

Исследование решения уравнения Навье – Стокса

Е.Г. Якубовский

e – mail yakubovski@rambler.ru

Аннотация

Решение нелинейных уравнений в частных производных могут определять значение безразмерных неизвестных функций с большой величиной (например, большое число Рейнольдса). При этом они сводятся к счетному количеству обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Турбулентные решения, которые соответствуют большим значениям неизвестной функции, оказываются комплексными. Переход от действительного решения к комплексному турбулентному решению реализуется через бесконечность правой части обыкновенной системы дифференциальных уравнений, к которым сводится уравнение Навье - Стокса. При этом действительное решение уравнения Навье – Стокса определяет стремящуюся к бесконечности функцию. При этом комплексное решение конечно. Вычислен коэффициент сопротивления потока жидкости в круглом трубопроводе при разных шероховатостях стенок трубопровода.

1. Учет ламинарного решения уравнения Навье – Стокса

Значение коэффициента сопротивления круглого трубопровода при произвольном числе Рейнольдса и степени шероховатости известно только из эксперимента. Предлагается с помощью комплексного решения получить решение уравнения Навье – Стокса и на основе качественных соображений определить влияние шероховатости на решение уравнения Навье – Стокса. При этом с точностью 10% удалось построить классические графики Никурадзе зависимости коэффициента сопротивления круглого трубопровода в зависимости от произвольного числа Рейнольдса и степени шероховатости.

Введение

Проблема описания движения жидкости в турбулентном режиме не решена. Это создает трудности при расчете нефтяных, газовых трубопроводов. Кроме того, не существует теоретических методов описания движения тела в турбулентной среде. Это и описание движения летательного аппарата, движения подводной лодки или надводного корабля в турбулентном режиме. Без использования моделирования движущегося тела в аэродинамических трубах, или водных бассейнах, невозможно проектирование движущихся в вязкой среде тел. Существуют приближенные формулы аппроксимации коэффициента сопротивления трубопровода на отдельных участках числа Рейнольдса см.[1],[2]. Известны классические экспериментальные графики Никурадзе по определению коэффициента сопротивления круглого трубопровода в зависимости от числа Рейнольдса и степени шероховатости. Применяется аппроксимация конвективного члена, сводящая задачу решения уравнения Навье – Стокса к линейной с эффективной турбулентной вязкостью. Но такое преобразование искажает решение уравнения Навье – Стокса и для совпадения с экспериментом коэффициент турбулентной вязкости может иметь произвольное значение, вплоть до отрицательного. Применяется метод Галеркина, сводящий решение задачи гидродинамики к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Но при турбулентном режиме эта система нелинейных уравнений имеет комплексные положения равновесия, т.е. решение комплексное. И действительно в турбулентном режиме система уравнений гидродинамики в действительной плоскости не имеет решения, решение уравнения стремится к бесконечности см. [3]. При этом комплексное решение конечно. Физический смысл комплексного решения и его колебательный характер мнимой части см. [4],[5]. Т.е. решать задачу гидродинамики в турбулентном режиме надо в комплексной плоскости. При этом турбулентное решение определяется не однозначно, а имеется счетное

количество ветвей решения.

1.1. Расчет трубопровода с круглым сечением в случае несжимаемой жидкости

Реализацией данного алгоритма решение является расчет трубопровода с круглым сечением. Решение задачи о трубопроводе с круглым сечением, будем искать в виде $V_z = V_0(t)[1 - r^2/a^2(z)]$ в цилиндрической системе координат. Так как внешнее воздействие имеется только для продольной оси $P(z) = P_2 + \frac{P_1 - P_2}{L}z$, где P_2, P_1 давление в начальной и конечной части трубопровода, величина L это длина трубопровода, радиальной и угловой скоростью пренебрегаем. Внешнее воздействие равно $h_z = \frac{P_1 - P_2}{L}$. Согласно

формуле (1.2.2) градиент давления равен $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_1 - P_2}{L}$. Получим уравнение

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{P_1 - P_2}{L} + \nu \Delta V_z.$$

Подставляем значение скорости, получим уравнение

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} (1 - r^2/a^2) + 2V_0^2 (1 - r^2/a^2) \frac{r^2}{a^3} \frac{da}{dz} = -\frac{P_1 - P_2}{\rho L} - \nu \frac{4V_0}{a^2}$$

Умножаем это уравнение на радиус и интегрируем это уравнение по радиусу, так как система координат цилиндрическая, получим

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} a^2/6 + \frac{(P_1 - P_2)a^2}{2\rho L} + 2\nu V_0 = -V_0^2 \frac{ada}{6dz}.$$

Для получения счетного количества решений, умножаем это уравнение на функцию $r(1 - r^2/a^2)^n$ и интегрируем по пространству. Получаем счетное количество решений, как для гладкой, так и шероховатой поверхности. При этом, как и у уравнения Шредингера получается счетное количество решений,

каждое со своей собственной энергией. При переходе из одного состояния в другое излучается дискретная энергия. Минимум собственной энергии определяет выбор решения.

Беря модуль правой части, и находя средний модуль тангенса угла отклонения, получим

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} a^2 / 6 + \frac{(P_1 - P_2) a^2}{2\rho L} + 2\nu V_0 = V_0^2 \frac{a \langle |da/dz| \rangle}{6} = V_0^2 \frac{2ak}{l} \quad (1.1.1)$$

В случае выбора знака минус у значения среднего модуля тангенса угла отклонения $\langle |da/dz| \rangle$, получится, что шероховатости увеличивают скорость потока, так как полная производная $\frac{dV_0}{dt}$ увеличится, что не правильно, скорость потока должна уменьшаться за счет шероховатостей.

При ведении турбулентной вязкости используется отрицательный знак у средней скорости, связанной с корреляционной функцией скорости процесса $-\rho \langle u'_i u'_\alpha \rangle = \rho K \frac{\partial \langle u'_i \rangle}{\partial x_\alpha}$ см. [1], что приводит к знаку плюс у среднего по модулю тангенса наклона шероховатости. Уравнение движения с учетом возмущения имеет вид

$$\frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho \langle u_i \rangle \langle u_\alpha \rangle + \rho \langle u'_i u'_\alpha \rangle) = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \rho \nu \langle \Delta u_i \rangle$$

Т.е. конвективный член нужно брать с учетом минуса, причем правую часть (1.1.1) брать со знаком плюс. Кроме того, надо выбирать знак плюс у среднего тангенса модуля наклона шероховатости, чтобы получилось комплексное турбулентное решение. В противном случае, решение, описывающее пульсирующий турбулентный режим не получится.

Переходя от радиуса к диаметру трубопровода и разделив на величину $\nu^2 k / (dl)$, получим

$$\frac{dR_0}{d\tau} = R_0^2 - 2R_0R_{cr} + \frac{T}{8}; T = \frac{(P_2 - P_1)d^3R_{cr}}{\rho v^2 L} \quad (1.1.2)$$

$$\tau = 24t \cdot v / (R_{cr} d^2), R_0 = V_0 d / v, 1/R_{cr} = \langle |da/dz| \rangle / 12 = k/l = \langle |\tan \alpha| \rangle$$

Если же использовать другую ветвь квадратного корня из дисперсии, то получим не устойчивое решение и уравнение

$$\frac{dR_0}{d\tau} = -R_0^2 - 2R_0R_{cr} + \frac{T}{8}.$$

Тогда стационарное решение при большом перепаде давления имеет вид

$$R_0 = -R_{cr} + \sqrt{R_{cr}^2 + T/8}.$$

Ламинарное решение этих двух уравнений общее. В турбулентном режиме при больших давлениях имеет линейную зависимость числа Рейнольдса от корня из давления. По мере увеличения давления растет и значение числа Рейнольдса, что увеличивает давление. Т.е. решение не устойчиво. В случае комплексного решения оно равно

$$R_0 = R_{cr} - i\sqrt{T/8 - R_{cr}^2}.$$

При этом с ростом давления растет мнимая часть скорости, что не приводит к росту действительного давления.

Если микро-шероховатости $\langle |\tan \alpha| \rangle$ распределены по всей поверхности трубопровода, они находятся и на макро шероховатостях и определяют критическое число Рейнольдса и коэффициент сопротивления при числе Рейнольдса, равном 2300. Микро-шероховатости имеют молекулярную природу и определяются средним размером атома, равным среднему геометрическому между размером ядра r_A , и размером орбиты Бора $\sigma = \sqrt{r_A a_0}$, при расстоянии между атомами $a = 3.043A$, равному некоторой величине, определяемой свойствами границы трубопровода, железом, титаном и углеродом. Расстояние между атомами железа $a_{Fe} = 2.87A$, между атомами титана $a_{Ti} = 3.46A$, между атомами углерода $a_C = 3.567A$ см. [7]. При этом

абсолютная величина тангенса наклона высоты микро-шероховатости поверхности металла в трубопроводе определяется по формуле

$$h(z) = \langle |\tan \alpha| \rangle = \sum_{n=-N}^N \exp[-(z - na)^2 / 2\sigma^2] / (2N\sqrt{2\pi}).$$

Средний тангенс наклона

равен

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{cr}} &= \int_{-\infty}^{\infty} h(z) \frac{dz}{2Na} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(z - na)^2 / 2\sigma^2] dz}{2\sqrt{2\pi}a} = \frac{\sigma}{2a} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 6.086} \sqrt{\frac{r_A}{a_0}} = \frac{1}{2 \cdot 6.086} \sqrt{\frac{1.4 \cdot 10^{-13}}{0.5 \cdot 10^{-8}}} = \frac{1}{2300} \end{aligned}$$

Величина критического числа Рейнольдса относительно диаметра равна $R_{cr} = 2300$. Но почему критическое число Рейнольдса для сферы равно $3 \cdot 10^5$.

Это связано с разным определением критического числа Рейнольдса. Оно равно

$$\frac{1}{R_{cr}} = \frac{da}{ds} = \frac{dl_{eff}}{ds} \cdot \frac{a}{l_{eff}} = \frac{1}{2300} \cdot \frac{a}{l_{eff}},$$

где величина l_{eff} эффективный,

гидродинамический размер тела, включая среду, a истинный геометрический

размер тела, причем $\frac{dl_{eff}}{ds} = |\tan \alpha| = \frac{1}{2300}$ молекулярный тангенс наклона

шероховатости. Причем отношение $\frac{a}{l_{eff}}$ может иметь значение $\frac{a}{l_{eff}} = 0.01$.

Величина критического числа Рейнольдса равна $R_{cr} = 2300$. Макро-шероховатости $\langle |da/dz| \rangle$ более редкие и определяют коэффициент сопротивления на числах Рейнольдса в 12 и более раз больше.

Получаем условие стационарности для уравнения Навье – Стокса с учетом одного члена ряда-решения в одномерном случае

$$R_0^2 - 2R_0R_{cr} + T/8 = 0,$$

В одномерном случае при постоянстве сечения трубопровода уравнение неразрывности выполняется тождественно. Ламинарное решение этого

уравнения равно

$$R_0 = R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8} = [R_{cr}/\sqrt{T} - \sqrt{R_{cr}^2/T - 1/8}]\sqrt{T}.$$

При внешнем давлении, равном $T = 8R_{cr}^2$ начинается комплексное решение и турбулентный режим, так как число Рейнольдса в этой точке равно критическому значению. Из эксперимента и путем проделанного вычисления имеем значение критического числа Рейнольдса для круглого трубопровода

$$R_{cr} = \frac{l}{k} = \frac{1}{\langle |\tan \alpha| \rangle} = 2300. \quad \text{Коэффициент сопротивления трубопровода с}$$

круглым сечением определяется по формуле (в формулу подставляем перепад давления, выраженный через безразмерное давление)

$$\lambda = \frac{2\Delta P_L d}{\rho V_a^2 L} = \frac{2T v^2 k}{V_a^2 d^2 l} = \frac{2T}{R_{cr} |R_a^2|},$$

Средняя скорость, входящая в число Рейнольдса, равна

$$V_a = \int_0^a r V_0 (1 - \frac{r^2}{a^2}) dr / \int_0^a r dr = V_0/2, R_a = \frac{V_a d}{\nu} = \frac{R_0}{2}.$$

Асимптотика коэффициента сопротивления трубопровода λ_{lam} с круговым сечением для ламинарного режима вычислена верно.

$$R_a = R_0/2 = (R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8})/2 \cong \frac{T}{32R_{cr}}, \frac{T}{8R_{cr}^2} \ll 1, \lambda_{lam} = \frac{2T}{R_{cr} |R_a^2|} = \frac{64}{|R_a|}$$

Асимптотика получена при малом числе Рейнольдса, когда конвективный член мал.

В случае большого перепада давления, получаем комплексное турбулентное решение $R_0 = R_{cr} - i\sqrt{T/8 - R_{cr}^2} = (R_{cr}/\sqrt{T} - i\sqrt{1/8 - R_{cr}^2/T})\sqrt{T}$.

Если считать точнее, то вклад вращательной мнимой части в поступательную скорость движения потока соответствует корню из мнимой части согласно формуле (1.1.3)

$$\frac{R_0}{\sqrt{T}} = \frac{R_{cr}}{\sqrt{T}} - i^4 \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{R_{cr}^2}{T}} \sqrt{\beta} = \sqrt{\frac{R_{cr}^2}{T} + \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{R_{cr}^2}{T}}} \beta \exp(i\varphi)$$

$$\beta = \{\alpha / [k(T, \xi_0) R_{cr} / \omega l(T, \xi_0) + 1]\}^\sigma, \quad (1.1.3)$$

$$\alpha = \omega = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} = 1.31, \sigma = 0.25 \cdot 3/2 = 3/8$$

причем необходимо использовать величину отношения числа Рейнольдса на корень из безразмерного давления, как величину порядка единицы в турбулентном режиме. Число Рейнольдса потока пропорционально на бесконечности давления $R \sim \sqrt{T} \sim d_{eff}^{3/2}$. При этом степень усреднения пропорциональна высоте шероховатости, стремящейся к нулю, хотя самая гладкая поверхность соответствует среднему модулю тангенса наклона, равному обратной величине критического числа Рейнольдса. Так как из мнимой части выражения для числа Рейнольдса потока извлекается корень четвертой степени, имеем для эффективного диаметра d_{eff} формулу

$$d_{eff} / d \sim \lim_{k \rightarrow 0} [\alpha(1 - kR_{cr} / \omega l)]^{1/4} = \lim_{k \rightarrow 0} (\alpha - kR_{cr} / l)^{1/4} = \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{1 + kR_{cr} / \omega l} \right)^{1/4}.$$

Величины $\alpha = \omega$, и при бесконечно малой шероховатости сокращаются, хотя такая ситуация и не реализуется. Но эти формулы справедливы для данной схемы решения. При решении в виде ряда получится вычисляемое другое значение α . Самая гладкая поверхность соответствует среднему модулю тангенса наклона, равного обратному значению критического числа Рейнольдса, так как самые малые модули тангенса наклона соответствуют молекулярному уровню шероховатости. При этом эффективный диаметр меньше истинного диаметра. Высота шероховатости может стремиться к нулю, одновременно с периодом шероховатости l . Т.е. величина $\left(\frac{\alpha}{1 + 1/\omega}\right)^{1/4}$ это максимальное

отношение эффективного диаметра к истинному диаметру. Для внешней задачи эффективный диаметр увеличится, и коэффициент β определится по формуле

$\beta = \{[k(T, \xi_0)R_{cr} / \omega l(T, \xi_0) + 1] / \alpha\}^\sigma$. Для обтекания сферы при нулевой высоте шероховатости эффективный размер сферы совпадет с истинным размером сферы, т.е. коэффициенты $\alpha = \omega = 1$. При переходе от сферического тела к цилиндрическому с круговым сечением, этот коэффициент будет равен $\alpha = \omega = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} = 1.31$

При этом коэффициент β пропорционален $\beta \sim \langle d^{3/2} \rangle = d^{3/2} \{ \alpha / [k(T, \xi_0)R_{cr} / \omega l(T, \xi_0) + 1] \}^\sigma$, $\sigma = \frac{1}{4} \frac{3}{2} = \frac{3}{8}$, который при нулевой макро шероховатости эффективный диаметр равен $\alpha^{2\sigma/3}$, т.е. при увеличении степени шероховатости эффективный диаметр уменьшается. При этом отношение тангенса наклона макро шероховатостей к микро шероховатостям больше чем величина $k / (l \langle |\tan \alpha| \rangle) = 1$.

Вычислим изменение диаметра трубопровода при условии равенства макро шероховатостей микро-шероховатостям из эмпирической формулы по уменьшению среднего квадрат значения диаметра, получится, что диаметр уменьшился в $[(1/\omega + 1)/\alpha]^{1/4} = 1.14$ раза. При отношении $l/k = 30$, получаем уменьшение диаметра трубопровода в $[2300/(30 \cdot \omega) + 1]^{1/4} = 2.73$ раза.

При этом диаметр изменяется только у коэффициента пульсирующей части решения, т.е. у мнимой части, откуда и возникает множитель $\beta = \{ \alpha / [k(T, \xi_0)R_{cr} / \omega l(T, \xi_0) + 1] \}^\sigma$, так как мнимый член пропорционален $\sqrt{T} \sim d_{eff}^{3/2}$, который усредняется. Квадратный корень $\sqrt[4]{1/8 - R_{cr}^2/T}$ при этом соответствует среднему значению диаметра.

При этом учтено влияние шероховатости стенок турбулентного потока на мнимую часть числа Рейнольдса потока. Чтобы получить графики с постоянной высотой шероховатости, надо ввести эффективный средний модуль тангенса

угла наклона шероховатостей. Эффективный средний модуль тангенса угла шероховатостей должно зависеть от внешнего давления $\frac{k(T, \xi_0)}{l(T, \xi_0)}$.

Причем на бесконечности числа Рейнольдса, или безразмерного давления имеем шероховатость, соответствующую постоянной высоте шероховатости $\frac{k(\infty, \xi_0)}{l(\infty, \xi_0)} = \frac{k}{r_0} = \frac{1}{\xi_0}$, где k среднеквадратичная высота шероховатости, r_0 радиус круглого сечения трубопровода.

Формула подобрана таким образом, чтобы правильно определять зависимость числа Рейнольдса относительно внешнего давления и коэффициент сопротивления трубопровода при бесконечном числе Рейнольдса и внешнего давления $\text{Im } R_0 = -i^4 \sqrt{1/8} \{ \alpha / [k(\infty, \xi_0) R_{cr} / \omega l(\infty, \xi_0) + 1] \}^\sigma \sqrt{T}$ при коэффициенте сопротивления, равном величине $\lambda = \frac{16\sqrt{2}}{R_{cr} [\alpha / (R_{cr} / \omega \xi_0 + 1)]^{2\sigma}}$.

Эти же коэффициенты получаются при решении с помощью ряда, но вместо величины $1/8$ в случае ряда используется коэффициент $4/9$. Другое значение константы приводит к другому значению коэффициента α .

При постоянном среднем модуле тангенса угла наклона шероховатостей $\frac{k}{l}$, но разной высоте шероховатостей k , получается график отличный от графика Никурадзе.

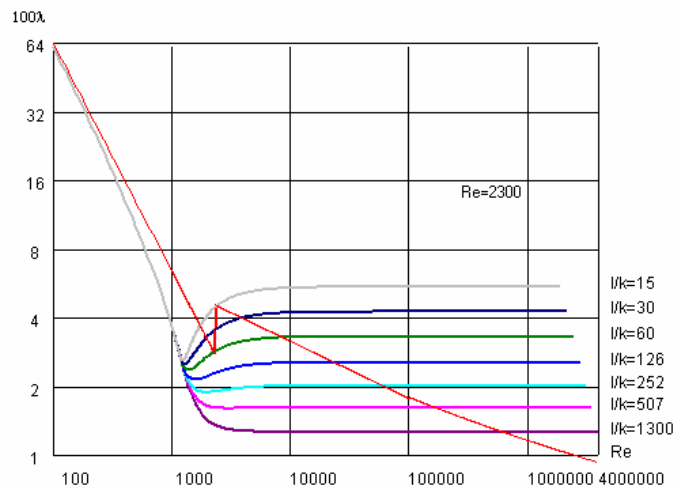


Рис.1 График зависимости коэффициента сопротивления круглого трубопровода от числа Рейнольдса при разных среднеквадратичных тангенсах наклона шероховатости

Но формула Никурадзе получена при постоянном отношении радиуса трубопровода r_0 к средней высоте шероховатости k . Формула (1.1.3) содержит эффективный средний модуль тангенса угла наклона шероховатости, который выражен через отношение радиуса трубопровода к средней высоте шероховатости через безразмерное давление.

$$\frac{l(T, \xi_0)}{\delta(T, \xi_0)} = \{ \xi_1 \exp[-|\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}}| / |\alpha(\xi_0)|] + \xi_0 [1 - \exp(-|\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}}| / |\alpha(\xi_0)|)] \} \times \\ \times \{ 1 + 0.4 \exp\{-[\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}}] \beta(\xi_0) / \gamma(\xi_0)\} \}, \xi_0 = r_0 / k, \xi_1 = (R_{cr} / 2)^{1/10} = 2$$

Величина $T_{cr} = 8R_{cr}^2$. Влияния эффективного среднего модуля тангенса наклона шероховатостей на свойство потока зависит от числа Рейнольдса или перепада давления.

Эмпирическая формула по определению коэффициентов $\alpha(\xi_0), \beta(\xi_0), \gamma(\xi_0)$ следующая

$$\alpha(\xi_0) = R_{cr} \frac{\xi_0}{1.5}, \quad \beta(\xi_0) = \frac{\xi_0}{4}, \quad \gamma(\xi_0) = R_{cr} \xi_0^{1.5} / 4$$

При этом в начале образования мнимой части комплексного решения $T = T_{cr} = 8R_{cr}^2$, или начале турбулентного решения, тангенс наклона шероховатостей приблизительно равен 2, и графики при разных тангенсах наклона шероховатостей совпадают.

При этом коэффициент сопротивления потока в круглом трубопроводе определяется по формуле $\lambda = \frac{2T}{R_{cr} |R_a|^2}$, число Рейнольдса, вычисленное на

основании средней скорости течения потока, равно $R_a = R_0/2$. Коэффициент сопротивления на бесконечности давления пропорционален

$\lambda = \frac{16\sqrt{2}}{R_{cr} [\alpha / (R_{cr} / \omega \xi_0 + 1)]^{2\sigma}}$. Приведем график решения, полученного с

помощью одного члена ряда.

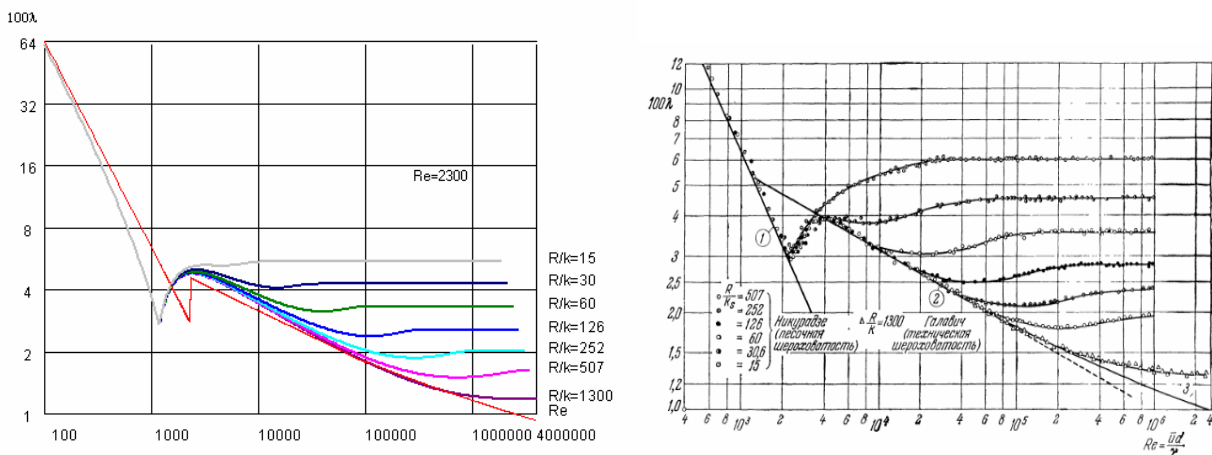


Рис.2 Теоретическая и экспериментальная зависимость коэффициента сопротивления круглого трубопровода от числа Рейнольдса при разной степени шероховатости

Для сравнения теоретического и экспериментального графика зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса потока приведен экспериментальный график Никурадзе справа на рис.2. Ошибка теоретического графика относительно экспериментального примерно 10%. Отмечу, что график, приведенный на рисунке Никурадзе в ламинарной части решения не точен, по

мере приближения к критическому числу Рейнольдса появляется отличие от соотношения $\lambda = 64/R$, что отражено на теоретическом графике, и мало проявляется на экспериментальном. Экспериментальный график для логарифма давления и числа Рейнольдса изображен прямой линией, а должно быть отличие от прямой линии по мере увеличения влияния конвективного члена.

Данный график решения получен для постоянной температуры потока для каждого сечения потока, поэтому в случае слабой зависимости кинематической вязкости от температуры формулы не изменятся. Для его реализации в случае турбулентного режима необходимо подставить в формулу приведенное давление и отношение радиуса трубопровода к высоте шероховатости

$$|R_0| = \sqrt{R_{cr}^2 + \sqrt{T^2/8 - TR_{cr}^2} \beta}$$

$$\beta = \{\alpha/[k(T, \xi_0)R_{cr} / \omega(T, \xi_0) + 1]\}^\sigma$$

$$\frac{l(T, \xi_0)}{k(T, \xi_0)} = \{\xi_1 \exp[-|\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}}| / \alpha(\xi_0)] + \xi_0 [1 - \exp(-|\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}}| / \alpha(\xi_0))]\} \times$$

$$\times \{1 + 0.4 \exp\{-[\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}} \beta(\xi_0)] / \gamma(\xi_0)\}, \xi_0 = \frac{r_0}{\delta_0}$$

Причем формула построена таким образом, чтобы $\frac{l(\infty, \xi_0)}{k(\infty, \xi_0)} = \xi_0$. В случае

ламинарного режима имеется простая формула для определения числа

Рейнольдса $R_0 = R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8}$.

1.2. Алгоритм решения задачи гидродинамики при произвольной геометрии потока

Уравнение Навье – Стокса в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 V_k \frac{\partial V_i}{\partial x^k} = -\frac{\partial P}{\rho \partial x^i} + \nu \Delta V_i. \quad (1.2.1)$$

Для этого решаем трехмерную ламинарную стационарную задачу без учета конвективного члена при заданном внешнем воздействии g_l

$$\frac{\partial P}{\rho \partial x_i} = \nu \Delta V_i.$$

Приведем эту задачу к безразмерному виду, разделив на величину ν^2/d^3 , получим безразмерное уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial y_i} = \Delta R_i,$$

$$R_s = V_s d / \nu, p = \frac{P d^2}{\rho \nu^2}, y_s = s / d, h_s = g_s d^2 / \nu^2$$

Решением этой задачи служит функция

$$R_s(y_1, y_2, y_3) = - \int_V \frac{1}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{z}|} \frac{\partial p}{\partial z_s} dz_1 dz_2 dz_3.$$

Строим решение уравнения неразрывности при внешнем воздействии, где величина r_i отклик на внешнее воздействие

$$\frac{\partial R_i - r_i}{\partial x^i} = \int_V \frac{y_s - z_s}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2} \left(\frac{\partial p}{\partial z_s} - h_s \right) dz_1 dz_2 dz_3 = 0 \quad (1.2.2)$$

Откуда получаем уравнение по определению давления в потоке

$$\int_V \frac{y_s - z_s}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2} \frac{\partial p}{\partial z_s} dz_1 dz_2 dz_3 = \int_V \frac{y_s - z_s}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2} h_s dz_1 dz_2 dz_3.$$

Давление ищем в виде $p = \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(z_1, z_2, z_3)$. Подставляем его в подынтегральное выражение, умножаем на величину $\varphi_m(y_1, y_2, y_3)$, и интегрируем по пространству, получаем систему линейных уравнений

$$b_m = A_{mn} a_n.$$

Где имеем значения коэффициентов

$$A_{mn} = \int_V \int_V \varphi_m(y_1, y_2, y_3) \frac{y_s - z_s}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2} \frac{\partial \varphi_n(z_1, z_2, z_3)}{\partial z_s} dz_1 dz_2 dz_3 dy_1 dy_2 dy_3$$

$$b_m = \int_V \int_V \varphi_m(y_1, y_2, y_3) \frac{y_s - z_s}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2} h_s(z_1, z_2, z_3) dz_1 dz_2 dz_3 dy_1 dy_2 dy_3$$

Где величина $h_l(y_1, y_2, y_3)$, определяется внешним воздействием. Приведем уравнение Навье – Стокса к безразмерному виду, разделив его на величину v^2/d^3 , получим безразмерное уравнение

$$\frac{\partial \mathfrak{R}_l}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^3 \mathfrak{R}_k \frac{\partial \mathfrak{R}_l}{\partial y_k} = -\frac{\partial p}{\partial y_l} + \Delta \mathfrak{R}_l$$

$$\mathfrak{R}_l = \frac{V_l d}{v}, y_l = x_l/d, \tau = tv/d^2, p = \frac{Pd^2}{\rho v^2}, h_l = g_l \frac{d^2}{v^2} = \frac{\partial p}{\partial y_l}.$$

Умножаем уравнение Навье – Стокса на сечение трубки тока, записываем уравнение вдоль ламинарного решения, вводя трубку тока, поток в которой постоянен см. [8]. $\Gamma_s = \int_{S_s} \mathfrak{R}_s ds_s / d^2$. В конвективном члене и в градиенте

давления введем производную по направлению, соответствующую направлению линий потока ламинарного решения. При подстановке в уравнение решения в виде

$$\Gamma_s = \alpha_s(\tau) R_s[y_1(\alpha, \beta), y_2(\alpha, \beta), y_3(\alpha, \beta)] \quad (1.2.3)$$

Где величина S_s сечение трубки тока в ламинарном режиме, величина $R_s[y_1(\alpha, \beta), y_2(\alpha, \beta), y_3(\alpha, \beta)]$ это стационарное решение уравнения Навье – Стокса без конвективного члена, который для трубки тока равен нулю, как не зависящий от продольной координаты.

Причем эти трубки тока строим при любом внешнем воздействии, проявляющемся в перепаде давления. Далее учитываем шероховатости, и при некоторых условиях получаем комплексное турбулентное решение, которое связано с влиянием квадратичного конвективного члена с малым множителем, учитывающим шероховатость, который приводит к комплексному решению при большом перепаде давления. При этом действительное решение, которое получается при другом знаке модуля среднего модуля отклонения, отбрасываем, как не определяющее колеблющееся, турбулентное решение.

Причем мнимая часть решения определяет пульсации решения. В случае выбора другого знака квадратного корня при учете корреляционной функции процесса $\langle u'_i u'_k \rangle$, где величина u'_k отклонение скорости от среднего значения, турбулентная вязкость становится отрицательной.

Подставим решение (1.2.3) в уравнение Навье – Стокса и проинтегрируем по трубке тока, разделив на площадь сечения трубопровода. Тогда конвективный член имеет вид

$$\sum_{k=1}^3 \Re_k \frac{\partial \Re_l}{\partial y_k} = -\alpha_s^2(\tau) \frac{da}{ds} \int_{S_s} R_s^2 [y_1(\alpha, \beta), y_2(\alpha, \beta), y_3(\alpha, \beta)] d\alpha d\beta$$

Введение шероховатости приводит к зависимости радиуса трубопровода $a_0(s)$ от степени макро-шероховатости. Далее выделяем член da_0/ds связанный с шероховатостью, находим среднее значение его модуля. При этом произведем усреднение уравнения по величине s . Причем получается, что конвективный член в ламинарном режиме при гладкой поверхности, равен нулю и только при учете шероховатости он имеет значение. Получим уравнение

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \tau} \int_{S_s} R_s d\alpha d\beta + \alpha_s^2 \left\langle \frac{da}{ds} \right\rangle \int_{S_s} R_s \frac{\partial R_s}{\partial a} d\alpha d\beta - \frac{\partial \int_{S_s} p d\alpha d\beta}{\partial s} - \alpha_s \int_{S_s} \Delta R_s d\alpha d\beta$$

Чтобы учесть шероховатость поверхности трубопровода, и получить турбулентное решение, надо учесть средний модуль тангенса угла наклона шероховатостей. Тогда этот конвективный член будет иметь малый множитель, и конвективный член отличен от нуля и пропорционален средней величине

тангенса наклона модуля шероховатостей $\left\langle \left| \frac{da_0}{ds} - \left\langle \frac{da_0}{ds} \right\rangle \right| \right\rangle$ при наличии члена,

связанного с не постоянным сечением трубопровода $\frac{d \langle a_0 \rangle}{ds}$. При этом у

комплексного турбулентного решения линии тока сохраняются, соответствующие линиям тока ламинарного решения. Но будет пульсирующее решение, относительно ламинарных линий тока. Причем пульсации определяются

мнимой часть скорости, причем мнимая часть решения, равная константе, означает пульсации с амплитудой, равной мнимой части скорости.

Подставим решение (1.2.3) в уравнение Навье – Стокса и проинтегрируем по трубкам тока, умножим на R_{cr} , где эта величина удовлетворяет условию $1/R_{cr} = \langle |\tan \alpha| \rangle$, где $\langle |\tan \alpha| \rangle$ средний модуль тангенса наклона не устранимых микро-шероховатостей, огибающая которых определяет макро-шероховатости, получим уравнение

$$R_{cr} \frac{d\alpha_s(\tau)}{d\tau} = F_s \alpha_s^2 - 2R_{cr} \alpha_s G_s + H_s$$

$$F_s = \left\langle \frac{da}{ds} \right\rangle \int_{S_s} R_s [y_1(\alpha, \beta), y_2(\alpha, \beta), y_3(\alpha, \beta)] \frac{\partial R_s}{\partial a} d\alpha d\beta$$

$$G_s = - \int_{S_s} \Delta R_s [y_1(\alpha, \beta), y_2(\alpha, \beta), y_3(\alpha, \beta)] d\alpha d\beta > 0$$

$$H_s = - \int_{S_s} \frac{\partial p [y_1(\alpha, \beta, s), y_2(\alpha, \beta, s), y_3(\alpha, \beta, s)]}{\partial s} R_{cr} d\alpha d\beta ds > 0$$

Где величины $R_s(y_1, y_2, y_3)$, $p(y_1, y_2, y_3)$ определены из ламинарного решения и уравнения неразрывности, функция внешнего воздействия $h_l(y_1, y_2, y_3)$ задается. Получается, что микро-шероховатости, расположенные по всей длине трубопровода, определяют критическое число Рейнольдса. Эти микро-шероховатости меньше макро-шероховатостей, которые оказывают влияние на коэффициент сопротивления, при больших числах Рейнольдса. Но так как число Рейнольдса зависит от геометрии трубопровода, через его диаметр, то критическое число Рейнольдса только обратно пропорционально среднему модулю тангенсу наклона микро-шероховатостей, и зависит от геометрии трубопровода. При этом уменьшение радиуса трубопровода вызывает отрицательное значение da/ds и, следовательно, отсутствие комплексного, турбулентного решения на размере сужения, т.е. повышается критическое число Рейнольдса. Наоборот расширение трубопровода вызывает увеличение

величины da/ds и, следовательно, уменьшение критического числа Рейнольдса и может вызвать более раннее комплексное решение, т.е. турбулентный режим. Причем, так как число Рейнольдса зависит от температуры через зависимость кинематической вязкости от температуры, получается, что наступление критического числа Рейнольдса находится в зависимости от температуры среды.

Координаты положения равновесия определяются из квадратного уравнения

$$\alpha_s^2 - \alpha_s \frac{2R_{cr}G_s}{F_s} + \frac{H_s}{F_s} = \alpha_s^2 - 2R_{cr}^s \alpha_s + T_s \gamma_s = 0, T_s = \frac{\Delta P_s d^3 R_{cr}}{\rho^2 v^2 L}, R_{cr}^s = \frac{R_{cr} G_s}{F_s}$$

При этом ламинарное решение уточняется и имеет вид $\alpha_s = R_{cr}^s - \sqrt{(R_{cr}^s)^2 - T_s \gamma_s}$, которое при малом перепаде давления переходит в линейное ламинарное решение $\alpha_s = T_s \gamma_s / (2R_{cr}^s)$.

При этом справедлива турбулентная формула учета шероховатостей в силу одинакового метода усреднения в турбулентном режиме

$$\frac{\alpha_s}{\sqrt{T_s}} = \frac{R_{cr}^s}{\sqrt{T_s}} - i^4 \sqrt{\gamma_s - \frac{(R_{cr}^s)^2}{T_s}} \sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{(R_{cr}^s)^2}{T_s} + \sqrt{\gamma_s - \frac{(R_{cr}^s)^2}{T_s}}} \lambda \exp(i\varphi)$$

$$\lambda = \{\alpha / [k(T_s, \xi_0) R_{cr} / \omega l(T_s, \xi_0) + 1]\}^\sigma$$

Где величина $k(T_s, \xi_0) / l(T_s, \xi_0)$ это эффективный средний тангенс наклона шероховатостей, ξ_0 это отношение высоты шероховатости к радиусу трубопровода. Где критическое число Рейнольдса $\alpha_s = R_{cr}^s$ удовлетворяет значению числа Рейнольдса, соответствующее началу комплексного решения. При этом при малом числе Рейнольдса получаем ламинарное решение. Но проблемы получения турбулентного решения на этом не кончаются. Нужно определить влияние шероховатостей поверхности, для чего пока необходимо использование экспериментальных данных. В принципе необходимо точное значение зависимости числа Рейнольдса для гладкой поверхности от макрошероховатостей. Можно высказать предположение, что при счете с помощью

ламинарного решения при подсчете турбулентного решения влияние шероховатости будет аналогично влиянию в случае круглого трубопровода с другими константами ω, σ , которые нужно определить из значения коэффициента сопротивления на бесконечности числа Рейнольдса. Для этого необходимо, чтобы размер, входящий в число Рейнольдса определялся аналогично в круглом трубопроводе и для тела произвольной формы. Для этого необходимо определять средний радиус поверхности через площадь поверхности тела и вводить радиус сферы, у которой площадь совпадает с площадью данного тела. Но у внешней задачи имеются свои особенности, связанные с наличием кризиса сопротивления, который связан с наличием следа за телом в потоке. Этого следа нет во внутренних задачах, таких как течение в трубопроводе.

1.3.1. Особенности определения скорости обтекания для сферы

Построим решение уравнения Навье – Стокса для внешней задачи. Имеется ламинарное решение для движения сферы в жидкости при малом числе Рейнольдса. Оно определяет следующее распределение скорости см. [8]

$$V_r = u \cos \theta \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right)$$

$$V_\theta = -u \sin \theta \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right)$$

При этом определится зависимость давления от параметров потока

$$p = p_0 - \frac{3}{2} \rho v \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{n})a}{r^2}.$$

Уравнения движения в сферической системе координат в случае не зависимости решения от угла φ , имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) V_r - \frac{V_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\Delta V_r - \frac{2V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial(V_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} \right] \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) V_\theta + \frac{V_r V_\theta}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\Delta V_\theta + \frac{2\partial V_r}{r^2 \partial \theta} - \frac{2V_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta V_\theta)}{\partial \theta} &= 0 \\ (\mathbf{V}, \nabla) &= V_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

Перейдем в систему координат ξ, τ, θ с неизвестными R_r, R_θ, P определяемую по формуле $r = d\xi/2, t = d^2\tau/2\nu, V = R\nu/d, p = P\rho\nu^2/d^2$, и сократим полученную систему уравнений на величину $2\nu^2/d^3$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_r}{\partial \tau} + (\mathbf{R}, \nabla) R_r - \frac{R_\theta^2}{\xi} &= -\frac{\partial P}{\partial \xi} + 2 \left[\Delta R_r - \frac{2R_r}{\xi^2} - \frac{2}{\xi^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial(R_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} \right] \\ \frac{\partial R_\theta}{\partial \tau} + (\mathbf{R}, \nabla) R_\theta + \frac{R_r R_\theta}{\xi} &= -\frac{1}{\xi} \frac{\partial P}{\partial \theta} + 2 \left[\Delta R_\theta + \frac{2\partial R_r}{\xi^2 \partial \theta} - \frac{2R_\theta}{\xi^2 \sin^2 \theta} \right] \\ \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial(\xi^2 R_r)}{\partial r} + \frac{1}{\xi \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta R_\theta)}{\partial \theta} &= 0 \\ (\mathbf{R}, \nabla) &= R_r \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{R_\theta}{\xi} \frac{\partial}{\partial \theta}, \Delta = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

При этом решение в безразмерных константах имеет вид

$$\begin{aligned} R_r &= R_x \frac{R_0}{R_{cr}} \cos \theta \left(1 - \frac{3}{2\xi} + \frac{1}{2\xi^3} \right) \\ R_\theta &= -R_x \frac{R_0}{R_{cr}} \sin \theta \left(1 - \frac{3}{4\xi} - \frac{1}{4\xi^3} \right), a = d/2, R_0 = \frac{ud}{\nu} \\ P &= p_0 d^2 / \rho \nu^2 - 3 \frac{(\mathbf{R}_0, \mathbf{n})}{\xi^2 R_{cr}} = p_0 d^2 / \rho \nu^2 - 3 \frac{R_0}{R_{cr}} \frac{\sin 2\theta}{2\xi^2} \left(1 - \frac{9}{4\xi} + \frac{1}{4\xi^3} \right). \end{aligned}$$

Но если рассматривать решение для одной области $\theta \in [0, \pi]$, то получим нулевое значение коэффициента R_x . Поэтому область надо разбить на две части $\theta \in [0, \theta_0], \theta \in [\theta_0, \pi]$ и находить величину θ_0 из равенства коэффициентов R_x , вычисленных для разных областей.

$$\begin{aligned} & R_x^2 \frac{R_0}{R_{cr}} \left[\cos^2 \theta \left(1 - \frac{3}{2\xi} + \frac{1}{2\xi^3} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{3}{2\xi} + \frac{1}{2\xi^3} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \left(1 - \frac{3}{4\xi} - \frac{1}{4\xi^3} \right) \left(1 - \frac{3}{2\xi} + \frac{1}{2\xi^3} \right) \frac{\sin^2 \theta}{\xi} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sin^2 \theta}{\xi} \left(1 - \frac{3}{4\xi} - \frac{1}{4\xi^3} \right)^2 \right] = 3 \sin 2\theta \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{2\xi^2} \left(1 - \frac{9}{4\xi} + \frac{1}{4\xi^3} \right) + \\ & \quad + 2R_x \left[\frac{3 \cos \theta}{\xi^5} - \frac{2 \cos \theta}{\xi^2} \left(1 - \frac{3}{2\xi} + \frac{1}{2\xi^3} \right) + \frac{4 \cos \theta}{\xi^2 \sin \theta} \left(1 - \frac{3}{4\xi} - \frac{1}{4\xi^3} \right) \right] \end{aligned}$$

Решим первое уравнение, второе уравнение решается аналогично. Для этого для внутренней задачи надо умножить на величину $r^2 \sin \theta dr d\theta$. Для внешней безразмерной задачи надо вводить переменную $r = \frac{1}{\xi}$ при условии $\xi \in [1, 0]$ и

множитель выйдет таким образом $\frac{\sin \theta}{\xi^2} d \frac{1}{\xi} d\theta$. Распишем уравнение с учетом

всех множителей

$$\begin{aligned} & R_x^2 \frac{R_0}{R_{cr}} \left[\cos^2 \theta \sin \theta \left(\frac{3}{2\xi^4} - \frac{3}{2\xi^6} - \frac{9}{4\xi^5} + \frac{3}{\xi^7} - \frac{3}{4\xi^9} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{\xi^3} - \frac{9}{4\xi^4} + \frac{9}{8\xi^5} + \frac{1}{4\xi^6} - \frac{1}{8\xi^9} \right) \sin^3 \theta - \sin^3 \theta \left(\frac{1}{\xi^3} + \frac{9}{16\xi^5} + \frac{1}{16\xi^9} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{3}{2\xi^4} - \frac{1}{2\xi^6} + \frac{3}{8\xi^7} \right) \right] = 3 \sin 2\theta \sin \theta \left(\frac{1}{2\xi^4} - \frac{9}{8\xi^5} + \frac{1}{8\xi^7} \right) + \\ & \quad + 2R_x \left[\sin 2\theta \left(\frac{3}{\xi^7} - \frac{2}{\xi^4} + \frac{3}{\xi^5} - \frac{1}{\xi^7} \right) + \cos \theta \left(\frac{4}{\xi^4} - \frac{3}{\xi^5} - \frac{1}{\xi^7} \right) \right] \end{aligned}$$

интегрирование по углу $[0, \pi]$ определит нулевую правую часть этого уравнения. Следовательно, надо разбить решение на две области и решения сопрягать на границе области. Полученное решение будет при малой скорости действительным, причем угол может определиться комплексным.

Проинтегрируем данное уравнение по двум областям $\theta \in [0, \theta_0], \frac{1}{\xi} \in [0, 1]$ и

$\theta \in [\theta_0, \pi], \frac{1}{\xi} \in [0, 1]$, получим

$$R_x^2 \frac{R_0}{R_{cr}} [(1 - \cos^3 \theta_0) 0.003571 - (\frac{2}{3} - \cos \theta_0 + \frac{\cos^3 \theta_0}{3}) 0.01473] - \\ - 2R_x [(1 - \cos^2 \theta_0) 0.35 + 0.175 \sin \theta_0] + 0.10781 (\sin \theta_0 - \frac{\sin 3\theta_0}{3}) = 0$$

Другая область имеет уравнение

$$R_x^2 \frac{R_0}{R_{cr}} [(1 + \cos^3 \theta_0) 0.003571 - (\frac{2}{3} + \cos \theta_0 - \frac{\cos^3 \theta_0}{3}) 0.01473] - \\ - 2R_x [-(1 + \cos^2 \theta_0) 0.35 - 0.175 \sin \theta_0] - 0.10781 (\sin \theta_0 - \frac{\sin 3\theta_0}{3}) = 0$$

В ламинарном режиме при очень малом числе Рейнольдса $R_0 \ll R_{cr}$ и имеем выражение для числа Рейнольдса

$$R_x = \frac{0.10781 (\sin \theta_0 - \frac{\sin 3\theta_0}{3}) / 2}{(1 + \cos^2 \theta_0) 0.35 - 0.175 \sin \theta_0} = \frac{0.10781 (\sin \theta_0 - \frac{\sin 3\theta_0}{3}) / 2}{(1 - \cos^2 \theta_0) 0.35 - 0.175 \sin \theta_0}.$$

Получаем симметричное решение $\theta_0 = \pi/2, R_x = 0.8214$.

$$R_x = (b - \sqrt{b^2 - ac}) / a$$

$$a = 0.003571(1 - \cos^3 \theta_0) - \left(\frac{2}{3} - \cos \theta_0 + \frac{\cos^3 \theta_0}{3}\right) 0.01473$$

$$b = [0.35(1 - \cos^2 \theta_0) + 0.175 \sin \theta_0] \beta$$

$$c = 0.10781 \beta \left(\sin \theta_0 - \frac{\sin 3\theta_0}{3}\right)$$

Где при возрастании числа Рейнольдса определен параметр $\frac{R_0}{R_{cr}} = 1/\beta$.

Но другое решение имеет вид

$$a = -0.003571(1 + \cos^3 \theta_0) + \left(\frac{2}{3} + \cos \theta_0 - \frac{\cos^3 \theta_0}{3}\right) 0.01473$$

$$b = [0.35(1 + \cos^2 \theta_0) + 0.175 \sin \theta_0] \beta$$

$$c = 0.10781 \beta \left(\sin \theta_0 - \frac{\sin 3\theta_0}{3}\right)$$

При этом начале турбулентного режима соответствует комплексное число Рейнольдса R_x .

При учете всех коэффициентов нет решения $\theta_0 = \pi/2$, а получается два значения коэффициента θ_0 . Окажется, что существуют два угла θ_1, θ_2 для каждого из уравнений Навье - Стокса, соответствующих двум разным разбиениям на две области

$$R_r = \frac{R_0}{R_{cr}} \sum_{l=1}^4 R_l(\theta_l) \cos(\theta - \theta_l + \frac{\pi}{2}) \left(1 - \frac{3}{2\xi} + \frac{1}{2\xi^3}\right)$$

$$R_\theta = -\frac{R_0}{R_{cr}} \sum_{l=1}^4 R_l(\theta_l) \sin(\theta - \theta_l + \frac{\pi}{2}) \left(1 - \frac{3}{4\xi} - \frac{1}{4\xi^3}\right)$$

В случае $R_0 \rightarrow 0$ имеем равенство углов $\theta_l = \pi/2$, и получим $R_l(\theta_l) = 1/2$. Коэффициенты $R_1(\theta_1) = R_2(\theta_2), R_3(\theta_3) = R_4(\theta_4)$ определим из двух уравнений

Навье – Стокса, которое надо проинтегрировать по всему пространству. При этом первые два угла определим из первого уравнения Навье - Стокса, а третий и четвертый угол определим из второго уравнения. Причем уравнения Навье – Стокса нужно умножать на величину $\frac{\sin^2 \theta}{\xi^2} d\frac{1}{\xi} d\theta$, а потом интегрировать.

При этом декартовы компоненты скорости, равны

$$\begin{aligned} R_x &= R_r \cos \theta + R_\theta \sin \theta + R_0 \\ R_y &= R_r \sin \theta - R_\theta \cos \theta \end{aligned}$$

При этом для компоненты скорости при больших радиусах и малых числах Рейнольдса имеем соотношение

$$\begin{aligned} R_x &= R_0 \cos 2\theta + R_0 \\ R_y &= R_0 \sin 2\theta \end{aligned}$$

При действительных углах построен график на рис.1 относительно двух углов при условии $\theta_1 = \pi/2 - 0.1; \theta_2 = \pi/2 + 0.1; R_l(\theta_l) = 1, R_0 = 1.5$

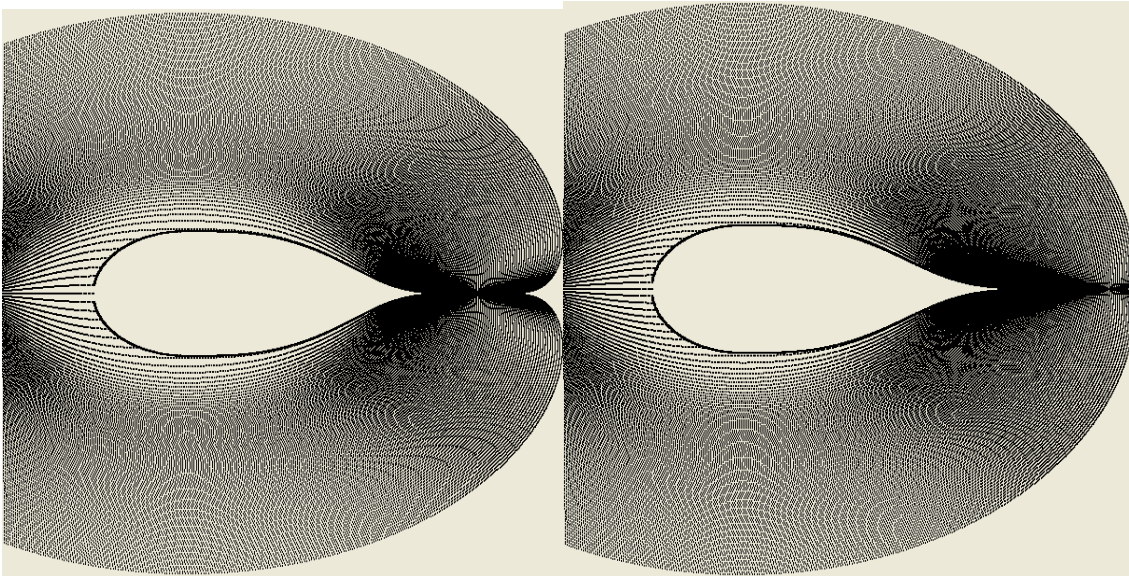


Рис.1

Рис.2

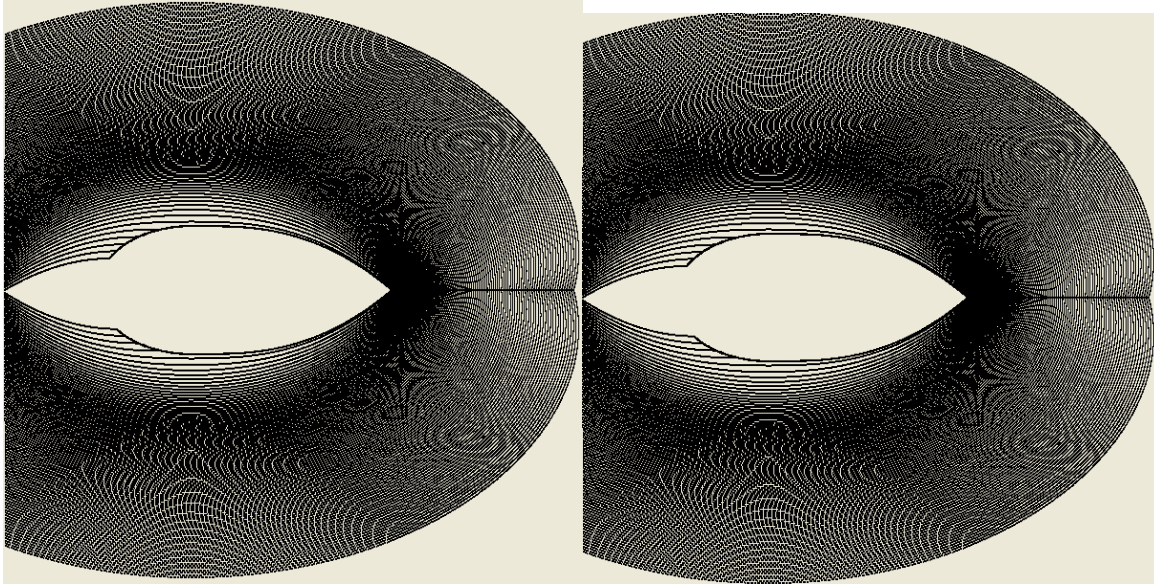


Рис.3

Рис.4

Следующий рисунок 2 соответствует числу Рейнольдса $R_0 = 150$, $\theta_1 = \pi/2 - 0.4$; $\theta_2 = \pi/2 + 0.4$; $R_l(\theta_l) = 1$. С ростом числа Рейнольдса растет отклонение от угла $\pi/2$ для углов θ_l . На рисунке 3 изображен поток с числом Рейнольдса $R_0 = 5000$ с комплексными углами $\theta_1 = \pi/2 - 0.5 + 0.5i$; $\theta_2 = \pi/2 + 0.5 + 0.5i$; $R_l(\theta_l) = 1$. Имеется две особые зоны, в передней и задней части сферы. В них скорость в точке границы соответствует касательной прямой. Рис.4 соответствует тем же параметрам, что и рис. 3, только число Рейнольдса тела равно $R_0 = 50000$. Параметры потока достигли предельных значений, рисунок остался неизменным, как и при параметре $R_0 = 5000$.

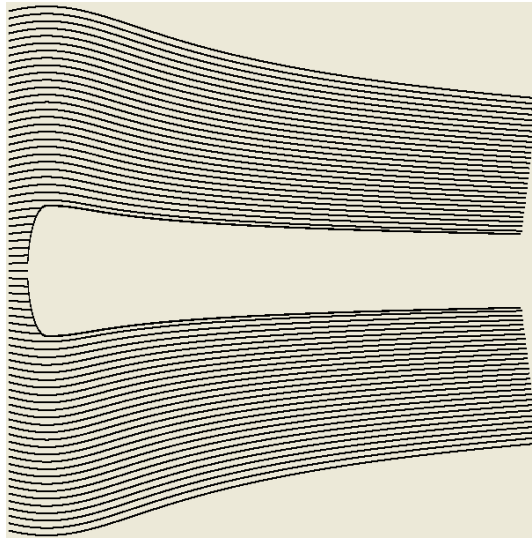


Рис.5

Рис. 5 получен при значении параметров $\theta_1 = \pi/2 - 0.5; \theta_2 = \pi/2 + 0.5; R_l(\theta_l) = 0.1; R_0 = 500$. Распределение скорости таково, что в передней части сферы образуется особая зона, куда несжимаемая жидкость не проникает. При этом зона недоступности пространства для потока жидкости распространяется на большое расстояние, что создает условие для длинной вихревой дорожки. Она срывается с поверхности сферы и распространяется как не вязкая жидкость, причем по законам, не связанным с уравнением Навье - Стокса.

Для изменения рисунка необходима смена углов-границ и соотношения между коэффициентами $R_l(\theta_l)$. Кроме того, при больших числах Рейнольдса растет мнимая часть, и, значит, велико влияние шероховатости.

При этом критическое число Рейнольдса для внешнего тела равно $\frac{1}{R_{cr}} = \frac{1}{2300} \frac{a}{l_{cr}}$, где a характерный размер тела, l_{cr} длина огибающей тело гладкой поверхности при условии начала комплексного значения коэффициентов $R_l(\theta_l)$.

Причем решалась система дифференциальных уравнений в безразмерной системе координат

$$\frac{dx}{dt} = R_x; \frac{dy}{dt} = R_y, x_0 = -2; y_0 \in [-4, 4].$$

При этом запишем новую формулы, которую необходимо подставить в уравнение Навье – Стокса, усреднить решение, и определить новые множители, но которые необходимо умножать решение

$$R_r = \frac{R_0}{R_{cr}} \sum_{l=1}^4 R_l(\theta_l) \left[\cos\left(\theta - \operatorname{Re} \theta_l + \frac{\pi}{2}\right) \cosh(\operatorname{Im} \theta_l) - \right. \\ \left. - i \sin\left(\theta - \operatorname{Re} \theta_l + \frac{\pi}{2}\right) \sinh(\operatorname{Im} \theta_l) \right] \left(1 - \frac{3}{2\xi} + \frac{1}{2\xi^3}\right) \\ R_\theta = -\frac{R_0}{R_{cr}} \sum_{l=1}^4 R_l(\theta_l) \left[\sin\left(\theta - \operatorname{Re} \theta_l + \frac{\pi}{2}\right) \cosh(\operatorname{Im} \theta_l) + \right. \\ \left. + i \cos\left(\theta - \operatorname{Re} \theta_l + \frac{\pi}{2}\right) \sinh(\operatorname{Im} \theta_l) \right] \left(1 - \frac{3}{4\xi} - \frac{1}{4\xi^3}\right)$$

Построим графики определения действительных границ области.

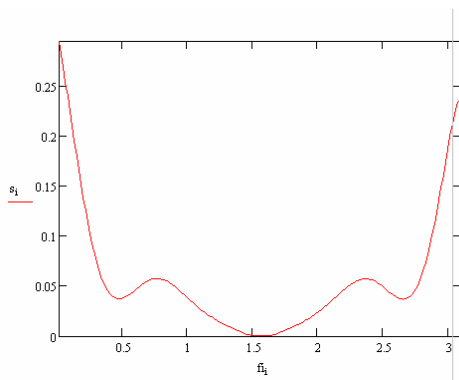


Рис.6

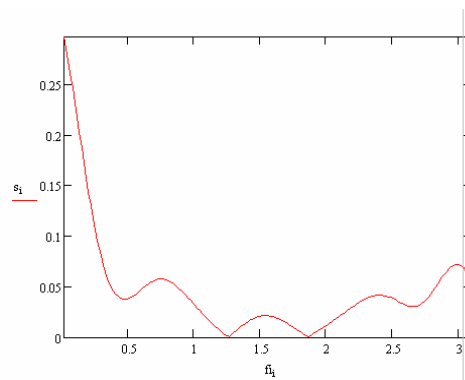


Рис.7

Разность коэфф. двух решений в разных областях

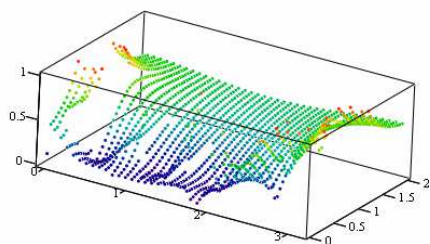


Рис.8

Разность коэфф. двух решений в разных областях

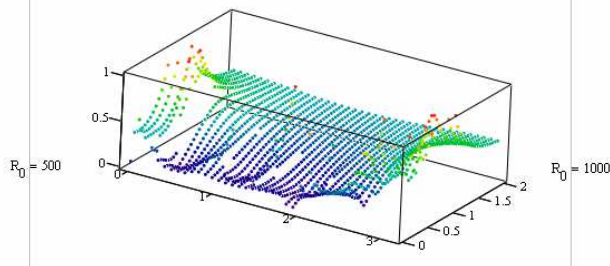


Рис.9

Вертикальная ось характеризует модуль разности между коэффициентами R_x , вычисленными для двух разных областей. По горизонтальной оси отложен действительный угол θ_0 . На рис.6 получен единственный корень при малом числе Рейнольдса. На рис.7 имеется два действительных корня, соответствующих ламинарному режиму с числом Рейнольдса, равным величине $R_0 = 100$.

На рисунке 8,9 показано существование комплексных корней, равных $\theta_1 = 1 + 0.5i; \theta_2 = 2 + 0.5i$. Мнимая ось изменяется на отрезке $[0,2]$, действительная ось $[0, \pi]$.

1.3.2. Описание особой области

При этом определение течения в потоке жидкости имеет не продолжаемые зоны, скорость перпендикулярная границам этих зон равна нулю. Поэтому жидкость из этих зон не связана с основным потоком. Но тангенциальные компоненты скорости на границе должны совпадать. Построим решение в этих зонах. Действительная часть решения $R = R_1 + iR_2$ соответствует компоненте z , мнимая часть компоненте x , причем ось x вращается вокруг оси Oz с изменением угла φ . Но решение строится при фиксированном угле φ и не зависит от этого угла. Тогда решение уравнения Навье – Стокса будет

$$R = \sum_{n,m=-N}^N b_{nm} \exp(in\Phi + im \ln \rho_0). \quad (1.3.2.1)$$

Где введена новая масштабированная угловая переменная $\Phi = 2\pi(\theta - \theta^{\min})/(\theta^{\max} - \theta^{\min})$, где $\theta^{\max}, \theta^{\min}$ - экстремальные значения границ турбулентной зоны. Кроме того, введем масштабированный радиус

$$\ln \rho_0 = \frac{\ln r / a^{\min}(\theta)}{\ln[a^{\max}(\theta) / a^{\min}(\theta)]} 2\pi,$$

где $a^{\max}(\theta), a^{\min}(\theta)$ - максимальное и минимальное значение радиуса границы турбулентной зоны. В случае равенства нулю знаменателя, для величины s следует использовать значение $r = \sqrt{a^{\max}(\theta)a^{\min}(\theta)}$. Тогда величина $\ln \rho$ будет непрерывна и в этой точке равна π . Коэффициенты b_{nm} определяются из значений ламинарного решения в пределах границы турбулентной зоны $r = a^{\min}(\theta), s = a^{\max}(\theta)$, где $\theta \in [\theta^{\min}, \theta^{\max}]$.

Коэффициенты b_{nml} определяются по формуле

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_l[r(\ln \rho_0, \Phi), w(\Phi)] \exp(-in\Phi - im \ln \rho_0) d \ln \rho d\Phi = \\ = b_{nml} / 4\pi^2$$

Так как граничные значения в начале и конце периода отличаются и границы области в координатах r, θ не прямоугольные (в координатах $\Phi, \ln \rho$ скорость на границе переменная), ряд будет разрывным и значит, коэффициент b_{nml} убывает при условии $n, m \rightarrow \infty$ как $b_{nm} \sim 1/(nm)$, т.е. это дискретное решение. Дело в том, что решение в координатах r, θ определяет дискретное, но не продолжаемое решение, а в особой области в координатах $\ln \rho, \Phi$ дискретно, в силу дискретности функций $R(\ln \rho_0, \Phi)$ как дискретного ряда. Но так как описание особой области вводится относительно координат $\ln \rho_0, \Phi$, особая

область является дискретным, образующим либо вихревую дорожку, либо является пульсирующим турбулентным решением.

Формулу (2.1) можно переписать в виде

$$\sum_{n,m=-N}^N b_{nm} \exp(in\Phi + im \ln \rho_0) = \sum_{n,m=0}^N A_{nm} \operatorname{sgn}(\Phi - \Phi_n^0) \operatorname{sgn}(\Phi_n^1 - \Phi) \operatorname{sgn}(\ln \rho_0 - \ln \rho_m^0) \operatorname{sgn}(\ln \rho_m^1 - \ln \rho_0), \quad (1.3.2.2)$$

где в данном случае имеем $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ и тогда скачок с амплитудой A_{nm}

и фазой $\Phi_n^0, \ln \rho_m^0, \Phi_n^1, \ln \rho_m^1$, определится из уравнений

$$4\pi^2 b_{nm} = \sum_{p,q=1}^N A_{pq} \sin[n(\Phi_p^1 - \Phi_p^0)/2] \exp[in(\Phi_p^0 + \Phi_p^1)/2] \sin[m(\ln \rho_q^1 - \ln \rho_q^0)/2] \exp[im(\ln \rho_q^0 + \ln \rho_q^1)/2]/(nm),$$

где индексы $n, m = -N, \dots, -1, 1, \dots, N$.

Отметим, что $A_{00} = b_{00}$. Если ряд, стоящий в левой части (1.3.2.2) непосредственно не суммируется, требуя большого числа членов, то правая часть (1.3.2.2) определит его дискретную сумму при конечном числе членов. Отметим, что

$$\Phi_n^0 + 2\pi p \leq \Phi_n \leq \Phi_n^1 + 2\pi p, \ln \rho_m^0 + 2\pi q \leq \ln \rho_m \leq \ln \rho_m^1 + 2\pi q$$

почти периодическая координата скачка.

Почему же турбулентное решение в особой области носит пульсирующий характер? Граница турбулентной области в силу дискретности турбулентного решения не гладкая функция, в отличие от ламинарного решения. Это приводит к не равенству тангенциальных компонент решения и к пульсации границы. Для описания этого течения необходимо ввести зависимость от времени приведенного радиуса

$\ln \rho = [\ln \rho_0 - \omega \cdot t(2\pi - \Phi)\Phi/4\pi^2](\Phi - \pi)/\pi, \omega = 2\pi Sh \frac{u_0}{d}$, где величина Sh это

число Струхала. При этом картинка будет колебаться с частотой Струхала по

величине $\ln \rho_0$, что приведет к вращению вихрей в противоположные стороны, так как частоты при условии $\Phi = \pi/2, \Phi = 3\pi/2$ имеют разные знаки. При этом на границе области частота равна нулю, т.е. решение на границе непрерывно.

1.3.3. Решение задачи обтекания произвольного тела в сферической системе координат

Задачу определения ламинарного решения для произвольного тела в сферической системе координат считаем решенной в виде конечной формулы. Т.е. определено значение числа Рейнольдса и давления в ламинарном режиме.

$$R_r = \frac{R_0}{R_{cr}}(\xi, \theta, \varphi)$$

$$R_\theta = \frac{R_0}{R_{cr}} g_\theta(\xi, \theta, \varphi)$$

$$R_\varphi = \frac{R_0}{R_{cr}} g_\varphi(\xi, \theta, \varphi)$$

$$p = p(R_0, \xi, \theta, \varphi)$$

Решаем каждое уравнение Навье – Стокса, умножив его на величину $\frac{\sin \theta}{\xi^2} d \frac{1}{\xi} d\theta$, проинтегрировав его по обратному радиусу и углу θ , по двум областям, с одной из границ $\theta_l, l=1,2$. Определяем эту границу из условия $R_r[\theta_{r1}(\varphi), \varphi] = R_r[\theta_{r2}(\varphi), \varphi]$. Имеется два угла θ_{k1}, θ_{k2} , так как уравнение по определению этих углов имеет вторую степень. Определяем значение $\theta_{0r}(\varphi)$ для ламинарного решения и учитываем его в формуле для числа Рейнольдса с учетом границы области.

Продельываем эту же операцию с другими компонентами числа Рейнольдса. Далее строим решение, вводя четыре неизвестные константы

$$\begin{aligned}
R_r &= \Re_r \{g_r[\xi, \theta - \theta_{r1}(\varphi) + \theta_{0r}(\varphi), \varphi] + g_r[\xi, \theta - \theta_{r2}(\varphi) + \theta_{0r}(\varphi), \varphi]\} / R_{cr} \\
R_\theta &= \Re_\theta \{g_\theta[\xi, \theta - \theta_{\theta1}(\varphi) + \theta_{0\theta}(\varphi), \varphi] + g_\theta[\xi, \theta - \theta_{\theta2}(\varphi) + \theta_{0\theta}(\varphi), \varphi]\} / R_{cr} \\
R_\varphi &= \Re_\varphi \{g_\varphi[\xi, \theta - \theta_{\varphi1}(\varphi) + \theta_{0\varphi}(\varphi), \varphi] + g_\varphi[\xi, \theta - \theta_{\varphi2}(\varphi) + \theta_{0\varphi}(\varphi), \varphi]\} / R_{cr} \\
p &= P \{p[R_0, \xi, \theta - \theta_{r1}(\varphi) + \theta_{0r}(\varphi), \varphi] + p[R_0, \xi, \theta - \theta_{r2}(\varphi) + \theta_{0r}(\varphi), \varphi] + \\
&\quad + p[R_0, \xi, \theta - \theta_{\theta1}(\varphi) + \theta_{0\theta}(\varphi), \varphi] + p[R_0, \xi, \theta - \theta_{\theta2}(\varphi) + \theta_{0\theta}(\varphi), \varphi] + \\
&\quad + p[R_0, \xi, \theta - \theta_{\varphi1}(\varphi) + \theta_{0\varphi}(\varphi), \varphi] + p[R_0, \xi, \theta - \theta_{\varphi2}(\varphi) + \theta_{0\varphi}(\varphi), \varphi]\}
\end{aligned} \tag{1.3.3.1}$$

Подставляем данные функции в уравнения Навье – Стокса и уравнение неразрывности, интегрируем по пространству и определяем 4 константы $\Re_r, \Re_\theta, \Re_\varphi, P$. Эти коэффициенты могут оказаться комплексными, описывая комплексное турбулентное решение. Действительная часть решения опишет среднее решение, а мнимая часть среднеквадратичное отклонение. При этом можно интегрировать по периодическому углу φ и получать не нулевой интеграл, так как угол входит нелинейным образом в функцию решения. При решении нелинейного уравнения может возникнуть комплексная функция $\theta_{rl}(\varphi), \theta_{\theta l}(\varphi), \theta_{\varphi l}(\varphi), l=1,2$. Аналогично можно построить решение задачи в случае сферы, определяя не ламинарное давление, но это осложнит решение. Можно добавить зависимость решения для сферы от угла φ в декартовой системе координат и решать задачу определяя $\theta_1(\varphi), \theta_2(\varphi)$, тогда получится зависимость решения от угла φ . При этом необходимо сохранить зависимость от сферической системы координат при декартовых компонентах скорости и давления. Производная

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x_1(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x_3} \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x_1(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x_3} \\
\frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x_1(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x_3}
\end{aligned}$$

Где имеем

$$x_1(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \cos \varphi; x_2(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \sin \varphi; x_3(r, \theta) = r \cos \theta$$

Откуда определим $\frac{\partial}{\partial x_l}$ через зависимость $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Аналогично

определяются и вторые производные по x_l , но появится зависимость от смешанных производных по r, θ, φ .

$$R_x = \frac{\Re_x}{R_{cr}} \sum_{l=1}^2 \{g_r[\xi, \theta - \theta_{xl}(\varphi) + \theta_{0x}(\varphi)] \cos \theta + g_\theta[\xi, \theta - \theta_{xl}(\varphi) + \theta_{0x}(\varphi)] \sin \theta\} \cos \varphi$$

$$R_y = \frac{\Re_y}{R_{cr}} \sum_{l=1}^2 \{g_r[\xi, \theta - \theta_{yl}(\varphi) + \theta_{0y}(\varphi)] \cos \theta + g_\theta[\xi, \theta - \theta_{yl}(\varphi) + \theta_{0y}(\varphi)] \sin \theta\} \sin \varphi$$

$$R_z = \frac{\Re_z}{R_{cr}} \sum_{l=1}^2 \{g_r[\xi, \theta - \theta_{zl}(\varphi) + \theta_{0z}(\varphi)] \sin \theta - g_\theta[\xi, \theta - \theta_{zl}(\varphi) + \theta_{0z}(\varphi)] \cos \theta\}$$

При этом появится компонента скорости R_φ , так как $\frac{R_y}{R_x} \neq \tan \varphi$. При малом

числе Рейнольдса эта зависимость пропадает, так как $\theta_{xl} = \theta_{0x}, \theta_{yl} = \theta_{0y}, \theta_{zl} = \theta_{0z}$.

1.4 Построение решения в виде ряда

для трубопровода с круговым сечением

Можно привести уравнение Навье – Стокса к безразмерному виду для ряда, являющегося решением

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{P}{\rho} + \nu \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k^2}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0$$

Запишем уравнение Навье – Стокса в безразмерном виде, умножая на величину $a^3 / (2R_{cr} \nu^2)$, и умножая уравнение неразрывности на величину a^2 / ν , получим уравнения

$$\frac{\partial R_i}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^3 R_k \frac{\partial R_i}{\partial y_k} = -\frac{\partial p}{\partial y_i} + 2R_{cr} \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 R_i}{\partial y_k^2}; \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial R_i}{\partial y_i} = 0$$

Имеем значение переменных $R_i = V_i a / \nu, \tau = 2t \nu R_{cr} / a^2,$

$T = \frac{Pa^2}{\rho \nu^2}, y_k = 2x_k R_{cr} / a$ величина a это радиус трубопровода, ρ, ν плотность и

кинематическая вязкость жидкости, V_i, P скорость и давление в потоке,

величина давления равна $P = -\frac{P_1 - P_0}{L} z + P_1,$ где P_1, P_0 начальное и конечное

давление в потоке. Имеется связь $\frac{p_1 - p_0}{l} \delta = \frac{P_1 - P_0}{L} d,$ которая является

определением перепада давления $p_1 - p_0.$ Величина скорости определяется по

формуле $V_z = \sum_{l=1}^N \alpha_l(t) \sin \frac{\pi(4l+1)r}{a(z)}.$ Величина $a(z)$ определяет высоту

шероховатости, при постоянном радиусе трубопровода. Уравнение

неразрывности удовлетворяется тождественно с точностью $\langle \frac{da(z)}{dx} \rangle = 0,$ так

как радиальная и угловая скорость равна нулю в силу отсутствия внешнего радиального и углового воздействия и нулевых начальных условиях. Причем

физический смысл $R_{cr} = \frac{9\pi^2 l}{16\delta} = 2300.$ Критическое число Рейнольдса имеет

иной вид по отношению к решению раздела 1.1, так как используется другая опорная функция. С помощью метода Галеркина приводим задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Удалось решить уравнение Навье – Стокса с точность до 0.6% при постоянном среднеквадратичном значении тангенса наклона шероховатостей. Строилось решение той же задачи на основе алгоритма (1.4.1). Получился следующий график

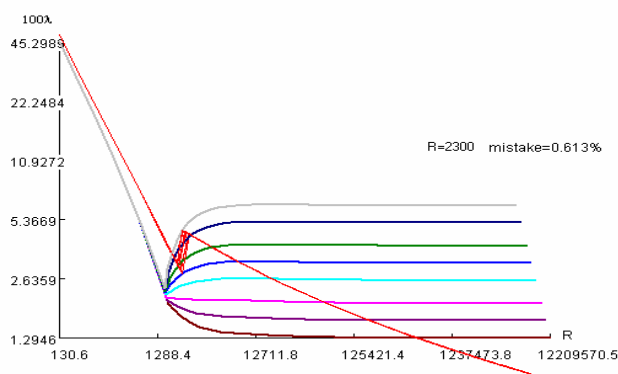


Рис.3

При этом формулы, по которым считался данный алгоритм с турбулентным решением в виде ряда

$$\langle X \rangle = \sum_{l=0}^N 2[\operatorname{Re} x_l + i \operatorname{Im} x_l] / [\pi(4l + 1)]$$

$$R = \langle X \rangle \sqrt{T}$$

$$X^2 = (\operatorname{Re} \langle X \rangle)^2 + (\operatorname{Im} \langle X \rangle)^2 [\alpha / (\delta R_{cr} / \omega l + 1)]^\sigma$$

$$\alpha = 4.35, \omega = (3/2)^{2/3} = 1.31, \sigma = 0.25 \cdot 3/2 \quad (1.4.1)$$

$$T = \frac{(p_1 - p_0)a^2}{\rho v^2} = \frac{(P_1 - P_0)a^3 dl}{L \rho \delta v^2} = \lambda \frac{l}{8\delta} |R|^2$$

$$\lambda = T \frac{8\delta}{l |R|^2} = \frac{9T\pi^2}{2R_{cr} |R|^2} = \frac{9\pi^2}{2R_{cr} |X|^2}; R_{cr} = \frac{9\pi^2 l}{16\delta} = 2300;$$

Где величина x_l определяется по формуле (1.4.2). При этом, так как учитывается множество членов, отражающих разную степень завихренности, корень из мнимой части комплексного числа Рейнольдса потока не извлекается. Степень шероховатости учитывалась из условия одинаковости коэффициента сопротивления при разных формулах для решения, изменялся только коэффициент α , так как на бесконечности числа Рейнольдса величина X является константой, определяемой формулой численного метода и необходимо, чтобы

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{9\pi^4}{8R_{cr}[\alpha/(R_{cr}/\omega\xi_0 + 1)]^{3/2}} = \frac{9\pi^4}{8R_{cr}[\alpha/(1/1.31 + 1)]^{3/2}} = \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{R_{cr}[\alpha/(R_{cr}/\omega\xi_0 + 1)]^{3/4}} = \frac{16\sqrt{2}}{R_{cr}[1.31/(1/1.31 + 1)]^{3/4}}, \\ \alpha &= 1.31^{1/2}(1/1.31 + 1)^{1/2}[9\pi^4/(8 \cdot 16\sqrt{2})]^{2/3} = 4.35\end{aligned}$$

откуда определится коэффициент $\alpha = 4.35$ при условии гладкости $\xi_0 = R_{cr}$.

Где величина x_l является корнем уравнения

$$\begin{aligned}\sum_{m,n=0}^N F_{knm}z_mz_n - 2R_{cr}(4k+1)^2z_k + \frac{9T}{4(4k+1)} &= \\ \sum_{m,n=0}^N F_{knm}x_mx_n - 2R_{cr}(4k+1)^2x_k/\sqrt{T} + \frac{9}{4(4k+1)} &= 0, x_m = z_m/\sqrt{T} \\ F_{knm} &= -\frac{9(4m+1)}{8} \left[\frac{1}{(4n+4m+4k+3)^2} + \frac{1}{(4n-4m+4k+1)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(4n+4m-4k+1)^2} - \frac{1}{(4n-4m-4k-1)^2} \right]\end{aligned}$$

Решение этой системы нелинейных уравнений ищется в виде $x_m = \frac{y_k}{(4m+1)^2}$,

причем для коэффициента y_k получаем квадратное уравнение

$$\begin{aligned}(y_k)^2 \sum_{m,n=0}^N \frac{F_{knm}}{(4n+1)^2(4m+1)^2} - 2R_{cr}y_k/\sqrt{T} + \frac{9}{4(4k+1)} &= 0 \\ A_k(y_k)^2 - 2R_{cr}y_k/\sqrt{T} + h_k &= 0 \quad (1.4.2) \\ y_k = \frac{R_{cr}/\sqrt{T} - \sqrt{R_{cr}^2/T - h_k A_k}}{A_k}, x_k = \frac{y_k}{(4k+1)^2} = \frac{z_k}{\sqrt{T}}\end{aligned}$$

При чем величина x_k определяется по формуле $x_k = \frac{y_k}{(4k+1)^2}$.

При этом основное решение x_l^0 имеет счетное количество значений. Значение x_l^0 соответствует линейной части решения. Продолжая это решение при большом перепаде давления, получим основной член решения задачи гидродинамики. Докажем, что имеется счетное количество решений с нулевой

энергией, т.е. координат положения равновесия имеется счетное количество. Допустим нашли одно решение. Следующее решение определится из системы уравнений

$$A_{kn}y_n = 0$$

$$A_{kn} = \sum_{n,m=1}^N F_{knm}y_m + G_{kn}; G_{kn} = \sum_{n,m=1}^N (F_{kmn} + F_{knm})x_m^0 - 2R_{cr}\delta_{kn}(4k+1)^2 / \sqrt{T}.$$

Выберем начальное приближение, чтобы определитель этой линейной системы уравнений равнялся нулю. Для этого определим $y_m = \frac{\alpha}{(4m+1)^2}$, и найдем из равенства нулю определителя значение α . Тогда следующее приближение определит значения y_m с точностью до множителя. Вычислим этот множитель из условия равенства нулю определителя. Этот множитель определяется N значениями, определяя корень полинома N степени. В результате получим $N+1$ решение алгебраического уравнения.

Получение счетного количества ($N \rightarrow \infty$) координат положения равновесия эквивалентно получению счетного количества решений для уравнения Шредингера. Эквивалентность уравнения Шредингера и Навье – Стокса докажем в данной статье далее по тексту.

График на рис.3 отличается от графика Никурадзе на рис.4. Асимптотика при больших и малых значениях числа Рейнольдса совпадает с графиком Никурадзе. Но график построен при постоянном тангенсе наклона шероховатости, а график Никурадзе при постоянном отношении радиуса трубопровода к средней высоте шероховатости. Построим значение эффективного тангенса наклона шероховатостей, по средней высоте шероховатости.

$$\frac{l(T, \xi_0)}{\delta(T, \xi_0)} = \{2 \exp[-|\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}}| / \alpha(\xi_0)] + \xi_0 [1 - \exp(-|\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}}| / \alpha(\xi_0))]\} \times$$

$$\times \{1 + 0.4 \exp\{-[\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}}] \beta(\xi_0) / \gamma(\xi_0)\}\}$$

причем эквивалентная степень шероховатости зависит от безразмерного давления. Эквивалентную степень шероховатости можно получить при расчете динамики процесса течения жидкости на микро шероховатостях постоянной высоты. Величина критического давления определяется из формулы $T_{cr} = 4R_{cr}^2/9$. Эмпирическая формула по определению коэффициентов $\alpha(\xi_0), \beta(\xi_0), \gamma(\xi_0)$ следующая

$$\alpha(\xi_0) = R_{cr} \frac{\xi_0}{1.5} \eta, \quad \beta(\xi_0) = \frac{\xi_0}{4} \eta, \quad \gamma(\xi_0) = R_{cr} \xi_0^{1.5} \eta / 4 \quad \eta = (1.31/4.35)^2$$

Где 1.31;4.34 это коэффициенты α , образующие множитель при мнимой части решения для решения в виде одного члена и в виде ряда соответственно.

При этом в начале образования мнимой части комплексного решения, или начале турбулентного решения, тангенс наклона шероховатостей приближенно равен 2, и графики при разных тангенсах наклона шероховатостей совпадают.

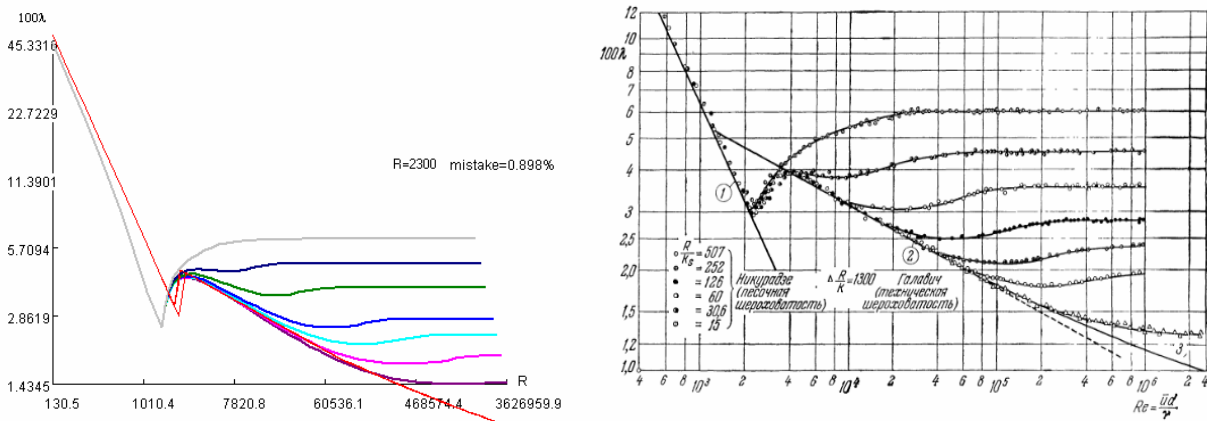


Рис.4

График построен для отношения радиуса трубопровода r_0 к высоте шероховатостей δ_0 равной $\xi_0 = \frac{r_0}{\delta_0} = 15, 30, 60, 126, 252, 507, 1300$. Точность аппроксимации относительно графиков Никурадзе примерно 10%.

2. Построение решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему нелинейных автономных дифференциальных уравнений

$$\frac{dc_l}{dt} = Q_l(c_1, \dots, c_N), l = 1, \dots, N \quad (2.1)$$

К системе нелинейных дифференциальных уравнений сводится система уравнений Навье – Стокса и уравнение неразрывности.

$$\frac{dc_m(t)}{dt} = \sum_{p,q=1}^N F_{mpq} c_p(t) x_q(t) + \sum_{p=1}^N G_{mp} c_p(t) + H_m = Q(c_1, \dots, c_N); m = 1, \dots, N \quad (2.2)$$

Где величина трехмерной скорости определяется по формуле

$$\mathbf{V}(t, x_1, x_2, x_3) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n(t) \varphi_n(x_1, x_2, x_3). \text{ Причем функция } \varphi_n(x_1, x_2, x_3) \text{ определяется}$$

в виде синуса. Тогда коэффициенты $c_n(t)$ для непрерывной функции убывают с ростом индекса как величины не большие $1/n^2$ и возможна редукция, т.е. вместо бесконечного числа членов используется конечное число членов.

Исследуются комплексные и действительные решения задачи Коши этого дифференциального уравнения в случае действительных и комплексных начальных условиях, при действительном аргументе t . Начальные условия имеют вид $c_l(t_0) = c_l^0, l = 1, \dots, N$, где величина t_0 соответствует начальному моменту интегрирования, а величина c_l^0 в общем случае комплексная. Причем в случае действительных значениях $c_k, k = 1, \dots, N$, правая часть (2.1) действительна.

Систему дифференциальных уравнений (2.2) можно представить при

не кратных положениях равновесия путем подстановки $c_l = \sum_{k=1}^N g_{lk} x_k$. При этом

положения равновесия системы (2.2) $b_l^s, l = 1, \dots, N; s = 1, \dots, S$ перейдут в

положения равновесия $a_l^s, l = 1, \dots, N; s = 1, \dots, S$. При этом определяются

собственные числа и собственные векторы линеаризованной системы (2.2).

$$\left[\frac{\partial Q_k}{\partial c_m}(b_1^s, \dots, b_N^s) - \Lambda_\alpha^s \delta_{km} \right] g_{m\alpha}^s = 0$$

$$\left| \frac{\partial Q_k}{\partial c_m}(b_1^s, \dots, b_N^s) - \Lambda_\alpha^s \delta_{km} \right| = 0$$

Система уравнений (2.2) запишется в виде

$$\frac{dx_n}{dt} = \Lambda_n^s (x_n - a_n^s) + (x_n - a_n^s)^2 P_n^s(x_1, \dots, x_N) = F_n(x_1, \dots, x_N). \quad (2.3a)$$

Систему уравнений (2.3a) можно записать в виде

$$\frac{dx_l}{dt} = \exp[G_l(x_1, \dots, x_N)] \prod_{s=1}^S (x_l - a_l^s), \quad (2.3б)$$

где введен не обращающийся в ноль множитель $\exp[G_l(x_1, \dots, x_N)]$, который

равен $\exp[G_l(x_1, \dots, x_N)] = F_l(x_1, \dots, x_N) / \prod_{s=1}^S (x_l - a_l^s)$. При подстановке этого

множителя в (2.3б), получим (2.3a). Покажем, что этот множитель в ноль не

обращается. Величины a_l^s удовлетворяют условию

$F_k(a_1^s, \dots, a_N^s) = 0, k = 1, \dots, N; s = 1, \dots, S$, где величина S конечна.

При условии $x_l \rightarrow a_l^\alpha, l = 1, \dots, N$ имеем конечный предел

$$\exp[G_l(a_1^\alpha, \dots, a_N^\alpha)] = \frac{\partial F_l(a_1^\alpha, \dots, a_N^\alpha)}{\partial x_l} / [(a_l^\alpha - a_l^1) \dots (a_l^\alpha - a_l^{\alpha-1}) (a_l^\alpha - a_l^{\alpha+1}) \dots (a_l^\alpha - a_l^S)] =$$

$$= \Lambda_l^\alpha / [(a_l^\alpha - a_l^1) \dots (a_l^\alpha - a_l^{\alpha-1}) (a_l^\alpha - a_l^{\alpha+1}) \dots (a_l^\alpha - a_l^S)]$$

Где произвели сокращение множителя $x_l - a_l^\alpha$, числитель дроби в ноль не обращается, так как рассматриваются не совпадающие корни, являющиеся координатами положения равновесия. Показали, что этот множитель в ноль не обращается при не совпадающих координатах положения равновесия.

Величины a_l^s удовлетворяют условию $F_k(a_1^s, \dots, a_N^s) = 0, k = 1, \dots, N; s = 1, \dots, S$, где величина S конечна.

При этом дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\frac{dx_l}{dH_l(t, t_0)} = \prod_{s=1}^S (x_l - a_l^s), \quad (2.4)$$

$$\frac{dH_l(t, t_0)}{dt} = \exp\{G_l[x_1(H_l), \dots, x_N(H_l)]\}$$

где $H_l(t, t_0)$ стремящаяся к бесконечности функция при условии стремления координат к положению равновесия. В случае решения в действительной плоскости это монотонная функция. Т.е. получаем зависимость решения от величины $H_l(t, t_0)$, которая является монотонной функцией времени.

Лемма 2. Необходимым и достаточным условием стремления неизвестной функции к устойчивым координатам положения равновесия является условие $H_l(t, t_0) \rightarrow \infty$, причем $t \rightarrow \infty$.

Имеем соотношения

$$\exp[G_l(x_1, \dots, x_N)] \rightarrow \exp[G_l(a_1^s, \dots, a_N^s)] =$$

$$= \Lambda_l^s / [(a_l^\alpha - a_l^1) \dots (a_l^\alpha - a_l^{\alpha-1})(a_l^\alpha - a_l^{\alpha+1}) \dots (a_l^\alpha - a_l^S)]; \quad (2.5)$$

при $t \rightarrow \infty$ и значит $H_l(t, t_0) \rightarrow \infty, l = 1, \dots, N$, как интеграл от константы. Справедлива и обратная теорема, при условии $H_l(t, t_0) \rightarrow \infty, l = 1, \dots, N$, реализуется одно из устойчивых положений равновесия. Это следует из вида решения, при условии $H_l(t, t_0) \rightarrow \infty, l = 1, \dots, N$ имеется отрицательная действительная часть у числа λ_l^s в формуле (2.6) согласно лемме 4, и решение стремится к координате положения равновесия a_l^s в формуле (2.4). При этом величина времени стремится к бесконечности.

Лемма 3. Решением дифференциального уравнения (2.1) является функция $x_l(t)$, удовлетворяющая формуле (2.6).

Для получения (2.6) разделим уравнение (2.4) на произведение множителей $x_l - a_l^s$ и умножим (2.4) на величину $dH_l(t, t_0)$. Раскладываем полученную дробь на сумму простых дробей и их интегрируем. Получаем уравнения

$$\sum_{s=1}^S \lambda_l^s [\ln(x_l - a_l^s) + 2\pi i n_s] \Big|_{t_0}^t = H_l(t, t_0), l = 1, \dots, 2N.$$

Где в случае излучения звуковой энергии в интервале $[t_0, t]$ получим разные ветви логарифма.

Потенцируя полученное выражение, получим (2.6)

$$\prod_{s=1}^S (x_l - a_l^s)^{\lambda_l^s} \exp(2\pi i \lambda_l^s \Delta n_s) / \prod_{s=1}^S (x_l^0 - a_l^s)^{\lambda_l^s} = \exp[H_l(t, t_0)]; \quad (2.6)$$

$$\lambda_l^s = 1 / [(a_l^s - a_l^1) \dots (a_l^s - a_l^{s-1})(a_l^s - a_l^{s+1}) \dots (a_l^s - a_l^S)]$$

где все значения координат положения равновесия не кратные и не зависят от процесса излучения, происходящего в интервале $[t_0, t]$. Причем в случае ламинарного действительного решения излучения не будет, а в случае турбулентного, сопровождающегося излучением решения будет переход энергии. В самом деле, наличие излучения определяет комплексное решение, которое описывает турбулентный пульсирующий режим. При этом турбулентный режим при перестройке решения сопровождается звуковым шумом. На координаты положения равновесия, определяющие стационарное решение, экспоненциальный множитель не оказывает влияние.

Лемма 4. Сумма коэффициентов λ_l^s по индексу s равна нулю, т.е. $\sum_{s=1}^S \lambda_l^s = 0$.

В случае если разлагается дробь

$$P(y) = \frac{Q_{S-1}(y)}{(y - a_1^1) \dots (y - a_1^{S-1})(y - a_1^{S+1}) \dots (y - a_1^S)}.$$

Где $Q_{S-1}(y)$ полином степени $S-1$. Свойство $\sum_{s=1}^S \lambda_i^s = 0$ останется,

$$\lambda_i^s = \frac{Q_{S-1}(a_i^s)}{(a_i^s - a_1^1) \dots (a_i^s - a_1^{s-1})(a_i^s - a_1^{s+1}) \dots (a_i^s - a_1^S)}.$$

Докажем это. Для чего

рассмотрим сумму

$$P(y) = \sum_{s=1}^S \frac{Q_{S-1}(a_i^s)(y - a_1^1) \dots (y - a_1^{s-1})(y - a_1^{s+1}) \dots (y - a_1^S)}{(a_i^s - a_1^1) \dots (a_i^s - a_1^{s-1})(a_i^s - a_1^{s+1}) \dots (a_i^s - a_1^S)}.$$

Эта сумма равна $P(y) = Q_{S-1}(y)$. Распишем формулу для полинома, равного $Q_{S-1}(y)$, разделив его на произведение $(y - a_1^1) \dots (y - a_1^S)$, получим

$$\sum_{s=1}^S \frac{Q_{S-1}(a_i^s)}{(a_i^s - a_1^1) \dots (a_i^s - a_1^{s-1})(a_i^s - a_1^{s+1}) \dots (a_i^s - a_1^S)(a_i^s - y)} + \frac{Q_{S-1}(y)}{(y - a_1^1) \dots (y - a_1^{S-1})(y - a_1^S)(y - a_1^{S+1}) \dots (y - a_1^S)} = 0$$

полагая, $y = a_1^{S+1}$ получим тождество $\sum_{s=1}^{S+1} \lambda_i^s = 0$, в случае, если имеется $S+1$

положение равновесия.

Но чтобы реализовать решение, надо знать положения равновесия этой системы нелинейных уравнений. Кроме того, положения равновесия могут быть кратные, что изменяет ход решения, оно становится случайным, или хаотическим. Но удастся доказать важную теорему.

Теорема 1. Рассматривается задача Коши при произвольных действительных начальных условиях для системы нормальных нелинейных обыкновенных

дифференциальных уравнений (2.1). Случай вырожденного решения задачи Коши – положения равновесия, не рассматривается. В случае, если у системы (2.1) имеются комплексно-сопряженные положения равновесия с действительной частью, то при конечном аргументе t действительное решение задачи Коши системы (2.1) при действительных начальных условиях стремится к бесконечности. Потом это решение переходит в комплексное решение, стремясь к положению равновесия, в случае, если комплексные координаты положения равновесия имеют действительную часть. При этом правую часть (2.1) считаем регулярной функцией, действительной при действительных аргументах. Она имеет конечное число не кратных положений равновесия.

Доказательство.

Если решать систему (2.2) при не кратных положениях равновесия, то получим согласно с леммой 3

$$\begin{aligned} & \{-2\lambda_{iml}^s \arctan[(x_l - a_l^s)/b_l^s] + \lambda_{rel}^s \ln[(x_l - a_l^s)^2 + (b_l^s)^2]\} |_{t_0}^t + \\ & + \sum_k \lambda_l^k \ln(x_l - c_l^k) |_{t_0}^t = H_l(t, t_0), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $a_l^s + ib_l^s$ выделенное комплексное положение равновесия, c_l^s остальные положения равновесия. Коэффициенты λ_l^s удовлетворяют $\sum_s \lambda_l^s = 0$ в

соответствии с леммой 4. При этом в сумме $\sum_{s=1}^S \lambda_l^s$ величина действительной

части λ_{rel}^s в случае комплексного значения λ_l^s участвует дважды и в силу того,

что все числа λ_l^s удовлетворяют условию $\sum_s \lambda_l^s = 0$, имеем формулу

$$2\lambda_{rel}^s + \sum_k \lambda_l^k = 0.$$

Обоснуем формулу (2.3). Для этого два комплексно сопряженных члена решения преобразуем (для упрощения записи индекс l опускаем)

$$\frac{\lambda_{re}^s + i\lambda_{im}^s}{x - a^s - ib^s} + \frac{\lambda_{re}^s - i\lambda_{im}^s}{x - a^s + ib^s} = \frac{2(x - a^s)\lambda_{re}^s - 2b^s\lambda_{im}^s}{(x - a^s)^2 + (b^s)^2}, \quad (2.8)$$

где $\lambda^s = \lambda_{re}^s + i\lambda_{im}^s$. После интегрирования (2.8) по аргументу x , получим формулу (2.7)

$$\lambda_{re}^s \ln[(x - a^s)^2 + (b^s)^2] - 2\lambda_{im}^s \arctan \frac{x - a^s}{b^s}.$$

Решение равняется

$$x_l(t) = a_l^s + b_l^s \tan D_l(t),$$

где

$$\begin{aligned} D_l(t) &= \left\{ \sum_k \lambda_l^k \ln(x_l - c_l^k) \Big|_{t_0}^t + \lambda_{rel}^s \ln[(x_l - a_l^s)^2 + (b_l^s)^2] \Big|_{t_0}^t - H_l(t, t_0) \right\} / 2\lambda_{iml}^s = \\ &= \left\{ \sum_k \lambda_l^k + 2\lambda_{rel}^s + \sum_k \lambda_l^k \ln(1 - c_l^k / x_l) + \lambda_{rel}^s \ln[(1 - a_l^s / x_l)^2 + (b_l^s)^2 / x_l^2] - \right. \\ &\quad \left. - \sum_k \lambda_l^k \ln(x_l^0 - c_l^k) - \lambda_{rel}^s \ln[(x_l^0 - a_l^s)^2 + (b_l^s)^2] - H_l(t, t_0) \right\} / 2\lambda_{iml}^s, \\ &\quad \sum_k \lambda_l^k + 2\lambda_{rel}^s = 0 \end{aligned}$$

При этом величина $\sum_k (\lambda_l^k c_l^k + 2\lambda_{rel}^s a_l^s)$ действительная в силу существования комплексно-сопряженных положений равновесия. Т.е. имеем равенство при условии $|x_l| \rightarrow \infty$ при конечном t

$$x_l(t) = a_l^s + b_l^s \tan D_l(t). \quad (2.9)$$

Это уравнение имеет решение, стремящееся к бесконечности.

При этом решение дифференциального уравнения при росте $H_l(t, t_0)$ согласно лемме 2, может иметь комплексные корни

$$\sum_k \lambda_l^k \ln(x_l - a_l^k) \Big|_{t_0}^t = H_l(t, t_0) .$$

При этом, так как справедливо $\sum_k \lambda_l^k = 0$ согласно лемме 4, и положения равновесия имеют действительную часть, имеются числа с отрицательной действительной частью λ_l^k , значит, имеется сходимость к одному из положений равновесия. Действительное решение будет стремиться к бесконечности, причем нарушатся условия существования и единственности задачи Коши. При этом при бесконечности $H_l(t, t_0)$ согласно лемме 2 неизвестная функция будет стремиться к одному из положений равновесия. Это положение равновесия не может быть действительным, так как действительное решение бесконечно. Значит, решение будет иметь точку ветвления и стремиться к комплексному положению равновесия. Значит, при комплексных положениях равновесия получается конечное комплексное решение при изменении $H_l(t, t_0)$. Т.е. в некоторой точке начнется комплексное решение.

Конец доказательства.

Приведем пример, описывающий это свойство дифференциального уравнения, переход к комплексному решению. Так для дифференциального уравнения может возникнуть комплексное решение, вместо бесконечного действительного решения

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2 .$$

Причем положения равновесия чисто мнимые $x = \pm i$, и значит, решение может не стремиться к положению равновесия. Причем действительное решение

этого дифференциального уравнения быстро стремиться к бесконечности $x = \tan[t - t_0 + \arctan(x_0)]$.

Используя неявную схему решения, получим следующее уравнение

$$x = x_0 + (1 + x^2)\Delta t + 0(\Delta t)^2.$$

Разрешая относительно неизвестной функции x , получим неявную схему

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4[x_0 + \Delta t + 0(\Delta t)^2]\Delta t}}{2\Delta t}.$$

Эта неявная схема с постоянным шагом правильно описывает стремление решения к бесконечности. При счете с уменьшенным шагом она определяет большее значение переменной t и значит, определяет большее значение неизвестной функции. Т.е. правильно описывает решение дифференциального уравнения до бесконечности решения. Когда бесконечность достигнута, при условии $x_0 > 1/(4\Delta t) - \Delta t - 0(\Delta t)^2$ определится конечное комплексное решение. Численный счет этого уравнения подтвердил правильность проведенного анализа решения.

Причем комплексное решение обладает новыми свойствами, оно сложным образом вращается вокруг положения равновесия. При этом действительное решение стремится к бесконечности, т.е. правая часть дифференциального уравнения стремится к бесконечности, и нарушаются условия существования и единственности решения задачи Коши, и возникает дополнительное комплексное решение.

Решение с комплексными начальными данными определится формулой $x = \tan[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]$ при любом t . Т.е. приближенно имеем

$$\begin{aligned}
x(t) &= -i \frac{\exp\{i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\} - \exp\{-i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\}}{\exp\{i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\} + \exp\{-i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\}} = \\
&= i - 2i \exp\{2i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\} + i \exp\{4i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\} + \dots = \\
&= i - 2i \exp[2i(t - t_0 + \alpha) - 2\beta] + i \exp[4i(t - t_0 + \alpha) - 4\beta] + \dots \\
&\quad \arctan(x_0 + i\delta) = \alpha + i\beta
\end{aligned}$$

При этом знаменатель этой дроби в ноль не обращается.

Т.е. конечного решения задачи в действительной плоскости не существует. А в комплексной плоскости имеется конечное непрерывное решение в случае не кратных положениях равновесия.

Но возникает вопрос, каков физический смысл мнимой части комплексного решения.

3. Физический смысл комплексного решения.

Опишем физический смысл комплексного турбулентного решения. Итак, рассмотрим действительное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений $x_\alpha(t)$. Пусть начальные данные имеют среднее x_α^0 и дисперсию $\langle [\Delta x_\alpha^0]^2 \rangle$ (дисперсия начальных данных в случае уравнения Навье – Стокса определяется шероховатостью поверхности или не точно заданными начальными данными). Тогда для дисперсии решения имеем

$$\langle [\Delta x_l]^2 \rangle = \langle [x_l - \langle x_l \rangle]^2 \rangle = \langle x_l^2 \rangle - 2 \langle x_l \rangle \langle x_l \rangle + \langle x_l \rangle^2 = \langle x_l^2 \rangle - \langle x_l \rangle^2.$$

Значит имеем

$$\langle x_l^2 \rangle = \langle x_l \rangle^2 + \langle [\Delta x_l]^2 \rangle = \langle x_l \rangle + i \sqrt{\langle [\Delta x_l]^2 \rangle} \quad (3.1)$$

Приведу формулировку обратной теоремы Пифагора. Для всякой тройки положительных чисел a, b и c , такой, что $a^2 + b^2 = c^2$, существует

прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c . Значит, математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение образуют катеты, а гипотенузой является корень из среднего квадрата величины. Т.е. величина среднего $\langle x_i \rangle$ ортогональна среднеквадратическому отклонению $\sqrt{\langle [\Delta x_i]^2 \rangle}$, которое образует мнимую часть координаты тела. Таким образом, полученное в результате усреднения во времени декартово пространство с колебательной скоростью высокой частоты (период колебания меньше времени измерения) становится комплексным пространством. Т.е. в случае большой дисперсии величины действительного пространства, его нужно рассматривать как комплексное трехмерное пространство, где мнимая часть соответствует среднеквадратическому отклонению. При этом имеется следующая связь между переменными $\sqrt{\langle x_i^2 \rangle} = (\langle x_i \rangle + i\sqrt{\langle [\Delta x_i]^2 \rangle})\alpha, |\alpha|=1$, причем комплексное число α выбирается из условия, чтобы мнимая часть имела положительное или отрицательное значение. Этому удовлетворяет среднеквадратичное отклонение. Но иногда среднеквадратичное отклонение положительно, например, в случае диэлектрической проницаемости, где вмешиваются положительные и отрицательные заряды. Тогда имеем формулу $\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{4\pi i \sigma}{\omega}$, где действительная часть пропорциональна положительному среднеквадратичному отклонению диполя, а проводимость пропорциональна среднему значению. Но зато проводимость делится на частоту, которая имеет положительный и отрицательный знак.

Следовательно, алгоритм нахождения среднего решения, или среднего в фазовом пространстве решения, и его дисперсию сводится к нахождению комплексного решения. Среднее решение соответствует действительной части решения, а квадрат комплексной части соответствует дисперсии решения. Таков физический смысл комплексного решения, действительная часть - это среднее решение, а мнимая часть - это его среднеквадратическое отклонение.

Причем действительная и мнимая часть ортогональны, и образуют комплексное пространство. В самом деле, согласно обратной теореме Пифагора в силу формулы (3.1) математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение образуют катеты, а средний квадрат является гипотенузой.

Отметим, что при расчете движения потока при учете одного члена ряда, надо брать квадратный корень из мнимой части, так как вычисляется поступательная скорость. Мнимая часть соответствует квадратному корню из колебательной части безразмерной скорости. Ситуация аналогична вычислению отклонения при случайном выборе шага вперед или назад с вероятностью $\frac{1}{2}$ и положение точки после N шагов определяется значением \sqrt{N} . Действительная часть решения и мнимая часть решения расположены на разных осях комплексного пространства. Но если усреднять мнимую безразмерную часть, получим

$$\langle x_\alpha(t) \rangle + i\sqrt{\langle [\Delta x_\alpha(t)]^2 \rangle} \rightarrow \langle x_\alpha(t) \rangle + i^4\sqrt{\langle [\Delta x_\alpha(t)]^2 \rangle}$$

Причем решение равно модулю последней величины, и при разных шероховатостях мнимую часть решения надо умножать на усредняющий множитель. При этом если вычисляются все коэффициенты ряда из системы нелинейных уравнений, извлекать квадратный корень из мнимой части не надо. Необходимо складывать комплексные величины и брать модуль суммы.

Покажем, что мнимая часть комплексной производной от координаты в фазовом пространстве дифференциального уравнения, которую назовем скоростью, образует пульсирующее перемещение координаты в фазовом пространстве, т.е. в пространстве переменных $\langle x_k(t) \rangle + i\sqrt{\langle [\Delta x_k(t)]^2 \rangle}$.

Используется в качестве переменных среднее значение, ведь на молекулярном уровне среда не гладкая.

Лемма 5. Комплексное решение определяет колеблющуюся пульсирующую функцию координат перемещения потока.

Мнимая часть скорости соответствует скорости вращения в фазовом пространстве. Так как известен радиус вращения, то можно определить и частоту вращения. В плоскости вращения комплексную скорость с постоянным радиусом вращения и постоянной частотой можно представить в виде $V_x + iV_y = V_0 \exp(i\omega t)$. В случае переменной по пространству стационарной скорости эту формулу можно представить локально в одной плоскости в виде

$$V_x(x, y) + iV_y(x, y) = V_0(x, y) \exp\left[i \int_0^t \omega(x, y, u) du\right],$$

причем частота зависит от времени, так как смещение фазы обеспечивается гармоническими колебаниями в соседних точках. Сумма гармонических колебаний с разными частотами, зависящими от времени, определяет пульсирующий режим в фазовом пространстве, при стационарной комплексной скорости. Т.е. получается, что комплексная скорость описывает пульсирующие во времени координаты точек фазового пространства. Ситуация аналогична наличию нескольких стационарных вихрей, описывающих пульсирующее вращение потока.

Лемма 6. Трехмерную скорость потока можно представить в виде

$$V_l = V_{il} + iV_{nl} = V_l \exp(i\varphi_l), \varphi_l = \arg(V_{il} + iV_{nl}).$$

Причем скорости определяются в виде интеграла от касательного ускорения, по формуле

$$\begin{aligned} V_{il} &= \int_{t_0}^t t_l(u) w_t(u) du + V_{il}(t_0) = \int_{t_0}^t t_l(u) \frac{d \sqrt{\sum_{k=1}^3 V_k(u) V_k^*(u)}}{du} du + V_{il}(t_0) = \\ &= \int_{t_0}^t t_l(u) \frac{d \sqrt{\sum_{k=1}^3 [V_{ik}^2(u) + V_{nk}^2(u)]}}{du} du + V_{il}(t_0), \end{aligned}$$

Интеграл от нормального ускорения определяет нормальную компоненту скорости, по формуле

$$\begin{aligned}
V_{nl} - \text{Im}V_l(\tau_0) &= \int_{\tau_0}^{\tau} w_{nl}(u)du = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{n_l(u) |\text{Im} \mathbf{V}|^2}{\rho(u)} du = \int_{s_0}^s |\text{Im} \mathbf{V}(s)| \frac{n_l(s)}{\rho(s)} ds = \\
&= \int_{s_0}^s |\text{Im} \mathbf{V}| dt_l = \begin{cases} |\text{Im} \mathbf{V}| [t_l(s) - t_l(s_0)], |\text{Im} \mathbf{V}| = \text{const} \\ \int_{s_0}^s |\text{Im} \mathbf{V}| dt_l, |\text{Im} \mathbf{V}| \neq \text{const} \end{cases}, \\
\sum_{k=1}^3 [V_{tk}^2(u) + V_{nk}^2(u)] &= |\mathbf{V}|^2; dt_l(s) = \frac{n_l(s)ds}{\rho(s)}; t_l(\tau) = \frac{\text{Im} \mathbf{V}_l}{|\text{Im} \mathbf{V}|}
\end{aligned}$$

При этом величина локальной скорости $V_{nl}(\tau_0) = \text{Im}V_l(\tau_0), V_{tl}(\tau_0) = \text{Re}V_l(\tau_0)$. Но проинтегрированная относительно центростремительного ускорения скорость отлична от нуля $V_{nl}(\tau) \neq 0$, обращаясь при постоянной скорости частицы и постоянном радиусе кривизны, за период $T = \frac{2\pi R}{|\mathbf{V}|}$, где величина R это радиус

кривизны, в ноль при той же помеченной начальной точке. При переменной скорости частицы за время, когда один из интегралов $\int_{\tau_0}^{\tau} |\mathbf{V}| dt_l = 0$, которое,

при конечном радиусе кривизны одного знака траектории, конечно и равно $T = \int_0^{2\pi} \frac{R(\varphi)d\varphi}{|\mathbf{V}(\varphi)|} = \int_{s_0}^{s_0+s_T} \frac{ds}{|\mathbf{V}(s)|}, 2\pi = \int_{s_0}^{s_0+s_T} \frac{ds}{R(s)}$, так как касательное направление t_l ,

при вращении меняет знак.

Тангенциальное ускорение определяется по формуле

$$w_t = d \sqrt{\sum_{k=1}^3 [V_{tk}^2(t) + V_{nk}^2(t)]} / dt.$$

Направление скоростей $\Delta V_{tl}, \Delta V_{nl}$ ортогонально и их сумма приводит к приращению модуля скорости движения

$$\sum_{l=1}^3 (dV_l)^2 = \sum_{l=1}^3 [(dV_{tl})^2 + (dV_{nl})^2] = \sum_{l=1}^3 |dV_{tl} + idV_{nl}|^2, \quad \text{так как}$$

$\sum_{l=1}^3 (w_l)^2 = \sum_{l=1}^3 [(w_{tl})^2 + (w_{nl})^2]$. Дифференцируемые по времени компоненты этих проекций определяют тангенциальное и нормальное ускорение. При этом вводится понятие тангенциальной и нормальной скорости, которые в декартовом пространстве не ортогональны $(\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_l) \neq 0$, но в шестимерном комплексном пространстве ортогональны и их модуль комплексного вектора $V_l = V_{tl} + iV_{nl}$ равен

$$\sum_{l=1}^3 |V_l|^2 = \sum_{l=1}^3 [(V_{tl})^2 + (V_{nl})^2] = \sum_{l=1}^3 |V_{tl} + iV_{nl}|^2$$

Это доказывается представлением $\mathbf{V}_t = \sum_{l=1}^3 V_{tl} \mathbf{e}_{tl}$, $\mathbf{V}_n = \sum_{l=1}^3 V_{nl} \mathbf{e}_{nl}$ и вычислением модуля как произведения комплексно сопряженных векторов с учетом ортогональности шести действительных ортов.

Итак, получено решение уравнений Навье – Стокса в случае не кратных положений равновесия. Оно имеет вид

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n(t) \varphi_n(\mathbf{r})$$

$$\sum_{s=1}^S \lambda_l^s \ln(x_l - a_l^s) \Big|_{t_0}^t = H_l(t, t_0), l = 1, \dots, 2N$$

$$\lambda_l^s = 1 / [(a_l^s - a_l^1) \dots (a_l^s - a_l^{s-1})(a_l^s - a_l^{s+1}) \dots (a_l^s - a_l^S)]$$

Где величины a_l^s координаты положения равновесия.

Ламинарное решение соответствует координатам положения равновесия, структура турбулентного решения имеет вид

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_{nk}}{g(t) - g_{nk}(t_n)} \varphi_n(\mathbf{r}) + \mathbf{a}^s$$

Где $g_{nk}(t)$ известная определенная непрерывная функция, величина t_n определится из начальных условий, причем $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$. Причем решение

содержит множество полюсов, которые для действительного решения при действительных начальных данных приводят к бесконечности. Комплексное решение при действительном времени и комплексных начальных условиях, определяющих комплексное значение t_n , конечно. При этом комплексное решение стремится к комплексным координатам положения равновесия.

При этом формула

$$\sum_{s=1}^S \lambda_l^s \ln(x_l - a_l^s) \Big|_{t_0}^t = H_l(t, t_0), l = 1, \dots, 2N. \quad (3.2)$$

Может содержать точки ветвления, в которых решение непрерывным образом переходит в другую ветвь решения. Это не противоречит теореме единственности решения задачи Коши, так как левая часть дифференциального уравнения стремится в точке ветвления к бесконечности. Производная от правой части обыкновенного дифференциального уравнения также стремится в точке ветвления к бесконечности. Получается точка не продолжаемого решения. Но это решение можно продолжить с помощью формулы (3.2).

Ситуация аналогична уравнению Шредингера, когда имеется в общем случае счетное количество решений. Это не удивительно, ведь уравнение Шредингера сводится к уравнению Навье – Стокса. Докажем это. Для чего запишем уравнение Шредингера и преобразуем его воспользовавшись

тождеством
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_l^2} = \psi \left[\frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial x_l^2} + \frac{1}{\psi^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_l} \right)^2 \right]$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_l^2} + U\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi \sum_{l=1}^3 \left[\frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial x_l^2} + \frac{1}{\psi^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_l} \right)^2 \right] + U\psi.$$

Разделив на массу $m\psi$, получим уравнение

$$i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial \ln \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m^2} \sum_{l=1}^3 \left(\frac{\partial \ln \psi}{\partial x_l} \right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2m^2} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial x_l^2} + U/m.$$

Получим уравнение в частных производных, взяв градиент от обеих частей уравнения, введем действительную скорость по формуле $\mathbf{V} = -i \frac{\hbar}{m} \nabla \ln \psi$.

$$\frac{\partial i \frac{\hbar}{m} \nabla \ln \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{m^2} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_l} \frac{\partial \nabla \ln \psi}{\partial x_l} = \frac{i\hbar}{2m} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 i \frac{\hbar}{m} \nabla \ln \psi}{\partial x_l^2} + \nabla U / m$$

Подставляя значение скорости в преобразованное уравнение Шредингера, получим

$$\frac{\partial V_p}{\partial t} + \sum_{l=1}^3 V_l \frac{\partial V_p}{\partial x_l} = v \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 V_p}{\partial x_l^2} - \frac{\partial U}{\partial x^p} / m, v = \frac{i\hbar}{2m}.$$

Получим трехмерное уравнение Навье – Стокса с давлением, соответствующим потенциалу. Но задача гидродинамики отличается от уравнения Навье – Стокса, полученного из уравнения Шредингера, уравнением неразрывности.

При этом можно провести аналогию между ламинарным однозначным режимом и классическим однозначным описанием тел. Между турбулентным режимом, имеющим счетное количество решений и квантовым описанием частиц, имеющих счетное количество решений. В случае турбулентного комплексного и ламинарного действительного режима между ними имеется граница, критическое число Рейнольдса. Аналогичная граница имеется между классическим и квантовым описанием частиц, соответствующая переходу энергии состояния из отрицательного в положительное состояние. В свою очередь уравнение Навье – Стокса должно иметь дискретные уровни энергии состояния турбулентного потока, должны реализовываться переходы между этими состояниями с выделением энергии или поглощением энергии.

Границу между классическим описанием частиц и квантовым можно провести, это переход к комплексному квантовому числу, или бесконечности

главного квантового числа атома водорода. При этом бесконечное квантовое число атома водорода через нулевое значение выражения $1/n^2$, где n главное квантовое число, становится мнимым, непрерывным. Ламинарному решению задачи гидродинамики, при котором имеется однозначное решение, соответствует волновая функция свободного движения, которая однозначна, при непрерывной энергии. Причем при большом квантовом числе система является квазиклассической, т.е. близко к граничному квантовому числу, равному бесконечности, система почти классическая.

Причем имеется граница, между свободным решением, и решением, описывающим связанные состояния. Это нулевое значение энергии, также как и в нелинейных уравнениях в частных производных, существует граница между турбулентным комплексным решением и ламинарным действительным решением.

Список литературы

1. *А.С. Монин, А.М. Яглом* Статистическая гидромеханика Механика турбулентности Часть 1. М.: «Наука», 1965, -640с.
2. *Г. Шлихтинг* Теория пограничного слоя М.: «Наука», 1974, -713с.
3. *Е.Г. Якубовский* Комплексные ограниченные решения уравнений в частных производных. Материалы международной научно-практической конференции. Теоретические и практические аспекты естественных и математических наук. Новосибирск: Изд. «Сибак», 2012, с. 19-30. www.sibac.info
<http://sibac.info/index.php/2009-07-01-10-21-16/5809-2013-01-17-07-57-12>
4. *Е.Г. Якубовский* Модель комплексного пространства Материалы XIII международной научно-практической конференции, Т.1 М.: «Институт стратегических исследований», изд. «Спецкнига», - 2014, 26-32с.
5. *Е. Г. Якубовский* Модель комплексного пространства и распознавание образов. На стыке наук. Физико-химическая серия. Т.2, Казань, - 2014, стр. 186-187.

<http://istina.msu.ru/media/publications/article/211/bd0/6068343/raspoznavobrazovwithequation.pdf>

6. Yakubovski E.G. DETERMINATION OF COEFFICIENT OF RESISTANCE ROUND PIPE. THE DEVELOPMENT OF SCIENCE IN THE 21ST CENTURY: NATURAL AND TECHNICAL SCIENCES 2015, 10 p. DOI: 10.17809/06(2015)-14

7. Ч. Киммель Введение в физику твердого тела, М.: «Наука», 1978, с. 789

8. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц Гидродинамика. -М.: Наука, 1980.-535с.