Уравнение Клейна-Гордона для макротел

Е.Г.Якубовский.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Аннотация

Уравнение Клейна-Гордона может быть получено из релятивистского уравнения Навье – Стокса. При этом это уравнение описывает макротела, но с измененным значением постоянной Планка при большой массе тел. При большой массе мнимая кинематическая вязкость вакуума становится больше кинематической вязкости среды, окружающей макротела и тела описываются уравнением Клейна-Гордона. При этом описывается отсутствие падения на центр, Солнце планет.

1. Связь волновой функции элементарных частиц со скоростью частиц вакуума.

Получим из релятивистского уравнения Навье – Стокса уравнение Клейна-Гордона. Рассмотрим уравнение Навье - Стокса с кинематической вязкостью $\nu = \frac{i\hbar}{2m}$ записанное в релятивистской форме, причем без учета теплового потока. Если релятивистское уравнение Навье – Стокса записано относительно тепловой функции единицы объема $w = e + p$ в локальной системе покоя см. [1]§133, то в предлагаемой формуле используется плотность в локальной системе покоя

$$\frac{i\hbar}{2m}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^0 \partial x_0} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^l \partial x_l}\right) - c\left(u^0 \frac{\partial u_k}{\partial x^0} + u^l \frac{\partial u_k}{\partial x^l}\right) = \frac{\partial p}{\rho c \partial x^k}.$$

Получили релятивистское инвариантное уравнение Навье – Стокса.

Воспользуемся равенством для четырехмерной скорости $u_k c = -\frac{i\hbar}{m}\nabla_k \ln\psi, k = 0,...,3$. При этом это равенство можно представить в виде $p_l\psi = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x^l}, l = 0,...,3$, откуда имеем определение оператора импульса $p_l = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^l}, l = 0,...,3$. Т.е. четырехмерный импульс частиц вакуума является собственным числом оператора импульса.

$$\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 - \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^k}}{\partial x^0\partial x_0} + \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 - \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^k}}{\partial x^l\partial x_l} +$$

$$+ (\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_0}\frac{\partial - \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^k}}{\partial x^0} + \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_l}\frac{\partial - \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^k}}{\partial x^l}) = \frac{\partial p}{\rho\partial x^k}$$

Разделим это уравнение на величину $\frac{\hbar^2}{m^2}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial x^k}[\frac{\partial^2\ln\psi}{\partial x^0\partial x_0} + \frac{\partial^2\ln\psi}{\partial x^l\partial x_l} + \frac{\partial\ln\psi}{\partial x_0}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^0} + \frac{\partial\ln\psi}{\partial x_l}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^l} - \frac{2m^2}{\hbar^2}\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}u^k ds] = 0.$$

Где величина $dx^k = u^k ds, k = 0,...,3$, при этом интеграл вдоль траектории равен

$$c^2(s) - c^2(s_0) = c^2(x^0, x^1, x^2, x^3) - c^2(x_0^0, x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \int\limits_{s_0}^{s}\frac{dc^2}{ds}ds =$$
$$= -\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}u^k ds = -\int\limits_{(x_0^0,x_0^1,x_0^2,x_0^3)}^{(x^0,x^1,x^2,x^3)}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}dx^k.$$

Причем как функция метрического интервала, эта величина инвариантна относительно преобразования Лоренца. Где величина s соответствует значению метрического интервала, и интеграл берется вдоль траектории движения частиц. Причем частная производная от этого интеграла вдоль траектории, равна

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\int\limits_{(x_0^0,x_1^0,x_2^0,x_3^0)}^{(x_0,x_1,x_2,x_3)}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}dx^k = \frac{d}{u^l ds}\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}u^k ds = \frac{\partial p}{u^l\rho\partial x^k}u^k = \frac{dp}{u^l\rho ds} = \frac{\partial p}{\rho\partial x^l}$$

Проинтегрируем это уравнение, получим

$$[\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x^0 \partial x_0}+\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x^l \partial x_l}+\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_0}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x^0}+\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x^l}]-\frac{2m^2}{\hbar^2}\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial p}{\rho \partial x^k}u^k ds=$$

$$=-m^2c^2/\hbar^2$$

Где константу интегрирования обозначили $m^2c^2/\hbar^2$. Умножим это уравнение на величину ψ и воспользуемся равенством $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^0\partial x_0}=\psi[\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x^0 \partial x_0}+\frac{\partial \ln\psi}{\partial x^0}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_0}],\frac{\partial^2\psi}{\partial x^l\partial x_l}=\psi[\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x^l \partial x_l}+\frac{\partial \ln\psi}{\partial x^l}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l}]$ получим уравнение Клейна-Гордона с потенциалом.

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^0\partial x_0}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^l\partial x_l}-\frac{2mU}{\hbar^2}\psi=m^2c^2\psi/\hbar^2;$$

$$U=-m\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial p}{\rho \partial x^k}u^k ds=mc^2(x^0,x^1,x^2,x^3)-mc^2(x_0^0,x_0^1,x_0^2,x_0^3)<0$$

При этом при произвольной вязкости среды уравнение запишется в виде

$$-\hbar^2(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^0\partial x_0}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^l\partial x_l})-2mU\psi=4\nu^2m^2(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^0\partial x_0}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^l\partial x_l})-2mU\psi=m^2c^2\psi;\nu=i\frac{\hbar}{2m}$$

При этом время жизни стационарного состояния зависит от координаты частицы $\psi=\frac{1}{\sqrt{V}}\exp[-i(E\Delta t-i\mathbf{p}_0\Delta\mathbf{r})/\hbar][1+0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^3]$.

При этом локальное решение сводится к равенству

$$E^2=p_0^2c^2+2mUc^2+m^2c^4.$$

Это уравнение приводится к виду

$$E-mc^2=\frac{p_0^2}{2m}+U=\frac{p_0^2}{2m}+mc^2(x^0,x^1,x^2,x^3)-mc^2(x_0^0,x_0^1,x_0^2,x_0^3)$$

Причем кинематическая вязкость вакуума считаем равной

$$\nu=i\frac{\hbar}{2m}.$$

При этом скорость потока элементарных частиц, образующих макротела равна $u_l c=-\frac{i\hbar}{m}\nabla_l\ln\psi$, где ψ волновая функция системы. При этом решение уравнения Навье – Стокса должно удовлетворять условию $\frac{\partial u_l}{\partial x_k}-\frac{\partial u_k}{\partial x_l}=0$. Для выполнения этого условия решение уравнения Навье – Стокса должно удовлетворять условию $V_l=V(x^0+x^1+x^2+x^3)$. Т.е. получается, что решение уравнения Клейна-Гордона, это частный случай решения уравнения Навье – Стокса.

Но каким образом описать решение для водородоподобного атома, используя предлагаемую идеологию. Для этого импульс надо представить в виде $p_k=p_k(x_k)$, при этом для волновой функции справедливо разделение переменных. Логарифм волновой функции $\ln\psi(r,\theta)=\ln\exp(-iEt/\hbar)+\ln R_{nl}(r)+\ln P_l^m(\theta)+\ln\exp(i\,m\varphi)$ является потенциалом для значения импульса, и удовлетворяет условию интегрирования. Т.е. градиент волновой функции представляет сумму трех функций $p_0(t)=\frac{\partial\ln\exp(-iEt/\hbar)}{\partial t}$, $p_r(r)=\frac{\partial\ln R_{nl}(r)}{\partial r}, L_\theta(\theta)=\frac{\partial\ln P_l^m(\theta)}{\partial\theta}$, $L_\varphi=\frac{\partial im\varphi}{\partial\varphi}=im$ удовлетворяющих условию интегрирования.

Вопрос заключается в том, какова кинематическая вязкость массивных тел. Если для тел со средней массой вопрос ясен, кинематическая вязкость совпадает с обычной кинематической вязкостью тела. Какова кинематическая вязкость вакуума для тел большой массы. Для элементарных частиц кинематическая вязкость вакуума $i\hbar/(2m)$. В случае тел с массой порядка планет и звезд вопрос требует дополнительного исследования. Можно высказать предположение, что она равна для N масс Планка величине $i\frac{\hbar}{2m_{Pl}}N=i\frac{\hbar}{2m_{Pl}}\frac{m}{m_{Pl}}$. С точностью до коэффициента это предположение подтверждается.

При этом радиус электрона $r=\frac{e^2}{mc^2}=\frac{\hbar}{137mc}=\lambda\!\!\!^{-}/137$, заменяется на гравитационный радиус, откуда получаем по формуле

$$137k = \frac{1}{\dfrac{\hbar}{137mc} + \dfrac{Gm}{c^2}} = \frac{1}{\dfrac{\hbar}{137mc} + \dfrac{\hbar m}{cm_{Pl}^2}} = \frac{137mc}{\hbar_{eff}}.$$

Откуда имеем формулу для эффективного значения постоянной Планка

$$\hbar_{eff} = \hbar + \frac{137Gm^2}{c} = \begin{cases} \dfrac{137Gm^2}{c} = \dfrac{137\hbar m^2}{m_{Pl}^2}, m >> m_{Pl}/\sqrt{137} \\ \hbar, m << m_{Pl}/\sqrt{137} \end{cases}.$$

При этом квантовая механика для макротел начинается с предела $m >> m_{Pl}/\sqrt{137}$. Для этого предела кинематическая вязкость среды равна $\frac{137Gm}{2c}i + \nu = \frac{137\hbar m}{2m_{Pl}^2}i + \nu$, где величина ν кинематическая вязкость среды. Начиная с массы, удовлетворяющей условию $137Gm/c = \nu = 0.1cm^2/s$ справедливо квантовое описание макротел. При массах меньше, чем величина $m = \frac{\nu c}{137G} = 10^{14}g = 10^8 t$, существенную роль играет действительная вязкость, которая преобладает над квантовыми эффектами. Трение гораздо сильнее квантовых эффектов при малых массах, и взаимодействие происходит по законам Ньютона с учетом трения. При промежуточных массах квантовые числа велики и система описывается квазиклассическим приближением, т.е. законами Ньютона.

Характерное время для элементарных частиц $\frac{\hbar}{mc^2} = 10^{-21}s$. Характерное время взаимодействия небесных тел, к примеру Земли, в вакууме $\frac{137Gm}{c^3} = 10^{-9}s$, причем, чем массивнее тела, тем взаимодействие происходит медленнее. В атмосфере Земли, учитывая, что скорость распространения возмущения равна $c = 340m/s$, имеем время взаимодействия $\frac{137Gm}{c^3} = 1.39 \cdot 10^9 s = 1.61 \cdot 10^4 d$, т.е. время взаимодействия 10^4 суток. Поэтому квантовые эффекты на Земле имеют характерное время в 10^{30} раз медленнее, чем эффекты квантовой механики микромира. В вакууме этот эффект 10^{12} раз медленнее, чем эффекты микромира. Т.е. если квантовые эффекты микромира в макромире сказывается через 1 сек, то на планеты оказывается квантовое воздействие через $10^{12}s$. Так квантовый эффект смещения орбиты Меркурия рассчитывается за 100лет. Периоды квантового излучения гравитационной энергии в эксперименте LIGO не проявлялись в течении 20 лет.

Но при мнимой большой кинематической вязкости отсутствуют пульсации, поток, окружающий тело ламинарный. В квантовой механике см. [3]§16 получено условие положительности полинома второй степени при произвольных массах тела. Записываем это условие для частиц с массой меньше массы Планка и для тел с массой больше массы Планка с общим коэффициентом α и суммируем с одинаковыми коэффициентами. Получаем условие для тел с произвольной массой, причем в силу равноправности уравнений с большой и малой массой коэффициент при суммировании одинаков.

$$\alpha^2(\delta x)^2 - \alpha + (\delta p_x)^2\left[\frac{1}{\left(\hbar\frac{137m^2}{m_{Pl}^2}+\hbar\right)^2} + \frac{1}{\hbar^2}\right]/2 > 0 .$$

Для положительности полинома необходимо, чтобы дискриминант этого уравнения был отрицательный, откуда получаем соотношение неопределенности для тела произвольной массы

$$\delta p_x \delta x > \frac{\hbar}{2\sqrt{\left[\frac{1}{\left(\frac{137m^2}{m_{Pl}^2}+1\right)^2}+1\right]/2}} = \begin{cases} \hbar/2, m << m_{Pl}/\sqrt{137} \\ \hbar/\sqrt{2}, m >> m_{Pl}/\sqrt{137} \end{cases}$$

При этом при увеличении массы тела, растет кинематическая вязкость, и решение переходит в ламинарный режим. Если квантовое решение микромира содержало большую комптоновскую частоту, и было турбулентным, с большой размазанностью – шероховатостью решения, то квантовое решение для макромира является ламинарным, и размазанности решения нет. Решение в свободном пространстве содержит малый параметр $1/\hbar_{eff} << 1/\hbar$, и волновая функция является плавной, в отличие от пульсирующей волновой функции микромира. Но уравнения те же самые, только постоянная Планка увеличилась.

Если произвести измерение над элементарной частицей, то она изменит свой импульс и координату, и ее собственное значение меняется. Аналогично и тело большой массы при столкновениях меняет свой импульс и координату в соответствии с принципом неопределенности и координата положения равновесия меняется. В случае движения по эллипсу координате положения равновесия соответствует большая и малая полуось эллипса. Координата положения равновесия тела, это аналог собственного значения элементарной частицы.

При этом спин у макротела не постоянный, так же как и скорость распространения возмущения. Это связано с другой формулой связи размера тела и его массы, которые зависят от скорости распространения возмущения в случае элементарных частиц.

При этом уравнение Клейна-Гордона для свободного пространства выглядит таким образом (для тел большой массы потенциалом не гравитационного происхождения можно пренебречь)

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial(x_0)^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial(x_l)^2}-\frac{2m_{Pl}^2U}{137^2 m\hbar^2}\psi=\frac{m_{Pl}^2c^2}{137^2\hbar^2}\psi, U=-\frac{GMm}{r}.$$

Не релятивистским решением этого уравнения является функция $E_n = mc^2 - \frac{mm_{Pl}^4G^2M^2}{2\cdot 137^2\hbar^2 n^2 m^2} = mc^2 - \frac{c^2M^2}{2\cdot 137^2 n^2 m}, n >> 1$. При этом для главного квантового числа получим формулу $\frac{\hbar^2}{me^2}n^2 = r_n$, где величина r_n радиус вращения вокруг ядра, Солнца. Подставляя $e^2 = GmM, \hbar_{eff} = \frac{137Gm^2}{c}$, получим для главного квантового числа n формулу

$n=\sqrt{\dfrac{2r_nM}{mr_{ge}}}/137=\sqrt{\dfrac{r_nMc^2}{m^2G}}/137=10^7, r_{ge}=\dfrac{2Gm}{c^2}$. Откуда энергия равняется

$$E_n=mc^2-\frac{mm_{Pl}^4G^3M}{2\hbar^2c^2r_n}=mc^2-\frac{GmM}{2r_n}$$

Тогда уравнение Дирака для тел большой массы имеет вид см. [2]

$$\gamma_{ik}^{\mu}(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-\frac{e}{c}A_{\mu})\psi_k=mc\psi_i$$

Преобразованное уравнение Дирака для тел большой массы имеет вид

$$\gamma_{ik}^{\mu}(i\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-\frac{m_{Pl}e}{137m\hbar c}A_{\mu})\psi_k=\gamma_{ik}^{\mu}i\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\psi_k=\frac{m_{Pl}c}{137\hbar}\psi_i;\frac{m_{Pl}e\Delta r}{137m\hbar c}A_{\mu}<<1.$$

Причем электромагнитным полем планеты можно пренебречь.

Использование квантовой механики для описания движения макротел позволяет объяснить стационарные орбиты планет. Планеты движутся с центростремительным ускорением и должны излучать гравитационную энергию, так как описываются волновым уравнением. Это следует из уравнения ОТО, при малых поправках к метрическому тензору Минковского. Причем гравитационное взаимодействие тел солнечной системы определяется поправками, равными гравитационному радиусу, деленному на радиус планеты, т.е. поправки малы. При этом должно произойти падение на центр, на Солнце. Большая полуось эллипса равна $a=\dfrac{GMm}{2|E|}$, малая полуось равна $b=\dfrac{M}{\sqrt{2m|E|}}$ см. [4]§15. Где величина E полная отрицательная энергия тела, величина M равна орбитальному моменту тела. Интенсивность полного излучения ускоренно двигающегося тела $I=\dfrac{2GMmw^2}{3c^3}=\dfrac{2GMmV^4}{3c^3R^2}$ см. [5]§67, где величина w ускорение тела. При непрерывном излучении энергии ускоренно двигающегося тела энергия стремится к минус бесконечности, причем значение большой полуоси стремится к нулю, т.е. происходит падение на центр системы. Время, за которое отрицательная энергия удвоится равно

$\frac{2GMmV^4}{3c^3R^2}t = \frac{GMm}{2R}$. Откуда имеем время, за которое отрицательная энергия удвоится

$$t = \frac{3c^3R}{4V^4} = \frac{81\cdot 10^{30}1.49\cdot 10^{13}}{4\cdot 2.97^4 10^{24}} = 0.37\cdot 10^{18}s = 1.2\cdot 10^{11}\,year$$

Значит, большая полуось эллипса, описывающая вращение Земли вокруг Солнца за каждый год уменьшается на 1.2м. За столетие на 120м. Это означает, что период вращения Земли за один год меняется на 0.00026 сек.

Но этого не происходит, так как планеты описываются квантовыми законами, и излучение происходит квантами.

Список литературы

1. *Л.Д.Ландау, Е.М. Лифшиц* Гидродинамика, т.VI, М.-, «Наука», 1988г.,735стр.

2. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика, т.IV, М.,- «Наука»,1989 г., 727стр.

3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика Нерелятивистская теория т.III, Наука, М.,1969,768с.

4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. Т. I, М.: Наука, 1965г., 203стр.

5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. Т. II, М.: Наука, 1973г.,503стр.