Оператор рождения и уничтожения

с точки зрения частиц вакуума

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

В квантовой механике используется понятие рождения и уничтожения много частичных состояний. При этом не известно расстояние между образовавшимися частицами. В данной статье приведена оценка этого расстояния. Дадим интерпретацию вероятности рождения и уничтожения много частичных состояний с помощью частиц вакуума.

Энергия взаимодействия двух диполей с безразмерными переменными равна см. [1]

$$U = -\frac{e^2 l_\gamma}{m_\gamma c^2 r_\gamma^2} \frac{\sqrt{(\mathbf{r}_{kp}, \mathbf{d}_p)(\mathbf{r}_{kp}, \mathbf{d}_k)}}{r_{kp}^3}$$

К системе нелинейных дифференциальных уравнений сводится система уравнений движений Ньютона, описывающие в комплексной плоскости задачу движения для N диполей, под действием сильного электромагнитного поля диполей. Частицы вакуума образуют диполи. Уравнение движения с учетом сил, действующих между диполями, имеет вид

$$\frac{d^2\mathbf{r}_p}{d\tau^2} = \frac{e^2 l_\gamma}{m_\gamma c^2 r_\gamma^2} \sum_{\substack{k=-N \\ k\neq p}}^{N} [\frac{3\mathbf{r}_{kp}\sqrt{(\mathbf{r}_{kp}, \mathbf{d}_p)(\mathbf{r}_{kp}, \mathbf{d}_k)}}{r_{kp}^5} -$$

$$-\frac{\mathbf{d}_p\sqrt{(\mathbf{r}_{kp}, \mathbf{d}_k)}}{2\sqrt{(\mathbf{r}_{kp}, \mathbf{d}_p)} r_{kp}^3} - \frac{\mathbf{d}_k\sqrt{(\mathbf{r}_{kp}, \mathbf{d}_p)}}{2\sqrt{(\mathbf{r}_{kp}, \mathbf{d}_k)} r_{kp}^3}] = \frac{e^2 l_\gamma N}{2 m_\gamma c^2 r_\gamma^2}\mathbf{f}_p = F_p(x_1, ..., x_N)$$

$$\mathbf{r}_{kp} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_p, \mathbf{d}_p = \mathbf{l}_p / l,$$

Где величина $\mathbf{d}_p$ будет определена позднее. Координаты положения равновесия для этой системы нелинейных уравнений при большом количестве неизвестных образуют равно отстоящие координаты положения равновесия, т.е. кристаллическую структуру. Приравнивая нулю действующую силу

$$\sum_{\substack{k=-N\\k\neq p}}^{N}[\frac{3\mathbf{r}_{kp}\sqrt{(\mathbf{r}_{kp},\mathbf{d}_p)(\mathbf{r}_{kp},\mathbf{d}_k)}}{r_{kp}^5}-\frac{\mathbf{d}_p\sqrt{(\mathbf{r}_{kp},\mathbf{d}_k)}}{2\sqrt{(\mathbf{r}_{kp},\mathbf{d}_p)}r_{kp}^3}-\frac{\mathbf{d}_k\sqrt{(\mathbf{r}_{kp},\mathbf{d}_p)}}{2\sqrt{(\mathbf{r}_{kp},\mathbf{d}_k)}r_{kp}^3}]=0.$$

Для координат $\mathbf{r}_{kp}$ получим стационарное распределение, равное $\mathbf{r}_{kp}=k\mathbf{d}_k-p\mathbf{d}_p; k,p\in[-\infty,\infty]$, где $k,p\in[-\infty,\infty]$ некоторые числа, так как растяжение величины $\mathbf{d}_p$ не меняет систему уравнений. Получим нелинейное, фундаментальное уравнение относительно величин k,p. Получим уравнение

$$\sum_{\substack{k=-N\\k\neq p}}^{N}\frac{3(k\mathbf{d}_k-p\mathbf{d}_p)\sqrt{[k(\mathbf{d}_k,\mathbf{d}_p)-p][k-p(\mathbf{d}_p,\mathbf{d}_k)]}}{\{(k-p)^2+2kp[1-(\mathbf{d}_k,\mathbf{d}_p)]\}^{5/2}}=$$

$$=\sum_{\substack{k=-N\\k\neq p}}^{N}\frac{\mathbf{d}_p[k-p(\mathbf{d}_p,\mathbf{d}_k)]+\mathbf{d}_k[k(\mathbf{d}_p,\mathbf{d}_k)-p]}{2\sqrt{[(k-p)^2(\mathbf{d}_p,\mathbf{d}_k)-pk[1-(\mathbf{d}_p,\mathbf{d}_k)]^2}}/|(k-p)^2+2kp[1-(\mathbf{d}_k,\mathbf{d}_p)]|^{3/2}.$$

Из этого уравнения получаем параллельность единичных векторов $\mathbf{d}_k=\mathbf{d}_p$, что справедливо, если приравнять нулю члены под знаком суммы. Т.е. имеем уравнение

$$\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq p}}^{\infty}\frac{1}{(k-p)^3}=0, p=-N,...,N$$

Причем в этом уравнении k,p входят симметричным образом. При любом p эта сумма равна нулю, так как можно выбрать $k=p\pm q$ и это приведет к удовлетворению системе нелинейных уравнений с величиной k,p,q, образующим арифметическую прогрессию. Т.е. получаем равноотстоящие координаты положения равновесия.

При этом получаем модель для расчета элементарной частицы в заряженных много частичных состояниях. Потенциальная энергия p частицы вакуума равна

$$\frac{U_s}{mc^2} = -\frac{e^2 l_\gamma}{m_\gamma c^2 r_\gamma^2} \sum_{\substack{k=-s \\ k\neq s, k\neq -s}}^{s} \frac{1}{(k-s)^2} = -\sum_{\substack{k=-s \\ k\neq s, k\neq -s}}^{s} \frac{1}{(k-s)^2}.$$

Это дискретный уровень энергии частицы. Причем таких уровней энергии имеется m_p / m_γ.

При этом количество частиц вакуума элементарных частицах входящих в много частичные состояния равно m_p / m_γ, где вычисленная энергия пропорциональна mc^2, а суммарная потенциальная энергия одной частицы равна

$$U_p = -mc^2 \sum_{s=0}^{m_p/m_\gamma} \sum_{\substack{k=-s \\ k\neq s, k\neq -s}}^{s} \frac{1}{(k-s)^2} = -\hbar\omega_p.$$

При этом для электрона и фотона имеем $U_p + \hbar\omega_p = 0$. При этом так как радиус действия дипольных сил мал, образуется несколько областей с постоянными свойствами. Это может быть множество диполей, образующих электроны и фотоны. При этом имеется N_p таких областей, образующих много частичные состояния

$$U_p = -mc^2 N_p \sum_{s=0}^{m_p/m_\gamma} \sum_{\substack{k=-s \\ k\neq s, k\neq -s}}^{s} \frac{1}{(k-s)^2} = -\hbar\omega_p N_p$$

В случае взаимодействия двух частиц, образующих мультипольные моменты их потенциал взаимодействия равен

$$U_l = \frac{e^2 \sqrt{r_1^l r_2^l P_l(\cos\chi_1) P_l(\cos\chi_2)}}{R_0^{l+1}}.$$

В случае образования кристаллической решетки из мультипольных моментов углы $\chi_l = 0; r_l = r, l = 1,2$, т.е. имеем

$U_l = \sum \frac{e^2 r^l}{R_0^{l+1}} = \frac{e^2}{r}\sum_{k=1}^{m_e/m_\gamma}\sum_{s=-k}^{k}\frac{1}{(l+1)(k+1-s)^{l+2}(\frac{a_0}{r})^{l+1}}$, Эту сумму можно представить в виде интеграла

$$\int_1^{m/m_\gamma}\int_{-k}^{k}\frac{ds}{(l+1)(k+1-s)^{l+2}}dk = \int_1^{m/m_\gamma}\frac{1}{(l+1)^2(k+1-s)^{l+1}}\Big|_{-k}^{k} dk =$$
$$= \frac{m/m_\gamma}{(l+1)^2} - \int_1^{m/m_\gamma}\frac{dk}{(l+1)^2(2k)^{l+1}} = \frac{m/m_\gamma}{(l+1)^2} + O(1)$$

При этом получится правильная формула для суммы, которая правильно считает значение потенциальной энергии.

Запишем соотношение между мультипольными моментами

$$(l_p+1)U_{l_p+1} = -r\frac{d}{dR_0}U_{l_p}.$$

Вывод коммутационных соотношений

Переведем это классическое представление в операторное

$$(l_p+1)U_{l_p+1}\,|\,l_p> = (a^+a+1)U_{l_p+1}\,|\,l_p> = -r\frac{d}{dR_0}U_{l_p}\,|\,l_p+1>$$
$$a^+a = l_p$$
$$l_pU_{l_p+1}\,|\,l_p+1> = a^+aU_{l_p+1}\,|\,l_p+1> - r\frac{d}{dR_0}U_{l_p}\,|\,l_p>$$

Или запишем

$$\begin{gathered} <l_p+1\,|\,(l_p+1)U_{l_p+1}\,|\,l_p> = <l_p+1\,|\,(a^+a+1)U_{l_p+1}\,|\,l_p> = -r\frac{d}{dR_0}U_{l_p} \\ a^+a = l_p \\ <l_p\,|\,l_pU_{l_p+1}\,|\,l_p+1> = <l_p\,|\,a^+aU_{l_p+1}\,|\,l_p+1> - r\frac{d}{dR_0}U_{l_p} \end{gathered} \quad . \ (2)$$

Возьмем эрмитово-сопряженное значение от третьего уравнения (2), получим

$$<l_p+1\,|\,l_pU_{l_p+1}\,|\,l_p> = <l_p+1\,|\,aa^+U_{l_p=1}\,|\,l_p> - r\frac{d}{dR_0}U_{l_p} \qquad (3)$$

Сравнивая первое уравнение (2) и уравнение (3), получим $aa^+ = a^+a+1$ коммутационное соотношение между оператором рождения и уничтожения.

В случае оператора спина тоже можно построить оператор рождения и уничтожения.

Тогда формула, соответствующая мультипольному моменту равна

$$U_l = \frac{e^2 l_p^l}{R_0^{l+1}}.$$

При этом сумма, соответствующая мультипольному потенциалу, выраженному через угловые переменные равна

$$U_l = \sum_{n=1}^{m_e/m_\gamma} \sum_{s=-n}^{n} \frac{e^2}{(l+1) l_p (n+1-s)^{l+2} (\frac{a_0}{l_p})^{l+1}}, x_{1s} = s l_p; x_{1n} = n l_p.$$

Эта сумма соответствует оператору рождения и уничтожения координатной части потенциала, без учета орбитального и спинового момента. В случае фермионов и бозонов надо положить $l = n_r + j$, где j полный орбитальный и спиновый момент элементарной частицы. Получается формула для собственной энергии атома водорода, с учетом спина электрона и орбитального момента. При этом квадратный корень, при учете спина, извлекается из положительной величины. Формула определяет сумму равную величине $E_l = -\frac{e^2 l_p^l}{(l+1)^2 a_0^{l+1}} \frac{m_e}{m_\gamma}$.

Вывод свойств оператора рождения и уничтожения

Подействуем оператором a^+ на соотношение $a^+ a = l_p$ справа, получим $a^+ a a^+ = a^+(a^+ a + 1) = a^+(l_p + 1) = l_p a^+$. Подействует оператором a слева на тоже соотношение $a a^+ a = (a^+ a + 1) a = (l_p + 1) a = a l_p; l_p a = a(l_p - 1)$

Откуда следует

$$\begin{gathered} l_p a^+ | v >= a^+(l_p + 1) | v >= (v+1) a^+ | v > \\ l_p a | v >= a(l_p - 1) | v >= (v-1) a | v > \end{gathered}.$$

Имеем условие нормировки

$$< v | a^{+} a | v >=< v | l_p | v >= v < v | v >$$
$$< v | a a^{+} | v >=< v | l_p + 1 | v >= (v+1) < v | v >$$

Откуда следует

$$\begin{gathered} < l_p + 1 | a_p^{+} = \sqrt{l_p + 1} < l_p \\ a_p | l_p + 1 >= \sqrt{l_p + 1} | l_p > \end{gathered}.$$

Перепишем это выражение в виде

$$a_p^{+} | l_p >= \sqrt{l_p + 1} | l_p + 1 >$$
$$a_p | l_p >= \sqrt{l_p} | l_p - 1 >, l_p > 0$$
$$a_p | 0 >= 0$$

Тогда имеем

$$l_p >= \frac{a^{+l_p}}{\sqrt{l_p!}} | 0 >$$

Что можно записать в виде

$$< l_p + 1 | a_p^{+} | l_p >= \sqrt{l_p + 1}$$
$$< l_p | a_p | l_p + 1 >= \sqrt{l_p + 1}.$$
$$< l_p - 1 | a_p | l_p >= \sqrt{l_p}$$

Вывод операторов рождения и уничтожения из свойств мультиполя говорит об общности понятия мультиполя для вычисления энергии состояния. Так энергию атомного ядра можно описывать с помощью свойств мультиполя.

В случае мультиполя энергия с произвольным потенциалом в центрально-симметричном поле, равна

$$q\varphi(R_0 - l_{\gamma k}) = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{e^2 l_{\gamma k}^k}{R_0^{k+1}}.$$

Откуда определяем в случае отрицательного потенциала Кулона положительные коэффициенты $A_k = Z$ из-за формулы $\frac{Ze^2}{R_0 - l_{\gamma k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Ze^2 l_{\gamma k}^k}{R_0^{k+1}}$.

$$U_k = q\varphi_k = -A_k \frac{e^2 l_{\gamma k}^k}{k^2 R_0^{k+1}} N_e = -A_k \frac{e^2 l_{\gamma k}^k}{k^2 a_0^{k+1}} \frac{m_e}{m_{\gamma k}} = -A_k \frac{e^2 m_e}{k^2 a_0^{k+1}} \frac{c^2}{e^2} r_\gamma^{k+1} = -A_k \frac{e^2}{k^2 a_0}.$$

При этом образующая мультиполя равна

$$a_0^k = m_e \frac{c^2}{e^2} r_{\gamma k}^{k+1}$$

$$r_{\gamma k} = \left(\frac{a_0^k e^2}{m_e c^2}\right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Образующая мультиполя определяет массу частиц вакуума по формуле (8).

Эта формула является обобщением формулы, справедливой для диполей $r_{\gamma 1} = \sqrt{a_0 r_e}$, описывающей основное состояние атома водорода. Можно предположить, что она носит общий характер, и описывает не только атом водорода.

Можно обосновать пропорциональность вычисления плотности вероятности w_p перехода с помощью следующей формулы

$$w_p \sim \frac{\exp[(N_p+1)\hbar\omega_p r_\gamma^2/(r^2 kT)]-1}{\hbar\omega_p} kT =$$

$$= (N_p+1) r_\gamma^2 / r^2 [1 + (N_p+1)\hbar\omega_p r_\gamma^2/(2r^2 kT) + \ldots] << \frac{kT}{\hbar\omega_p}$$

Где расстояние между электронами удовлетворяет условию

$$r^2 >> (N_p+1)\hbar\omega_p r_\gamma^2/(kT).$$

В случае заряженных много частичных состояний данная теория требует доработки. Каждое кристаллическое образование заряженных много частичных состояний с большой плотностью состоит из заряженных частиц. Заряды для каждой частицы расположены на границе частицы. Частицы вакуума имеют однонаправленное расположение на границе. Если частиц вакуума на границе N, образуется положительный или отрицательный заряд, пропорциональный $\sqrt{N}$. При этом внешнее поле заряженных много частичных состояний образует безразмерный потенциал $U_p = \frac{r_p}{r}; r_p = \frac{q_p^2}{m_p c^2}$. При этом расстояние между заряженных много частичными состояниями и удаленными частицами удовлетворяет условию

$$r >> (N_p + 1)\hbar\omega_p r_p /(kT).$$

Литература

1. *Якубовский Е.Г.* ЧАСТИЦЫ ВАКУУМА, ОПИСЫВАЮЩИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И ПОЛЯ Реферативный журнал «Научное обозрение» 2016, т.2, стр.58-80, http://science-review.ru/abstract/pdf/2016/2/662.pdf

2. Якубовский Е.Г. Граница между корпускулярными и волновыми свойствами, 2015, «Энциклопедический фонд России», 24стр. http://russika.ru/sa.php?s=966