счет мнимой части расстояния между частицами. Причем колебание ядер мало, а электронов гораздо больше, значит, для электронов величина $\mathbf{d}$ содержит большую мнимую часть, но меньшую действительной части, для свободных электронов мнимая часть больше действительной части. Для ядра мнимая часть мала, ядро колеблется с малой амплитудой. Причем, каждая частица в среднем находится в своем стационарном месте.

Координаты движения тел в обобщенной системе координат это отдельные точки. Такова картина внутренности тела без учета множителя, описывающее отличие от решения Шварцшильда. При этом в силу постоянства метрического тензора, символ Кристоффеля равен нулю и скорости частиц постоянны, совпадают с начальными условиями для скорости тела. При этом изменение скорости тела вызывает изменение структуры тела, его деформирует. При этом величина $h_{ll\alpha}(s)$ определятся, где величина $s = const$, которая определится из нелинейного уравнения, т.е. время в координатах частиц остановится. Но все это справедливо для точек $\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta = (\alpha - \beta)\operatorname{Re}\mathbf{d} + i\operatorname{Im}\mathbf{d}$. Отступление от этого соотношения на границах области тела, и в местах деформаций тела делает метрический тензор переменным. Но координаты, время и потенциалы всех частиц тела, удовлетворяющих $\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta = (\alpha - \beta)\operatorname{Re}\mathbf{d} + i\operatorname{Im}\mathbf{d}$ являются константами, возможно комплексными.

Существование электрического потенциала в металлах описано в [11]§18.2 стр.104. Электроны и протоны ядра атома, не совпадают в пространстве, поэтому имеется электрическое поле внутри металла, которое приближенно заменяют постоянным полем и называют внутренним потенциалом металла. Имеется также в благородных газах (аргона, криптона, ксенона) эффект Рамзауэра. Он объясняется сложным влиянием электрического поля, приводящего к наличию максимума и минимума эффективного сечения молекул этих газов [11]§18.7 стр.110. При этом показатель преломления меняется от точки к точке.

Значит, и движение элементарных частиц наряду с поступательной действительной частью скорости, имеет и мнимую скорость, что означает колебательную скорость, или вращение в трехмерном пространстве. Причем имеется не только среднее вращение электрона вокруг ядра, но и колебания вокруг среднего значения. Так как электрон является сгустком частиц вакуума, это означает колебание скорости частиц вакуума вокруг среднего значения. Это комплексное значение импульса частиц вакуума описывается по формуле $p_l = -i\hbar\partial_l \ln\psi$, где величина ψ это волновая функция частицы см. [3] стр.3-5, описываемой уравнением Шредингера. Действительная часть комплексной величины описывает ее среднее, а квадрат мнимой части ее дисперсию импульса. Чем дисперсия импульса больше, тем дисперсия координаты меньше, и частица имеет меньшую дисперсию координаты, и значит, локализована сильнее. При этом, чем больше мнимая часть импульса, тем размер частицы меньше по формуле $\psi = \exp(-\operatorname{Im} p_r \Delta r / \hbar)$.

Причем вне положений равновесия оси координат выглядят таким образом

$$R_{k\alpha\beta} = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{dR_{\alpha\beta}}{d\tau} / \sqrt{1 - \frac{r_{g\alpha\beta}}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}} d\tau$$

$$\theta_{k\alpha\beta} = \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{1 - \frac{r_{g\alpha\beta}}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}} \frac{d\theta_{\alpha\beta}}{d\tau} d\tau,$$

$$\varphi_{k\alpha\beta} = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\sin\theta_{\alpha\beta}}{\sin[\theta_{\alpha\beta}\sqrt{1 - \frac{r_{g\alpha\beta}}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}}]} \sqrt{1 - \frac{r_{g\alpha\beta}}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}} \frac{d\varphi_{\alpha\beta}}{d\tau} d\tau .$$

$$y^0_{k\alpha\beta} = \int_{\tau_0}^{\tau} c\sqrt{1 - \frac{r_{g\alpha\beta}}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}} d\tau$$

Причем в силу равенства $r_{g12} = -2q_1q_2(1 + im_2\sqrt{\gamma}/q_2)/(m_1c^2)$ в случае разноименных зарядов, действительная часть гравитационного радиуса положительна, а в случае взаимодействия электронов отрицательна. При этом в случае взаимодействия электронов подкоренное выражение всегда положительно и особенностей не возникает.

Где каждая частица движется со своим импульсом $x^{\beta} = x_0^{\beta} - \frac{P_0^{\beta} c(\tau - \tau_0)}{\sqrt{\sum_{\beta=1}^{3} (P_0^{\beta})^2 + m^2 c^2}}$

см. раздел 3. Где величины $\frac{dR_{\alpha\beta}}{d\tau}, \frac{d\theta_{\alpha\beta}}{d\tau}, \frac{d\varphi_{\alpha\beta}}{d\tau}, \frac{dx^0_{\alpha\beta}}{d\tau}$, можно выразить через изменение координаты каждой частицы по формулам (1.3.2). Где величина τ, собственное время частицы $x_{\alpha}^0 = c\tau$. Задавая начальные значения координат $R_{k\alpha\beta}, \theta_{k\alpha\beta}, \varphi_{k\alpha\beta}, y_{k\alpha\beta}$, проинтегрируем систему уравнений и получим уравнение координатных осей. При условии $|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}| \to \operatorname{Re} r_{g\alpha\beta}$ действительная часть угловых координат постоянна, но имеются мнимые добавки. Для радиуса справедливо $\frac{dR_{k\alpha\beta}}{d\tau} = 1/\sqrt{-\frac{i \operatorname{Im} r_{g\alpha\beta}}{|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}|}} \frac{dR_{\alpha\beta}}{d\tau} = \frac{1}{(-1 \pm i)\sqrt{\frac{\operatorname{Im} r_{g\alpha\beta}}{2|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}|}}} \frac{dR_{\alpha\beta}}{d\tau} \to (1 \mp i)\infty$,

т.е. частицы должны быстро разойтись не слипаясь. В результате получатся постоянные углы с мнимыми добавками к углам $\theta_{k\alpha\beta}, \varphi_{k\alpha\beta}$ для одной частицы. Будут образовываться комплексные координаты в силу комплексного характера гравитационного радиуса.

Для координаты с индексом ноль получится постоянная величина координаты с индексом ноль $dy^0_{k\alpha\beta} = (-1 \pm i)\sqrt{\frac{\operatorname{Im} r_{g\alpha\beta}}{2|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}|}} d\tau$ с малой мнимой добавкой. Комплексная добавка к координате с индексом ноль означает комплексную скорость, что описывает вращение частиц. Так как координата с индексом ноль является комплексной, метрический интервал является комплексным, т.е. пространство и время комплексным, т.е. является хаотическим, со среднеквадратичным отклонением. Понятие траектории в квантовой механике, описывающей поведение материальных тел, отсутствует, но комплексные траектории существуют. Квантовая механика строится в действительном пространстве, так как действительных траекторий нет, есть только вероятность нахождения в данном объеме.

1.5. Описание излучения электрона

Сведение системы квазилинейных уравнений в частных производных к системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

Системы уравнений с частной производной по времени второго порядка исследованы в [10].

Рассмотрим систему квазилинейных уравнений второго порядка, в частности уравнение ОТО для электромагнитного поля

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2} + \sum_{l,n=1}^{L} [a_{0nl}(x_1,...,x_3) + \sum_{s=1}^{L} a_{1nls}(x_1,...,x_3)U_s + ...] \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_l \, \partial x_n} +$$
$$+ \sum_{l=1}^{L} [b_{0l}(x_1,...,x_3) + \sum_{s=1}^{L} b_{1ls}(x_1,...,x_3)U_s + ...] \frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \quad .$$
$$+ [c_0(x_1,...,x_3) + \sum_{s=1}^{L} c_{1s}(x_1,...,x_3)U_s + ...]U_k = d_k(x_1,...,x_3), k = 1,...,L$$

Решение ищем в виде $\mathbf{U}(t, x_1,...,x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{b}_n(t)\varphi_n(x_1,...,x_3)$. При этом величина $d_k(x_1,...,x_3)$, это внешнее воздействие. Для решения этого уравнения подставляем разложение функции решения в уравнение в частных производных, умножаем на величину $\varphi_s(x_1,...,x_3)$ и интегрируем по пространству. Получим дифференциальное уравнение (1.5.1). Функции $\varphi_n(x_1,...,x_3)$ выберем синусоидальными, тогда если решение непрерывная функция, то коэффициенты ряда убывают как величина $1/n^2$, и процесс редукции возможен.

Исследуем нелинейное обыкновенное уравнение со второй производной по времени, где при действительных аргументах $b_1,...,b_N$ уравнение имеет однозначную правую часть

$$\frac{d^2 b_s}{dt^2} = F_s(b_1,...,b_N), s = 1,...,N \, . \qquad (1.5.1)$$

Системы уравнений, содержащие первую производную по времени в правой части, приводятся к виду (1.5.1). Допустим, имеем уравнение

$$\frac{d^2 b_s}{dt^2} = F_s(b_1,...,b_N,\frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt}), s = 1,...,N .$$

Продифференцируем его по времени, получим

$$\frac{d^3 b_s}{dt^3} = G_s(b_1,...,b_N,\frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt}) .$$

Введя новые переменные $y_n = b_n, y_{n+N} = \frac{db_n}{dt}, n = 1,...,N;$, получим систему уравнений

$$\frac{d^2 y_s}{dt^2} = F_s(y_1,...,y_{2N}), s = 1,...,2N .$$

Решение системы нелинейных уравнений

Теорема 1. Рассматривается задача Коши при произвольных действительных начальных условиях для системы нормальных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (1.5.1). Она имеет конечное число не кратных положений равновесия. Случай вырожденного решения задачи Коши – положения равновесия, не рассматривается. В случае если у системы (1.5.1) имеются комплексно-сопряженные положения равновесия с действительной частью, то при конечном аргументе t действительное решение задачи Коши системы (1.5.1) при действительных начальных условиях стремится к бесконечности, при этом комплексное решение конечно.

Доказательство.

Приведем правую часть этого уравнение к уравнению в собственных значениях, воспользовавшись преобразованием $b_s(t) = \sum_l g_{sl} c_l(t)$, где величина собственных векторов g_{sl} и собственных чисел Λ_l определяется из уравнений

$$|\frac{\partial F_s}{\partial b_s} - \Lambda_k^2 \delta_{sn}| = 0, (\frac{\partial F_s}{\partial b_s} - \Lambda_k^2 \delta_{sn}) g_{nk} = 0 .$$

Где величина $\frac{\partial F_s}{\partial b_n}$ определена в координатах положения равновесия системы дифференциальных уравнений. В новых переменных $c_l(t)$ дифференциальное уравнение запишется в виде

$$\frac{d^2 c_l}{dt^2} = (\Lambda_l^s)^2 (c_l - \alpha_l^s) + (c_l - \alpha_l^s)^2 P_l(c_1,...,c_N) = \Phi_l(c_1,...,c_N) . \quad (1.6.2)$$

Находим координаты положения равновесия этой системы нелинейных дифференциальных уравнений α_l^s, которые определятся из уравнений $\Phi_l(\alpha_1^s,...,\alpha_N^s) = 0, l = 1,..., N$. Тогда уравнение запишется в виде

$$\frac{d^2 c_l}{dt^2} = \exp[H_l(t)] \prod_{s=1}^{S} (c_l - \alpha_l^s) . \quad (1.6.3)$$

Где величина

$$\exp[H_l(t)] = \frac{\Phi_l(c_1,...,c_N)}{\prod_{s=1}^{S} (c_l - \alpha_l^s)} .$$

При подстановке этой функции в дифференциальное уравнение (1.6.3), получим уравнение (1.6.2). Если нет кратных положений равновесия, в точке положения равновесия множитель $\exp[H_l(t)]$ равен

$$\exp[H_l(t)] = \frac{\partial \Phi_l(\alpha_1^s,...,\alpha_N^s) / \partial c_l}{\prod_{n=1}^{s-1} (\alpha_l^s - \alpha_l^n) \prod_{n=s-1}^{S} (\alpha_l^s - \alpha_l^n)} = \frac{(\Lambda_l^s)^2}{\prod_{n=1}^{s-1} (\alpha_l^s - \alpha_l^n) \prod_{n=s-1}^{S} (\alpha_l^s - \alpha_l^n)} .$$

Причем, так как нет кратных положений равновесия, величина Λ_l^s не равна нулю, и значит, множитель $\exp[H_l(t)]$ в ноль не обращается в координатах положения равновесия.

Вводя, оператор

Используя условие

$$\exp[-H_l(c_1,...,c_N)]\frac{d^2c_l}{dt^2}=\frac{d^2c_l}{dh_l^2}. \qquad (1.6.4)$$

Определим решение $c_l(t)$. Получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2c_l(t)}{dt^2}=\frac{d^2c_l(h_l)}{dh_l^2}\exp\{H_l[c_1(h_l),...,c_N(h_l)]\}. \qquad (1.6.5)$$

При этом, зная из решения дифференциального уравнения (1.6.17) зависимость $c_l(h_l)$ определим зависимость $c_l(t)$ из уравнения (1.6.5).

Получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2c_l}{dh_l^2}=\prod_{s=1}^{S}(c_l-\alpha_l^s)=D(c_l). \qquad (1.6.6)$$

Умножаем это уравнение на величину $\frac{dc_l}{dh_l}$ и интегрируем по c_l. Получим величину первого интеграла

$$\mathrm{H}_l=(\frac{dc_l}{dh_l})^2/2-\int_{c_l^0}^{c_l}D(c_l)dc_l=(\frac{dc_l}{dh_l})^2|_{h_l=h_l^0}/2. \qquad (1.6.7)$$

При значении скачка от значения c_l^1 до значения c_l^2 получим выделившуюся кинетическую энергию

$$\Delta E_k=\sum_{l=1}^{N}\Delta(\frac{dc_l}{dh_l})^2/2=H_l+\int_{c_l^1}^{c_l^2}D(c_l)dc_l]. \qquad (1.6.8)$$

Разделим дифференциальное уравнение (1.6.6) на правую часть и полученную дробь разложим на сумму простых дробей. Получим

$$\sum_{s=1}^{S}\frac{\lambda_l^s d^2c_l}{c_l-\alpha_l^s}=dh_l^2 \qquad (1.6.9)$$

$$\lambda_l^s=\frac{1}{\prod_{k=1}^{s-1}(\alpha_l^s-\alpha_l^k)\prod_{k=s+1}^{S}(\alpha_l^s-\alpha_l^k)}.$$

Следует различать величину $d^2 c_l = c_l(h_l + \Delta h_l) + c_l(h_l - \Delta h_l) - 2c_l(h_l)$ и величину $dh_l^2 = (\Delta h_l)^2$ при условии $\Delta h_l \to 0$.

При этом имеем $\int\limits_{h_l^0}^{h_l} dx \int\limits_{h_l^0}^{x} dy = (h_l - h_l^0)^2/2 = p(h_l)$. $\frac{d^2 p(h_l)}{dh_l^2} = 1$. Или $d^2 p(h_l) = dh_l^2$. Причем имеем $\frac{d^2 (c_l)^2/2}{dc_l^2} = 1$, запишем это равенство по-другому

$$\frac{d^2 c_l}{d(\sqrt{2c_l})^2} = 1 \qquad (1.6.10)$$

Т.е. равенство (1.6.9) и (1.6.10) получим

$$d^2 g_l = \sum_{s=1}^{S} \frac{\lambda_l^s d(\sqrt{2c_l})^2}{c_l - \alpha_l^s} = dh_l^2 = d^2 p(h_l) \qquad (1.6.9a)$$

Двойной интеграл можно представить в виде $g_l(\sqrt{c_l}) = \int\limits_{\sqrt{c_l^0}}^{\sqrt{c_l}} \int\limits_{\sqrt{c_l^0}}^{x} f(y)dydx$ или имеем в случае положительного значения c_l. В случае отрицательного значения c_l надо брать корень из числа со знаком минус

$$\begin{aligned}\frac{d^2 g_l(\sqrt{c_l})}{d(\sqrt{c_l})^2} &= f(\sqrt{c_l}) = \frac{2\lambda_l^s}{(\sqrt{c_l} - \sqrt{\alpha_l^s})(\sqrt{c_l} + \sqrt{\alpha_l^s})} = \\ &= \frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}}\left(\frac{1}{\sqrt{c_l} - \sqrt{\alpha_l^s}} - \frac{1}{\sqrt{c_l} + \sqrt{\alpha_l^s}}\right)\end{aligned}. \qquad (1.6.11)$$

Проверяется это равенство путем подстановки $g_l(\sqrt{c_l}) = \int\limits_{\sqrt{c_l^0}}^{\sqrt{c_l}} \int\limits_{\sqrt{c_l^0}}^{x} f(y)dydx$ в дифференциальное уравнение (1.6.11). Значение интеграла равно

$$g_l(x) = \int\limits_{x_0}^{x} [\ln(y-a) - \ln(x_0 - a) + 2\pi i \Delta n]dy = (y-a)[\ln(y-a) + 2\pi i n - 1]\Big|_{y=x_0}^{y=x} -$$
$$-(x - x_0)\ln(x_0 - a)$$

Из равенства (1.6.9а), получим $d^2 g_l(c_l)=d^2 p(h_l)$, откуда имеем $g_l(c_l)=p(h_l), g_l(c_l^0)=p(h_l^0)=0$,

$$\frac{dg_l}{dh_l}|_{h_l=h_l^0}=\sum_{s=1}^{S}\frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}}[\ln(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})]\frac{dc_l}{2\sqrt{c_l}dh_l}|_{h_l=h_l^0}=\frac{dp}{dh_l}|_{h_l=h_l^0}=a_l$$

Откуда следует начальное условие для величины $\frac{dp_l}{dh_l}|_{h_l=h_l^0}$. Записав это равенство для произвольного значения h_l, получим формулу для определения dc_l/dh_l.

Интегрируя (1.6.11), получим

$$g(c_l)=\sum_{s=1}^{S}\{\frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}}[(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})+2\pi i p_l^s-1]-$$
$$-(\sqrt{c_l^0}-\sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l^0}-\sqrt{\alpha_l^s})+2\pi i q_l^s-1]-$$
$$-(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})+2\pi i p_l^s-1]+$$
$$+(\sqrt{c_l^0}+\sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l^0}+\sqrt{\alpha_l^s})+2\pi i q_l^s-1]-$$
$$-(\sqrt{c_l}-\sqrt{c_l^0})[\ln(\sqrt{c_l^0}-\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}+\sqrt{\alpha_l^s})\}=(h_l-h_l^0)^2/2+a_l(h_l-h_l^0)=p(h_l)$$

Где имеющие одинаковую структуру значения логарифма имеют одинаковую мнимую часть. Произведя элементарные преобразования по суммированию коэффициентов при целых числах, получим

$$g(c_l)=\sum_{s=1}^{S}[\frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}}[(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}-\sqrt{\alpha_l^s})]+$$
$$+4\pi i\sqrt{\alpha_l^s}n_l^s-(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}+\sqrt{\alpha_l^s})]\}= \quad .(1.6.12)$$
$$=(h_l-h_l^0)^2/2+a_l(h_l-h_l^0)=p(h_l),$$
$$n_l^s=q_l^s-p_l^s$$

Эта формула получена в предположении, что состояния в начальный и текущий момент времени не одинаковы, и поэтому может быть разная мнимая ветвь логарифма. Это происходит в случае, если система может излучить энергию и тогда, начальное и конечное состояние имеют разную ветвь логарифма и решение зависит от целого числа.

Выведем формулу для решения в действительной плоскости. Опуская индексы, преобразуем формулу, суммируя с комплексно сопряженной формулой

$$2\,\mathrm{Re}\,\lambda(\sqrt{c}/\sqrt{\alpha}-1)\ln(\sqrt{c}-\sqrt{\alpha})=\mathrm{Re}\,2(\lambda_r+i\lambda_i)[\sqrt{c(\alpha_r-i\alpha_i)/(\alpha_r^2+\alpha_i^2)}-1]\times$$

$$\times\{\ln[(\sqrt{c}-\beta_r)^2+\beta_i^2]^{1/2}+i\frac{\pi}{2}+i\arctan\frac{\sqrt{c}-\beta_r}{\beta_i}\}=$$

$$=2[\lambda_r(\sqrt{c}\gamma_r-1)+\lambda_i\sqrt{c}\gamma_i]\ln[(\sqrt{c}-\beta_r)^2+\beta_i^2]-2[\lambda_i(\sqrt{c}\gamma_r-1)-\lambda_r\sqrt{c}\gamma_i]\times$$

$$\times[\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{\sqrt{c}-\beta_r}{\beta_i}],\beta_r+i\beta_i=\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha_r^2+\alpha_i^2}+\alpha_r}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha_r^2+\alpha_i^2}-\alpha_r}{2}}$$

$$\gamma_r+i\gamma_i=\frac{\beta_r-i\beta_i}{\sqrt{\alpha_r^2+\alpha_i^2}}$$

Разрешая это уравнение относительно величины аргумента $\arctan\frac{\sqrt{c}-\beta_r}{\beta_i}$, получим

$$\frac{\sqrt{c_l}-\beta_{lr}^s}{\beta_{li}^s}=\tan[-\frac{(h_l-h_l^0)^2/2+a_l(h_l-h_l^0)}{2[\lambda_{li}^s(\sqrt{c_l}\gamma_r-1)-\lambda_{lr}^s\sqrt{c_l}\gamma_i]}+\delta_l] \quad (1.6.13)$$

Эта функция при наличии комплексных координат положения равновесия стремится к бесконечности при решении в действительной плоскости. При этом комплексное решение конечно.

Но уравнения движения небесных тел имеют точку ветвления. Если записать уравнение движения

$$\begin{gathered}\frac{d\mathbf{V}_l}{dt}=\mathbf{F}_l(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N)\\ \frac{d\mathbf{r}_l}{dt}=\mathbf{V}_l\end{gathered}. \qquad (1.6.14)$$

То при скорости $\mathbf{V}_l=0$ движения они допускают точку ветвления

$$\begin{gathered}-\frac{d\mathbf{V}_l}{dt}=\mathbf{F}_l(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N)\\ \frac{d\mathbf{r}_l}{dt}=-\mathbf{V}_l\end{gathered}, \qquad (1.6.15)$$

приводящую к замкнутости траектории тел с отрицательной энергией. Уравнения движения для обоих уравнений (1.6.14) и (1.6.15) имеет вид

$$\frac{d^2\mathbf{r}_l}{dt^2} = \mathbf{F}_l(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N)$$

Т.е. получается, что точка ветвления этого уравнения делает возможным действительное решение. Если же ветвление решения не учитывать и считать одну ветвь решения, то получается бесконечное действительное решение.

У решения системы (1.6.6) можно понизить порядок интегрирования, для чего умножим его на величину $V_l = \frac{dc_l}{dh_l}$, получим

$$\frac{d}{dh_l}[V_l^2/2 - \int D_l(c_l)dc_l] = 0 .$$

Разрешая это уравнение относительно V_l, получим

$$\frac{dc_l}{dh_l} = V_l = \sqrt{(\frac{dc_l}{dt})^2 |_{t=t_0} + 2\int_{c_l^0}^{c_l} D_l(x_l)dx_l} = \sqrt{\prod_{k=1}^{K} (c_l - \beta_l^k)} .$$

Где действительные значения β_l^k растут с ростом индекса k. Причем возможны две ветви решения, положительная и отрицательная. Причем величина $c_l \in [\beta_l^k, \beta_l^{k+1}]$, где решение действительно. Если знак корня положителен, то величина c_l растет, достигает значения β_l^{k+1}. Знак корня становится отрицателен, и величина c_l убывает, до значения β_l^k, чтобы вновь расти.

Причем, так как для уравнения движения в гравитационном поле достижение нуля для величины подкоренного выражения в гравитационном поле при большой скорости требует большого времени, будет долго продолжаться счет в действительной плоскости. Необходимо изменить знак квадратного корня для увеличения значения подкоренного выражения, в противном случае решение станет комплексным, и так как счет идет в действительной плоскости, будет стремиться к бесконечности. Численное решение будет несколько проскакивать через ноль, меняя знак корня, при этом будет расти кинетическая энергия, и в результате тело будет обладать положительной энергией и покинет эллиптическую траекторию. Если же тело будет точно менять в нуле скорости знак корня, то тело будет иметь стационарную орбиту.

Какое решение будет реализовываться в эксперименте, зависит от случайных флуктуаций решения в окрестности нуля скорости в некоторой системе координат. При многократном повторении нуля скорости в результате будет реализовано комплексное решение, а численный счет в действительной плоскости приведет к бесконечному решению. В этом случае нужно переходить к комплексному конечному решению.

Теорема 2. Решение системы уравнений (1.6.1) в комплексной плоскости конечно.

Допустим $c_l \to \infty, c_l^0 \to \infty$, что соответствует $t \to \infty$, и изменяющейся величине h_l. Тогда имеем значение левой части выражения, стремящееся к константе,

$$\lim_{c_l \to \infty} \sum_{s=1}^{S} \{[\frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}} \{(\sqrt{c_l} - \sqrt{\alpha_l^s})[\ln\sqrt{c_l}(1 - \frac{\ln(\sqrt{c_l^0} - \sqrt{\alpha_l^s})}{\ln\sqrt{c_l}})] +$$

$$+ 4\pi i \sqrt{\alpha_l^s} \Delta n_l^s - (\sqrt{c_l} + \sqrt{\alpha_l^s}) \ln\sqrt{c_l}(1 - \frac{\ln(\sqrt{c_l^0} + \sqrt{\alpha_l^s})}{\ln\sqrt{c_l}})]\} =$$

$$= 2\pi i \lambda_l^s n_l^s - 2\sqrt{c_l}\,\frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}}[\ln(\sqrt{c_l^0} + \sqrt{\alpha_l^s}) - \ln(\sqrt{c_l^0} - \sqrt{\alpha_l^s})] =$$

$$= (h_l - h_l^0)^2 / 2 + a_l(h_l - h_l^0) = p(h_l),$$

$$n_l^s = q_l^s - p_l^s$$

а справа изменяющаяся величина h_l. Значит, величина c_l не стремится к бесконечности, и является конечной величиной. При фиксированной величина h_l возможно стремление решения к бесконечности.

Потенцируя данное выражение, получим

$$\prod_{s=1}^{S}\frac{(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})^{\lambda_l^s(\sqrt{c_l}/\sqrt{\alpha_l^s}-1)}(\sqrt{c_l^0}+\sqrt{\alpha_l^s})^{\lambda_l^s(\sqrt{c_l}/\sqrt{\alpha_l^s}+1)}}{(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})^{\lambda_l^s(\sqrt{c_l}/\sqrt{\alpha_l^s}+1)}(\sqrt{c_l^0}-\sqrt{\alpha_l^s})^{\lambda_l^s(\sqrt{c_l}/\sqrt{\alpha_l^s}-1)}}\times$$

$$\times\exp(4\pi i\lambda_l^s n_l^s)=\exp[(h_l-h_l^0)^2/2+a_l(h_l-h_l^0)]= \qquad (1.6.17)$$

$$=\exp\{[\int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{\Phi_l[c_1(\tau),...,c_N(\tau)]}{\prod_{s=1}^{S}[c_l(\tau)-\alpha_l^s]}}d\tau]^2/2+\int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{\Phi_l[c_1(\tau),...,c_N(\tau)]}{\prod_{s=1}^{S}[c_l(\tau)-\alpha_l^s]}}d\tau\}$$

Это уравнение может иметь для одного из уравнений нуль функции $\Phi_l[c_1(\tau),...,c_N(\tau)]$, что приведет к изменению монотонности у функции $h_l(t)$, вместо возрастания будет убывание функции $h_l(t)$ или наоборот. Величина $h_l(t)$ может быть периодической функцией времени.

Действие для каждого дифференциального уравнения определяется по формуле

$$S_l=\int_{h_l^0}^{h_l}(-\mathrm{H}_l dh_l+p_l dq_l);$$

При этом приращение действия в случае комплексного решения в безразмерном виде равно $dS_l/\hbar=d\arg c_l$.

$$\frac{S_l}{\hbar}=\int_{h_l^0}^{h_l}(-\mathrm{H}_l dh_l+p_l dc_l);H_l=(\frac{dc_l}{dh_l})^2\Big|_{h_l=h_l^0}^{h_l=h_l}/2-\int_{c_l^0}^{c_l}D(c_l)dc_l$$

Значит, в случае ламинарного действительного решения функция Гамильтона H_l, вычисленная по этим безразмерным формулам, где вместо времени используется $h_l(t)$, равна нулю, что и является первыми интегралами. Из этих формул имеем $\mathrm{H}_l=-\frac{\partial S_l}{\hbar\partial h_l}, p_l=\frac{\partial S_l}{\hbar\partial c_l}$.

При этом приращение действия в случае комплексного решения равно $dS_l=d\arg c_l$. Значит, в случае действительного решения функция Гамильтона H_l, вычисленная по этим безразмерным формулам, где вместо времени используется $h_l(t)$, равна константе, что и является первыми интегралами. Из этих формул имеем $\mathrm{H}_l = -\frac{\partial S_l}{\partial h_l}, p_l = \frac{\partial S_l}{\partial c_l}$.

$$H_l = -\frac{\partial \arg c_l}{\partial h_l} = -\frac{\partial \arctan \frac{\mathrm{Im} c_l}{\mathrm{Re} c_l}}{\partial h_l} = \frac{\mathrm{Im} c_l \frac{\partial \mathrm{Re} c_l}{\partial h_l} - \mathrm{Re} c_l \frac{\partial \mathrm{Im} c_l}{\partial h_l}}{(\mathrm{Re} c_l)^2 + (\mathrm{Im} c_l)^2}.$$

$$p_l = \frac{\partial \arg c_l}{\partial c_l} = \frac{\partial \arctan \frac{\mathrm{Im} c_l}{\mathrm{Re} c_l}}{\partial c_l} = \frac{1}{2[1 + (\frac{\mathrm{Im} c_l}{\mathrm{Re} c_l})^2]} \left(\frac{\partial \frac{\mathrm{Im} c_l}{\mathrm{Re} c_l}}{\partial \mathrm{Re} c_l} + \frac{\partial \frac{\mathrm{Im} c_l}{\mathrm{Re} c_l}}{\partial i \mathrm{Im} c_l}\right) =$$

$$= \frac{-\mathrm{Im} c_l - i \mathrm{Re} c_l}{2[(\mathrm{Re} c_l)^2 + (\mathrm{Im} c_l)^2}$$

Где воспользовались формулой $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \mathrm{Re} z} + \frac{\partial}{\partial i \mathrm{Im} z})$, см. [3] раздел 2.1. Разрешая уравнение (2.17) относительно величины $h_l - h_l^0$, получаем две ветви решения, с положительным и отрицательным значением корня. Дифференцируя разрешенное относительно $h_l - h_l^0$ уравнение (2.17) по величине h_l, получим $F_l(c_l)\frac{dc_l}{dh_l} = 1$

$$(\frac{dc_l}{dh_l})^2 |_{h_l = h_l} / 2 - \int_{c_l^0}^{c_l} D(c_l) dc_l = \frac{\mathrm{Im} c_l \mathrm{Re} \frac{1}{F_l(c_l)} - \mathrm{Re} c_l \mathrm{Im} \frac{1}{F_l(c_l)}}{(\mathrm{Re} c_l)^2 + (\mathrm{Im} c_l)^2}, \quad (1.6.18)$$

$$p_l = \frac{-\mathrm{Im} c_l - i \mathrm{Re} c_l}{2[(\mathrm{Re} c_l)^2 + (\mathrm{Im} c_l)^2}$$

Левую часть первого уравнения (1.6.18) назовем материальным значением энергии (так как она равна значениям суммы кинетической и потенциальной энергии), а правую часть полевым значением энергии, так как она определяется мнимой фазой решения. При этом первый интеграл зависит от $N-1$ констант c_l^0, $N-1$ константы β_l^0. Кроме того, имеется одно уравнение движения, которое определяет еще две константы. В случае действительного положительного значениях c_l, c_l^0, α_l^s имеем первый интеграл - функцию Гамильтона

$$\mathrm{H}_l = (\frac{dc_l}{dh_l})^2 |_{h_l = h_l} /2 - \int_{c_l^0}^{c_l} D(c_l) dc_l = (\frac{dc_l}{dh_l})^2 |_{h_l = h_l^0} /2, l = 1,..., N-1.$$

Первая формула (1.6.18) это закон сохранения энергии с учетом излучения, причем формула для значения излучения зависит от знака $h_l - h_l^0$.

При этом правая и левая часть первого уравнения (1.6.18) может быть комплексной. Но при скачкообразном изменении левой части (1.6.18), скачком изменится и правая часть, причем величина β_l^0 останется неизменной, т.е. первый интеграл останется неизменным.

Но это свойство энергии системы при некотором ее определении, с помощью времени, равном $h_l(t)$.

Эта формула получена в предположении, что начальное и конечное состояние решения не одинаковы. Если между ними произошло излучение, то энергия системы изменится в соответствии со значением логарифма и появится зависимость от целого числа n_l^s, соответствующая разным ветвям логарифма. При этом определится значение c_l как функция квантового числа n_l^s из уравнений (1.6.17). При этом разность материальной части энергии после перескока со значения c_l^1 до значения c_l^2 определяется по формуле $(\frac{dc_l}{dh_l})^2 |_{h_l = h_l^2} /2 - \int_{c_l^1}^{c_l^2} D(c_l) dc_l$. Определение решения по формуле (1.6.17) может содержать точки ветвления решения. Но при этом вторая производная от решения стремится к бесконечности в силу наличия точки ветвления, и значит, нарушаются условия единственности и существования решения задачи Коши этого обыкновенного дифференциального уравнения. При этом сходящийся ряд, описывающий решения в точке ветвления не существует, значит, решение задачи Переход с одного значения целого числа на другое связан с изменением фазы аргумента

$$\begin{gathered}\{(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}-\sqrt{\alpha_l^s})]-\\-(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}+\sqrt{\alpha_l^s})]\}/(4\pi\sqrt{\alpha_l^s}i)\}=n_l^s\end{gathered} \quad (1.6.19)$$

При условии $c_l \to \infty$ имеем

$$\sqrt{c_l}[\ln(\sqrt{c_l^0}+\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}-\sqrt{\alpha_l^s})]/(4\pi\sqrt{\alpha_l^s}i)\}=n_l^s-i\eta+O(1/c_l);\eta=\ln c_l/2\pi$$

$$\sqrt{c_l}=\frac{(4\pi i n_l^s+4\pi\eta)\sqrt{\alpha_l^s}}{\ln(\sqrt{c_l^0}+\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}-\sqrt{\alpha_l^s})}$$

Где c_l значение переменной, при котором образуется скачок. При этом кинетическая энергия излучения определяется по правой части формулы (1.6.18).

При этом безразмерная энергия излучения пропорциональна $\varepsilon_{n_l^s} \sim \frac{1}{c_l} \sim -\frac{1}{(n_l^s-i\eta)^2}$.

Как только граница ветви логарифма достигнута, происходит перестройка целого числа, изменение на единицу, и как следствие скачок решения задачи при неизменном первом интеграле (1.6.18) проявится зависимость $c_l = c_l(n_l^s)$. Такая перестройка решения возможна при приближении к точке ветвления, т.е. когда граница ветви логарифма достигнута. Скачок решения определяется зависимостью $c_l = c_l(n_l^s)$ при неизменной константе β_l^0 в первом интеграле (1.6.18). Скачок координаты c_l вызовет и скачкообразное изменение значения $h_l(t)$ при непрерывном изменении t, что следует из уравнения (1.6.17). В случае положительных, а значит, действительных значений c_l, c_l^0, α_l^s материальная часть энергии H_l сохраняется и никаких скачков и излучений не будет, правая часть (1.6.19) равна нулю, значит, величина n_l^s неизменна.

Выводы

Нелинейные уравнения в частных производных со второй производной по времени, в случае комплексных координат положения равновесия, эквивалентной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, допускают дискретное излучение энергии. При этом сумма материальных и полевых значений энергии сохраняется. При малых значениях безразмерных параметров, когда координаты положения равновесия действительны, и значит, решение действительно, дискретного излучения нет. Проверить выводы из решения дифференциальных уравнений можно экспериментально, при малом токе дискретного излучения быть не должно. При малой силе тока наблюдается ламинарное действительное решение, и имеется непрерывное излучение. При большой силе тока имеются комплексные координаты положения равновесия, и наблюдается дискретное излучение энергии, провода высокого напряжения излучают энергию в ближней зоне. При большой дисперсии силы тока, наблюдается поступательное колебание электронов с высокой частотой, происходит излучение энергии дискретном режиме, так как образуется комплексное решение с большой действительной частью в силу поступательного движения свободных электронов. При постоянной комплексной скорости электронов в атоме, действительная часть квадрата излучения может иметь отрицательное значение, так как велика мнимая часть скорости электронов в атоме, и излучения нет, наоборот атом получает дискретную энергию.

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля т.II, Наука, М.,1973,564с.
2. Синг Дж. Л. Общая теория относительности М.: ИЛ, 1963, 432с.
3. *Якубовский Е.Г.* Физический смысл уравнений квантовой механики, электродинамики и уравнения ОТО. «Энциклопедический фонд России». 2014г., 65с., http://russika.ru/sa.php?s=890

4. *Горбунов Д.С., В.А. Рубаков* Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего взрыва. -М.: издательство ЛКИ, 2008, 552с.

5. *Якубовский Е.Г.* Общая теория гравитационного и электромагнитного поля. «Энциклопедический фонд России», 2014, http://russika.ru/sa.php?s=434

6. *Якубовский Е.Г.* Уравнение ОТО для N тел. «Энциклопедический фонд России», 2015, http://russika.ru/sa.php?s=912

7. *Якубовский Е.Г.* Связь уравнения Дирака с детерминированным уравнением. «Энциклопедический фонд России», 2014, http://russika.ru/sa.php?s=936

8. *Якубовский Е.Г.* Свойства нейтрино. «Энциклопедический фонд России», 2014, http://russika.ru/sa.php?s=933

9. *Якубовский Е.Г.* Комплексное пространство микромира. 2015, LAP LAMBERT Academic Publishing, 145 с.

10. *Якубовский Е.Г.* Комплексные решения уравнений в частных производных. Международный независимый институт Математики и Систем «МиС», №8, 2014, с. 60-66 http://math-systems.ru/files/Arhiv/19-20.09.2014/mis8.pdf#page=66

11. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т.V, ч.1. Атомная физика. 1986., 420стр.

12. *Якубовский Е.Г.* Комплексные решения уравнений в частных производных. Международный независимый институт Математики и Систем «МиС», №8, 2014, с. 60-66 http://math-systems.ru/files/Arhiv/19-20.09.2014/mis8.pdf#page=66

13. *Якубовский Е. Г.* Модель комплексного пространства и распознавание образов. На стыке наук. Физико-химическая серия. Т.2, Казань, - 2014, стр. 186-187. http://istina.msu.ru/media/publications/article/211/bd0/6068343/raspoznavobrazovwithouteqution.pdf