Описание сближения двух тел с помощью уравнений ОТО

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Введение

В статье [1] получено решение для определения метрического тензора двигающегося тела. На основании этого материала построено решение для двух сближающихся тел. Показано, что при некотором значении метрического интервала скорость становится мнимой дельта функцией, значит, координата и время изменились скачком на комплексное значение. При этом возникнет сингулярность плотности энергии. Возможно, большой взрыв произошел из-за столкновения двух массивных тел большой плотности при определенном соотношении между параметрами. При этом может возникнуть ситуация, когда сингулярность сохраняется вдоль траектории. Т.е. энергия выделяется непрерывно вдоль траектории двух тел.

1. Обобщение решения Шварцшильда на двигающееся тело

Решение Шварцшильда при нулевой скорости тела определяется по формуле см. [2] глава 5, §1, формула (29)

$$ds^2 = \frac{(1 - r_g / 4r)^2}{(1 + r_g / 4r)^2} c^2 dt^2 - (1 + r_g / 4r)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1)$$

Для получения точного решения для двигающегося тела необходимо подставить в формулу (1) вместо статического решения, полное выражение, содержащее, члены, зависящие от скорости создающего поле тела. Это позволяет получить решение для двигающегося тела

$$ds^2 = \frac{(1-\delta)^2}{(1+\delta)^2} c^2 dt^2 - (1+\delta)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2);$$

$$\delta = \frac{r_g}{4r}; r_g = \frac{2(iq_1 + m_1\sqrt{\gamma})(iq + m\sqrt{\gamma})}{m_1 c^2}$$

$$g_{0\alpha} = 0, g_{\alpha\beta} = 0$$

При скорости тела, создающего поле, равной нулю, получаем точные формулы. В случае отсутствия электромагнитного поля, получаем значение гравитационного радиуса $r_g = \dfrac{2\gamma m}{c^2}$ и при нулевой скорости тела точное решение уравнения ОТО. Преобразование Лоренца радиуса $r^2 = \dfrac{(x_1' - x_0')^2}{1 - V^2/c^2} + (y_1' - y_0')^2 + (z_1' - z_0')^2$, в случае движения вдоль оси x второй и третий член равны нулю. Одно тело, двигающееся с постоянной скоростью, т.е. без внешнего воздействия образует инерциальную систему координат, и для него справедливо преобразование Лоренца. Значит, и в случае движения при произвольном направлении скорости, радиус будет преобразовываться по аналогичным формулам $r^2 = \sum_{i=1}^{3} [\sum_{k=1}^{3} L_{ik}(r_k' - r_k'^0)]^2$, где коэффициенты L_{ik} зависят от скорости. При этом останется дифференцирование по осям y_1', z_1'. Т.е. имеем вдоль направления движения $r = \dfrac{r'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$. Это приводит к тому, что в двигающейся с постоянной скоростью штрихованной системе координат гравитационный радиус уменьшается, а уравнения ОТО и их решения остаются неизменными $r_g' = \dfrac{2\gamma m}{c^2}\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

В двигающейся и неподвижной системе координат имеем $\delta = \dfrac{r_g'}{4r'} = \dfrac{\gamma m\sqrt{1 - V^2/c^2}}{2c^2 r'} = \dfrac{\gamma m}{2c^2 r} = \dfrac{r_g}{4r}$, причем эта величина вычислена вдоль направления движения. В произвольной точке эта величина равна

$$\delta = \frac{r_g}{4r'} = \frac{\gamma m}{2c^2\sqrt{\frac{(x_1'-x_0')^2}{1-V^2/c^2}+(y_1'-y_0')^2+(z_1'-z_0')^2}} =$$

$$= \frac{\gamma m}{2c^2\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\ [\sum_{k=1}^{3} L_{ik}(x_k'-x_k'^0)]^2}} = \frac{r_g}{4r}.$$

Но как быть в случае кусочно-постоянной скорости тела. Допустим, на первом отрезке тело имело скорость $V(s)=const$, где s величина метрического интервала. Пусть при значении метрического интервала s_1 оно изменило направление и величину скорости. Этому значению соответствует $r_k'(s_1)$. Перейдем в повернутую по направлению нового значения скорости систему координат, причем поворот скорости мал. Эта координата удовлетворяет уравнению $\frac{dr_{k0}'}{ds}=V_k(s)$. Причем при каждом значении s радиус вдоль направления движения определится как величина $r'(s)=\sqrt{\sum_{k=1}^{3} V_k^2(s)(S-s)}$, где метрический тензор имеет сингулярность при условии $S=s$ и величина $\delta = \frac{\gamma m\sqrt{1-V^2/c^2}}{2c^2\sqrt{\sum_{k=1}^{3} V_k^2(s)(S-s)}}$ вычислена вдоль направления движения. Для произвольной точки надо направить ось x вдоль направления $V_k(s)$ и получим формулу

$$\delta = \frac{r_g}{4r'} = \frac{\gamma m}{2c^2\sqrt{\frac{[x_1'-x_0'(s)]^2}{1-V^2/c^2}+[y_1'-y_0'(s)]^2+[z_1'-z_0'(s)]^2}} =$$

$$= \frac{\gamma m}{2c^2\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\ \{\sum_{k=1}^{3} L_{ik}[r_k'-r_k'^0(s)]\}^2}} = \frac{r_g}{4r},$$

для s значения метрического интервала, а величина L_{ik} зависит от трех компонент неизвестной скорости. Причем эта скорость зависит от метрического интервала, и значит, производная от нее по координатам и времени равна нулю. Причем это скорость однозначная в локальной системе координат и определяется скоростью тела в глобальной системе координат. Метрический интервал общий, для глобальной системы координат и для локальной. Но изменив глобальную систему координат, изменятся и скорости в локальной системе координат.

Влияние тел на одно тело заключается в задании его скорости, которая у каждого тела произвольная. Влияние множества тел на формулу метрического тензора каждого отдельного тела не сказывается, только изменяя его произвольную скорость. Тогда суммарный метрический интервал тоже будет сохраняться, т.е. среднее арифметическое каждой пары метрических тензоров тоже является решением задачи. Эта величина при отсутствии тел сводится к метрическому тензору пространства Галилея. Рассмотрим случай одномерного движения двух тел.

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{2} ds_\alpha^2/2 = \sum_{\alpha=1}^{2} [g_{00\alpha}c^2dt^2 - g_{ll\alpha}(dx^2+dy^2+dz^2)]/2$$

$$g_{00} = [\frac{(1-\delta_1)^2}{(1+\delta_1)^2} + \frac{(1-\delta_2)^2}{(1+\delta_2)^2}]/2, g_{ll} = [(1+\delta_1)^4 + (1+\delta_2)^4]/2$$

$$\delta_1 = \frac{r_{g1}}{4r'} = \frac{\gamma m_1}{2c^2\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\{\sum_{k=1}^{3} L_{ik}[r'_k - r'^0_{k1}(s)]\}^2}} = \frac{\gamma m_1\sqrt{1-V_1^2/c^2}}{2c^2[x-x_{k1}(s)]}$$

$$\delta_2 = \frac{r_{g2}}{4r'} = \frac{\gamma m_2}{2c^2\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\{\sum_{k=1}^{3} L_{ik}[r'_k - r'^0_{k2}(s)]\}^2}} = \frac{\gamma m_2\sqrt{1-V_2^2/c^2}}{2c^2[x-x_{k2}(s)]}$$

Величина

$$g_{001} = \frac{[x-x_1(s)-r_{g1}\sqrt{1-V_1^2/c^2}/4]^2}{[x-x_1(s)+r_{g1}\sqrt{1-V_1^2/c^2}/4]^2}, g_{ll1} = [\frac{x-x_1(s)-r_{g1}\sqrt{1-V_1^2/c^2}/4}{x-x_1(s)}]^4$$

При условии $[x-x_1(s)]/\sqrt{1-V_1^2/c^2}=r_{g1}/B$, получим $V_1/c=\sqrt{1-B^2[x-x_1(s)]^2/r_{g1}^2}$, т.е. в сингулярности координаты скорость тела равняется скорости света. При этом $g_{ll}=(1+B/4)^4$, $g_{00}=1$.

По мере приближения к координате положения равновесия символы Кристоффеля стремятся к нулю, но отношение их конечно.

Скорость каждого тела определится из уравнения

$$\begin{gathered}\frac{du_1}{ds}+\Gamma^1_{112}u_1^2+\Gamma^1_{102}u_1u_1^0+\Gamma^1_{002}(u_1^0)^2=0\\ \frac{du_2}{ds}+\Gamma^1_{111}u_2^2+\Gamma^1_{101}u_2u_2^0+\Gamma^1_{001}(u_2^0)^2=0\end{gathered}.$$

$$\begin{gathered}\frac{du_1^0}{ds}+\Gamma^0_{112}u_1^2+\Gamma^0_{102}u_1u_1^0+\Gamma^0_{002}(u_1^0)^2=0\\ \frac{du_2^0}{ds}+\Gamma^0_{111}u_2^2+\Gamma^0_{101}u_2u_2^0+\Gamma^0_{001}(u_2^0)^2=0\end{gathered}.$$

Интегрируем это уравнение по области пространству с весовой функцией. Область пространства выбираем достаточно малую.

Имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{ds}=y^2+byx+cx^2.$$

Введем величину $t=y/x$. Тогда это уравнение запишется в виде

$$\frac{dt}{xds}+\frac{t}{x^2}\frac{dx}{ds}=t^2+bt+c.$$

Усредняем величину $\frac{1}{x^2}\frac{dx}{ds}=-\frac{d}{ds}\frac{1}{x}$. В случае решения дельта функция среднее от этого выражения по аргументу u равно нулю $<\sqrt{2\pi}\sigma(u-a)\exp[(u-a)^2/2\sigma^2]\frac{du}{ds}>=0$, так как x четная функция $(u-a)$.

Получим уравнение, которое можно будет свести к интегральному уравнению.

Решением этого уравнения является дельта функция в случае положительности величины $\frac{\Gamma^1_{00,2}}{\Gamma^1_{112}} - (\frac{\Gamma^1_{10,2}}{\Gamma^1_{112}})^2/4$, $\frac{\Gamma^0_{00,2}}{\Gamma^0_{112}} - (\frac{\Gamma^0_{10,2}}{\Gamma^0_{112}})^2/4$. При этом координаты положения равновесия комплексные. Это условие реализуется по мере сближения тел большой массы.

$$\frac{u_1/u_1^0 + \frac{\Gamma^1_{10,2}}{\Gamma^1_{112}}/2}{\sqrt{\frac{\Gamma^1_{00,2}}{\Gamma^1_{112}} - (\frac{\Gamma^1_{10,2}}{\Gamma^1_{112}})^2/4}} = -\tan[\int_0^s u_1^0 \sqrt{\Gamma^1_{00,2}\Gamma^1_{112} - (\Gamma^1_{10,2})^2/4}ds].$$

$$\frac{u_1^0/u_1 + \frac{\Gamma^0_{10,2}}{\Gamma^0_{112}}/2}{\sqrt{\frac{\Gamma^0_{00,2}}{\Gamma^0_{112}} - (\frac{\Gamma^0_{10,2}}{\Gamma^0_{112}})^2/4}} = -\tan[\int_0^s u_1 \sqrt{\Gamma^0_{00,2}\Gamma^0_{112} - (\Gamma^0_{10,2})^2/4}ds]$$

Если величина u_1^0, u_1 конечна, то так как символ Кристоффеля стремится к нулю, получаем постоянную фазу у тангенса, и она зависит от величины u_1^0, u_1. Но по мере сближения тел, скорость тела стремится к скорости света, и фаза тангенса не убывает.

Из этого уравнения определится величина u_1, причем имеющая вид скачкообразно изменяющейся дельта функции в точках $\int_0^{s_p} u_1^0 \sqrt{\Gamma^1_{00,2}\Gamma^1_{112} - (\Gamma^1_{10,2})^2/4}ds = \pi(p+1/2)$ по формуле $\frac{1}{x-i0} = i\pi\delta(x) + Vp(\frac{1}{x})$ и скачок u_1/u_1^0 в точке s_q. При этом координата x_1 испытает мнимый скачок в точке s_p, и станет комплексной.

И u_1^0 равная дельта функции относительно точек $\int_0^{s_q} u_1 \sqrt{\Gamma^0_{00,2}\Gamma^0_{112} - (\Gamma^0_{10,2})^2/4}ds = \pi(q+1/2)$ и скачок u_1^0/u_1 в точке s_p. При этом время испытает мнимый скачок в точке s_q, и станет комплексным.

Данный режим описывается как турбулентный, со скачкообразным изменением скорости и координаты. При этом сингулярность четырехмерной скорости, означает большую плотность энергии по формуле $\varepsilon = \rho c^2 u^0$, и образование комплексного пространства. Т.е. Большой взрыв произошел при столкновении двух массивных тел с большой плотностью, при реализации условия $\frac{\Gamma^1_{00,2}}{\Gamma^1_{112}} > (\frac{\Gamma^1_{10,2}}{\Gamma^1_{112}})^2/4$, $\frac{\Gamma^0_{00,2}}{\Gamma^0_{112}} > (\frac{\Gamma^0_{10,2}}{\Gamma^0_{112}})^2/4$, $\frac{\Gamma^1_{00,1}}{\Gamma^1_{111}} > (\frac{\Gamma^1_{10,1}}{\Gamma^1_{111}})^2/4$, $\frac{\Gamma^0_{00,1}}{\Gamma^0_{111}} > (\frac{\Gamma^0_{10,1}}{\Gamma^0_{111}})^2/4$. При этом два тела объединяются и движутся с общей скоростью, при образовании сингулярности вдоль траектории. Так как скорость обоих тел близка к скорости света, имеем $u_l / u_l^0 = 1, l = 1,2$ и равенство $\Gamma^0_{pql} = \Gamma^1_{pql}$ при постоянной фазе тангенса. Когда это происходит при бесконечном значении скорости, это соответствует большой плотности энергии и Большому взрыву, так как взрыв происходит вдоль траектории двух тел.

При этом для излучения большой энергии, эти два тела должны иметь большую массу и большое отношение r_g / a, где a размер тела $r_g = \frac{8\pi G \rho a^3}{3c^2} > a; a > c / \sqrt{8\pi G \rho / 3}$.

При этом при выполнении этого условия у решения Шварцшильда $g_{00} = 1 - r_g / r$ появиться мнимое время $\tau = \int \sqrt{g_{00}} dx^0 / c$. При комплексном времени и действительной скорости траектория тел становится вращательной или колебательной. Т.е. два тела вращаются со скоростью, стремящейся к скорости света. Но это происходит в другой системе координат, где скорость действительна и не имеет сингулярности.

Но это результат одномерного рассмотрения. В трехмерном случае при наличии комплексного решения, что возможно приведет к сингулярности четырехмерной скорости вдоль траектории, и к Большому взрыву.

В случае отрицательного значения $\frac{\Gamma_{00,2}^1}{\Gamma_{112}^1}-(\frac{\Gamma_{10,2}^1}{\Gamma_{112}^1})^2/4, \frac{\Gamma_{00,2}^0}{\Gamma_{112}^0}-(\frac{\Gamma_{10,2}^0}{\Gamma_{112}^0})^2/4$, что реализуется, когда тела находятся на большом расстоянии друг от друга, координаты положения равновесия действительны, имеем другое решение

$$\frac{u_1/u_1^0+\frac{\Gamma_{10,2}^1}{\Gamma_{112}^1}/2+\sqrt{\frac{\Gamma_{00,2}^1}{\Gamma_{112}^1}-(\frac{\Gamma_{10,2}^1}{\Gamma_{112}^1})^2/4}}{u_1/u_1^0+\frac{\Gamma_{10,2}^1}{\Gamma_{112}^1}/2-\sqrt{\frac{\Gamma_{00,2}^1}{\Gamma_{112}^1}-(\frac{\Gamma_{10,2}^1}{\Gamma_{112}^1})^2/4}}=\exp[\int_0^s u_1^0\sqrt{(\Gamma_{10,2}^1)^2/4-\Gamma_{00,2}^1\Gamma_{112}^1}ds/2]$$

$$\frac{u_1^0/u_1+\frac{\Gamma_{10,2}^0}{\Gamma_{112}^0}/2+\sqrt{\frac{\Gamma_{00,2}^0}{\Gamma_{112}^0}-(\frac{\Gamma_{10,2}^0}{\Gamma_{112}^0})^2/4}}{u_1^0/u_1+\frac{\Gamma_{10,2}^0}{\Gamma_{112}^0}/2-\sqrt{\frac{\Gamma_{00,2}^0}{\Gamma_{112}^0}-(\frac{\Gamma_{10,2}^0}{\Gamma_{112}^0})^2/4}}=\exp[\int_0^s u_1\sqrt{(\Gamma_{10,2}^0)^2/4-\Gamma_{00,2}^0\Gamma_{112}^0}ds/2]$$

Т.е. получается нелинейное уравнение с переменной, непрерывной скоростью. Данный режим описывается как ламинарный, и имеет не большое значение скорости.

Такое же решение будет при сближении пробного тела с телом большой массы. Для первого пробного тела будет реализован ламинарный режим, так как он определяется Γ_{pq2}^l, а второе массивное тело останется неизменным. Для второго тела турбулентный режим, так как он определяется Γ_{pq1}^l. Пробное тело сначала будет двигаться с непрерывной скоростью u_1^0, u_1, а потом по мере приближения тел Γ_{pq2}^l будет непрерывной, образует непрерывное распределение скорости. Тело большой массы будет двигаться с непрерывной скоростью, так как Γ_{pq1}^l стремится к нулю по мере сближения, и образования турбулентного режима. Значит, фаза тангенса по мере сближения будет неизменная, и скорость второго тела не изменится. Скорости u_2^0, u_2 неизменны, так как влияние пробного тела мало.

Литература

1. Якубовский Е.Г. Обобщение решения Шварцшильда на N двигающихся тел, «Энциклопедический фонд России», 2016, 11стр. http://russika.ru/sa.php?s=1112

2. *Брумберг В.А.* Релятивистская небесная механика. М.: Наука, 1972г, 382стр.