

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

Евгений Георгиевич Якубовский

В общей теории относительности (ОТО) и специальной теории относительности (СТО) понятие абсолютно твердое тело не применимо. Покажем, что в этих теориях можно применять понятие абсолютно твердого тела.

Для этого обобщим уравнение Эйлера на произвольное вращающееся абсолютно твердое тело, получив конечную трехмерную скорость распространения сигнала. Уравнение Эйлера имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} + [\mathbf{w}, \mathbf{p}] &= \mathbf{F} \\ \frac{d\mathbf{M}}{dt} + [\mathbf{w}, \mathbf{M}] &= \mathbf{K} \end{aligned}$$

Попробуем записать его в релятивистском инвариантном виде

$$\begin{aligned} \frac{dp^l}{ds} + \Gamma_{kn}^l p^k p^n / mc_l &= F^l / c_l, \\ \frac{DM^{lm}}{ds} + g^{ls} g^{nm} E_{sqk} \omega^q M^{km} &= \frac{dM^{lm}}{ds} + g^{ls} g^{nm} \Omega_{snk} M^{km} = K^{lm}, l, k, n = 0, \dots, 3 \end{aligned}$$

Член $\omega_k p^k p^l / mc$ при малых скоростях равен нулю, но при релятивистских скоростях не равен нулю. Где величина Γ_{kn}^l это символ Кристоффеля. При этом

$\Omega_{sqk} = E_{sqkn} \omega^n$, где E_{sqkn} антисимметричный тензор, равный

$E_{lmnq} = \frac{\partial x'_l}{\partial x_p} \frac{\partial x'_m}{\partial x_q} \frac{\partial x'_n}{\partial x_k} \frac{\partial x'_s}{\partial x_u} e_{pqku}$, где e_{pqku} антисимметричный тензор, равный ± 1 в

зависимости от четности перестановки индексов. Если перестановка индексов четная, то выбираем знак плюс, в случае нечетной перестановки индексов получаем знак минус. Остальные компоненты тензора вращения равны нулю.

Причем имеем $\omega^n = E^{nmpq} \Omega_{mpq} / 6$. Нулевая частота определяется по формуле

$$\omega^0 = -\sum_{k=1}^3 \omega^k V_k / c_k, \omega^l u_l = 0, \text{ где } u_l \text{ четырехмерная скорость частицы.}$$

Величина J^{kn} момент инерции тела, в инерциальной системе отсчета связан с моментом импульса $M^{kl} = \omega^k g_{kp} J^{pl}, J^{pl} = \sum m(x_k x^k g^{pl} - x^p x^l)$.

При этом уравнение Эйлера без внешнего воздействия запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{D\omega_s}{ds} + E_{skqm} g_{kp} J^{pm} (J_s^m)^{-1} \omega^q \omega^k = \\ = \frac{D\omega_s}{ds} + C_{skq} \omega^q \omega^k = 0; C_{skq} = E_{skqm} J_k^m (J_s^m)^{-1} \end{aligned}$$

В трехмерном случае имеем $C_{skq} = \sum_{m=1}^3 E_{skqm} J_k^m (J_s^m)^{-1}; s, q, k = 1, \dots, 3$.

Момент импульса равен

$$M^{kl} = \sum (x^k p^l - x^l p^k) / c_l c_k = [\sum (t\mathbf{p}_l - \frac{E\mathbf{r}_l}{c^2}) / c_l, -\mathbf{M}], k, l = 0, \dots, 3.$$

Четырехмерный тензор момента равен $M^{23} = M_1, -M^{13} = M_2, M^{12} = M_3$.

Компоненты M^{01}, M^{02}, M^{03} составляют вектор $\sum (t\mathbf{p}_l - \frac{E\mathbf{r}_l}{c^2}) / c_l$.

Величина $F^l, K^{lm} = E^{lmpq} x_p F_q / c_p c_q$ внешняя четырехмерная сила и внешний момент четырехмерной силы. Четырехмерное уравнение движения Ньютона

$$\frac{dp_n}{dt} = F_n.$$

Нулевая компонента четырехмерной силы равна $F_0 = -\sum_{k=1}^3 F_k V^k / c_k, F_l u^l = 0$

Умножим уравнение движения Ньютона на тензор $e^{pqmn} x_m / c_m c_n$. Получим уравнение

$$\frac{de^{pqmn} x_m p_n / c_m c_n}{ds} = \frac{dM^{pq}}{dt} = e^{pqmn} x_n F_m / c_n c_m = K^{pq}.$$

Справедлива также формула для сложения скоростей

$$\frac{dx^l}{ds} = \frac{\frac{dx^l}{c_l dt}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dx^l}{c_l dt}\right)^2}} = \frac{dx^l}{c_l dt} + \Omega^{lmn} x_m p_n / mc_m c_n.$$

При этом скорость трехмерного вращения окажется меньше скорости возмущения.

Член $\Omega^{lmn} x_m p_n / mc_m c_n$ при малой скорости переходит в трехмерное векторное произведение частоты на координату $e^{lmn} \Omega_m x_n / c_n, l, m, n = 1, \dots, 3$.

При этом модуль скорости вращения $\frac{dx^l}{dt}$ всегда окажется меньше скорости возмущения, при любой величине x_m .

Так как для звуковой волны в твердом теле справедливо соотношение

$$ds^2 = dt^2 - (dx^1)^2 / c_1^2 - (dx^2)^2 / c_2^2 - (dx^3)^2 / c_3^2.$$

Где $c_l, l = 1, \dots, 3$ это скорости продольной и двух поперечных звуковых волн в твердом теле. При этом в твердом теле справедливо преобразование Лоренца

$$x^l = \frac{x'^l + V_l t}{\sqrt{1 - V_l^2 / c_l^2}}$$

$$t = \frac{t' + x'^1 V_l / c_l^2}{\sqrt{1 - V_l^2 / c_l^2}}.$$

При фиксированном l , остальные две пространственные переменные остаются неизменными. Уравнение движения Эйлера должно быть инвариантно относительно этого преобразования.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля т. II, Наука, М.: 1973, -564с.
2. Якубовский Е. Г. Модель комплексного пространства и распознавание образов. На стыке наук. Физико-химическая серия. Т.2, Казань, http://istina.msu.ru/media/publications/article/211/bd0/6068343/raspoznavobrazovwit_houteqution.pdf - 2014, стр. 186-187.