

Решение уравнения Гельмгольца для произвольного тела с изломом

Е.Г. Якубовский

e-mail yakubovski@rambler.ru

Уравнение Гельмгольца в трехмерном случае решается для ограниченного числа конечных тел. Предлагается формула для решения задачи рассеяния для прозрачного произвольного тела с изломом. Аналогичным образом можно решить уравнение Гельмгольца для условия Неймана, Дирихле и для смешанной задачи.

1. Построение системы координат

В сечении $x_1 = const$ декартовой системы координат определяется угол по формуле

$$\psi_1(s_1, x_1) = 2\pi \int_0^{s_1} \frac{ds_1}{|\rho_1(s_1, x_1)|} / \int_0^{l_1} \frac{ds_1}{|\rho_1(s_1, x_1)|} - \pi,$$

где s_1 длина огибающей линии в сечении $x_1 = const$, l_1 - длина однократно замкнутой огибающей в том же сечении, $\rho_1(s_1, x_1)$ радиус кривизны в том же сечении. Причем $\psi_1 = -\pi$ и $\psi_1 = \pi$ соответствует отрицательному направлению $0x_3$. Положительное направление оси $0x_3$ соответствует направлению на источник.

Построим зависимость радиуса тела от углов $\alpha_l = \arg(x_3 + ix_l) = \arctan \frac{x_l}{x_3}$.

Это можно сделать однозначным образом. Далее будем решать

дифференциальное уравнение $\frac{\partial r(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} + \frac{\partial r(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} = 0$, которое

определит зависимость $\alpha_2 = \alpha_2(\alpha_1)$ при начальных условиях

$\alpha_1 = \alpha_{10}, \alpha_2 \in [0, 2\pi]$, причем α_{10} выбираем из условия совпадения

$\alpha_{20} = \alpha_2(\alpha_{10}) = \alpha_2(\alpha_{10} + 2\pi)$. Тогда получим, что радиус вдоль кривой

$\alpha_2 = \alpha_2(\alpha_1)$ является константой $r[\alpha_1, \alpha_2(\alpha_1)] = const$. Т.е. имеем

$\frac{\partial r(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial r(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 = 0$, т.е. вектор касательной к поверхности

$\left(\frac{\partial r(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial r(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2}\right)$ ортогонален приращению аргумента $(d\alpha_1, d\alpha_2)$.

Касательная к замкнутой кривой $\alpha_2 = \alpha_2(\alpha_1)$ ортогональна касательной к поверхности вдоль этой кривой. Следовательно, ортогональная сетка на поверхности тела построена.

В случае сферического тела ортогональные проекции углов на поверхности сферы равны $\alpha_l = x_l / a \in [-1, 1], l = 1, 2$, где a радиус сферы.

Проекции координат, определяющих углы, равны $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, поэтому

углы ортогональны.

Воспользуемся формулой $x_1 = x_1(s_1, s_2)$, получим

$$\psi_1 = 2\pi \int_0^{s_1} \frac{ds_1}{|\rho_1(s_1, s_2)|} / \int_0^{l_1} \frac{ds_1}{|\rho_1(s_1, s_2)|} - \pi.$$

При этом модуль в знаменателе подынтегрального выражения берется в случае не нулевого радиуса кривизны. Как покажем далее в случае нулевого радиуса кривизны, он становится комплексным.

Определим сначала преобразование координат в случае особенности типа «конус». Для этого в вершине конуса проведем плоскость A , а в этой плоскости определим две ортогональные прямые линии, проходящие через вершину конуса

$$\begin{aligned} x_1 \cos \phi + x_2 \sin \phi &= \text{const}_1, \\ -x_1 \sin \phi + x_2 \cos \phi &= \text{const}_2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

При этом выберем направление плоскости A , определяющим минимум величины

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta(\phi) d\phi.$$

Угол $\theta(\phi)$ это угол, образуемый плоскостью A с направлением линии конуса, соответствующей углу ϕ . Вычислим угол θ_0 при вершине конуса по формуле

$$\theta_0 = \int_0^{2\pi} [\pi - 2\theta(\phi)]d\phi / (2\pi).$$

Этот угол назовем дополнительным углом конуса. При этом имеем следующую формулу для радиуса кривизны (в вершине конуса имеем главные радиусы кривизны, равные нулю $\rho_1 = \rho_2 = 0$)

Для кругового конуса с углом при вершине θ_0 , радиусы кривизны удовлетворяют

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \theta_0^2 \delta(s_1 - s_1^0) \delta(s_2 - s_2^0).$$

В случае, если имеется излом поверхности типа «хребет», т.е. $\rho_1[s_1^0, s_2(s_1^0)] = 0$ вдоль кривой на поверхности $s_2 = s_2(s_1)$, используем формулу

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1[s_1, s_2(s_1^0)]} &= \frac{1}{s_1 - s_1^0 - i0} = i\delta(s_1 - s_1^0)(\theta_+ - \theta_-) + Vp \frac{1}{s_1 - s_1^0} \\ \frac{1}{\rho_1[s_1, s_2(s_1^0)]} &= \frac{1}{s_1 - s_1^0 + i0} = -i\delta(s_1 - s_1^0)[1 - (\theta_+ - \theta_-)/2\pi]2\pi + Vp \frac{1}{s_1 - s_1^0} \quad (1.2) \\ \theta_+[s_1^0, s_2(s_1^0)] &= \pi - \arccos \frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}, \theta_- = -\arccos \frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1} \end{aligned}$$

При этом среднее арифметическое радиусов кривизны на двух концах «хребта», равно

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1[s_1, s_2(s_1^0)]} &= \frac{1}{2(s_1 - s_1^0 - i0)} + \frac{1}{2(s_1 - s_1^0 + i0)} = i\delta(s_1 - s_1^0)(\theta_+ - \theta_- - \pi) + Vp \frac{1}{s_1 - s_1^0} = \\ &= i\delta(s_1 - s_1^0) \left\{ \arccos \frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1} - \arccos \frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1} \right\} + Vp \frac{1}{s_1 - s_1^0} \end{aligned}$$

Разность углов $\theta_+[s_1^0, s_2(s_1^0)] - \theta_-[s_1^0, s_2(s_1^0)]$ назовем дополнительными угловыми координатами. В случае особенности типа «хребта», нужно применять формулу (1.2) до точки, удовлетворяющей условию $\theta_+[s_1^0, s_2(s_1^0)] = \theta_-[s_1^0, s_2(s_1^0)]$.

В случае гладкого конуса, имеем угол при вершине конуса, равный $\gamma[\pi - 2\theta(\phi) - \theta_0] + \theta_0, \gamma \rightarrow 0$, причем функция $\theta(\phi)$ непрерывна. При этом асимптотика значения угла при вершине равна θ_0 и образует круговой конус. Формулы для «хребта» переходят в формулу для «конуса» путем перемножения.

Отметим, что в случае «хребта» изменению угла $\theta_+[s_1^0, s_2(s_1^0)] - \theta_-[s_1^0, s_2(s_1^0)]$ соответствует радиус кривизны, равный нулю $\psi_1 \in [\theta_-[s_1^0, s_2(s_1^0)], \theta_+[s_1^0, s_2(s_1^0)]]$. При этом радиус кривизны, интерполирующий излом комплексной поверхности равен

$$\frac{1}{\rho(\alpha)} = \left\{ \left[\frac{1}{\rho(\theta_+)} - \frac{1}{\rho(\theta_-)} \right] \frac{\alpha - \theta_-}{\theta_+ - \theta_-} + \frac{1}{\rho(\theta_-)} \right\} \times \\ \times \left[1 - \frac{4(\alpha - \theta_-)(\theta_+ - \alpha)}{(\theta_+ - \theta_-)^2} + i \frac{4(\alpha - \theta_-)(\theta_+ - \alpha)}{(\theta_+ - \theta_-)^2} \right], \alpha \in [\theta_-, \theta_+]$$

где $\rho(\theta_+), \rho(\theta_-)$ главный радиус кривизны на границах излома. При этом в центре излома при $\theta = (\theta_+ + \theta_-)/2$ радиус кривизны чисто мнимый и равен $i \left[\frac{1}{\rho(\theta_+)} + \frac{1}{\rho(\theta_-)} \right] / 2$. На границах излома радиус кривизны равен $\rho(\theta_+), \rho(\theta_-)$.

Аналогично в случае «конуса» имеем непрерывное изменение координаты в соседних точках и интерполяцию радиуса кривизны, равного корню квадратному из комплексного произведения главных радиусов кривизны

$$\frac{1}{\rho_{av}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi\rho(\varphi)}, \\ \frac{1}{\rho(\alpha, \varphi)} = \left\{ \left[\frac{1}{\rho_{av}} - \frac{1}{\rho(\varphi)} \right] \frac{\alpha}{\theta_0} + \frac{1}{\rho(\varphi)} \right\} \left(1 - \frac{\alpha}{\theta_0} + \frac{i\alpha}{\theta_0} \right), \alpha \in [0, \theta_0]$$

где $\rho(\varphi)$ корень квадратный из произведения радиусов кривизны на границе излома типа конус. В обоих случаях «конуса» и «хребта» добавляется комплексная часть к радиусу кривизны поверхности, а действительная поверхность вне излома остается неизменной.

Сумма изломов соответствует дисперсии поверхности, ее сглаживание осуществляется в комплексной плоскости, где мнимая часть соответствует амплитуде локального излома. Т.е. мнимая часть поверхности соответствует излому в поверхности и определяет амплитуду излома. Т.е. максимальная мнимая часть поверхности в данной точке определяет угол излома в данной точке. При этом мнимая вставка поверхности в зависимости от непрерывного угла $\psi_k, k=1,2$ позволяет сгладить поверхность, но она становится комплексной. При этом изрезанной границе соответствует непрерывная комплексная поверхность, где в непрерывных углах, описывающих гладкую поверхность она комплексная с изменением мнимой части. В случае случайной шероховатой поверхности, локальная мнимая часть описывает дисперсию поверхности, разную в разных точках. Случайная поверхность с переменной дисперсией переходит в детерминированную эквивалентную комплексную поверхность. При этом случайная поверхность, имеющая постоянную дисперсию, не сводится к детерминированной. Случайная поверхность с переменной дисперсией более общий случай поверхности, и может не сводиться к детерминированной поверхности.

В этой системе координат поверхность тела с изломом интерполируется в переменных $\psi_k, k=1,2$ как имеющая непрерывную производную от координат поверхности. В самом деле, в изломе приращение угла наклона касательной равно приращению координаты $\psi_k, k=1,2$. Функция координат $x_l(\psi_1, \psi_2), l=1,2,3$ поверхности в точке излома соответствует комплексному радиусу при изменении угла ψ_1 и аналогично изменению угла ψ_2 . Таким образом, форма тела не меняется, но оно становится непрерывной функцией от углов ψ_l с учетом вставки комплексного радиуса.

При этом центр тела и системы координат определится из формулы

$$x_s^0 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x_s(\psi_1, \psi_2) d\psi_1 d\psi_2 / 4\pi^2,$$

где x_s координата границы тела. При этом в случае кусочно-непрерывной функции $x_s(\psi_1, \psi_2)$, не имеющей центра симметрии, координата центра тела не единственна. Это соответствует определению центра бесконечного множества тел, находящихся на расстоянии одно от другого.

Зависимость от углов $\psi_l, l=1,2$ позволяет свести задачу для не звездного тела, к звездному телу. При этом наблюдается взаимно однозначное соответствие между координатами границы тел и переменными $\psi_l, l=1,2$. В самом деле, переменным координатам $\psi_l, l=1,2$ соответствует, декартова точка на поверхности тела. При этом это периодическая функция от переменных $\psi_l, l=1,2$.

При этом определяется радиус переходной зоны по формуле

$$1/r(R, \psi_1, \psi_2) = \begin{cases} R_0 < R < a_{\max}, \delta(R, R_0, a_{\max})/\eta(\psi_1, \psi_2) + [1 - \delta(R, R_0, a_{\max})]/a_{\max}, \\ R > a_{\max}, 1/R \end{cases},$$

где
$$\delta(R, R_0, a) = \exp\left[-\frac{(R - R_0)^2}{(R - a)^2}\right] / \left\{ \exp\left[-\frac{(R - R_0)^2}{(R - a)^2}\right] + \exp\left[-\frac{(R - a)^2}{(R - R_0)^2}\right] \right\},$$

Внутренняя координата изменяется по формуле

$$r(R, \psi_1, \psi_2) = \begin{cases} a_{\min} < R < R_0, \eta(\psi_1, \psi_2)\delta(R, R_0, a_{\min}) + a_{\min}[1 - \delta(R, R_0, a_{\min})] \\ R < a_{\min}, R \end{cases},$$

Внешний угол определяется по формуле

$$\varphi_k(R, \psi_1, \psi_2) = \begin{cases} R_0 < R < a_{\max}, \delta(R, R_0, a_{\max})\psi_k + [1 - \delta(R, R_0, a_{\max})]\arg(x_3 + ix_k) \\ R > a_{\max}, \arg(x_3 + ix_k) \end{cases},$$

Внутренний угол изменяется по формуле

$$\varphi_k(R, \psi_1, \psi_2) = \begin{cases} a_{\min} < R < R_0, \psi_k \delta(R, R_0, a_{\min}) + \arg(x_3 + ix_k)[1 - \delta(R, R_0, a_{\min})] \\ R < a_{\min}, \arg(x_3 + ix_k) \end{cases}$$

При этом имеем

$$a_{\max}^2 = \max \sqrt{\sum_{p=1}^3 [x_p(\psi_1, \psi_2)]^2} + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [R_0 - \sqrt{\sum_{p=1}^3 [x_p(\psi_1, \psi_2)]^2}]^2 d\psi_1 d\psi_2 / (4\pi^2).$$

Где радиус a_{\min} определится из равенства

$$1/a_{\min}^2 = \max[1/\sqrt{\sum_{p=1}^3 x_p^2(\psi_1, \psi_2)}] + \\ + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1/R_0 - 1/\sqrt{\sum_{p=1}^3 [x_p(\psi_1, \psi_2)]^2}]^2 d\psi_1 d\psi_2 / (4\pi^2)$$

Назовем переходной зоной, область с переменной R , удовлетворяющей $a_{\min} < R < a_{\max}$ неравенству.

Причем на большом расстоянии от центра тела и внутри тела получается сферическая система координат. Пространственные координаты определяются по формулам

$$\begin{cases} y_1 = r(R, \varphi_1, \varphi_2) \sin \varphi_1 / \sqrt{1 + \cos^2 \varphi_1 \tan^2 \varphi_2} \\ y_2 = r(R, \varphi_1, \varphi_2) \sin \varphi_2 / \sqrt{1 + \cos^2 \varphi_2 \tan^2 \varphi_1} \\ y_3 = r(R, \varphi_1, \varphi_2) \cos \varphi_1 / \sqrt{1 + \cos^2 \varphi_1 \tan^2 \varphi_2} = \\ = r(R, \varphi_1, \varphi_2) \cos \varphi_2 / \sqrt{1 + \cos^2 \varphi_2 \tan^2 \varphi_1} \end{cases}, \quad (1.3)$$

Для каждого тела имеем зависимость $r(R, \psi_1, \psi_2), \varphi_l(R, \psi_1, \psi_2), l = 1, 2$.

2. Решение уравнения Гельмгольца для относительно скаляра

При этом уравнение Гельмгольца имеет вид

$$\sum_{k,l=1}^3 \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial q_k} (\sqrt{g} g^{kl} \frac{\partial U}{\partial q_l}) \right] + k^2 U = 0, \quad (2.1)$$

где преобразование координат определено по формуле (1.3), где $\varphi_l = g_l(R/R_0, \psi_1, \psi_2), l, k = 1, 2, q_1 = \psi_1, q_2 = \psi_2, q_3 = R/R_0$.

Покажем, как решается первое уравнение (2.1)

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \psi_1} \left[\sqrt{g} g^{11} \frac{\partial \Phi(R/R_0, \psi_1, \psi_2)}{\partial \psi_1} + \sqrt{g} g^{12} \frac{\partial \Phi(R/R_0, \psi_1, \psi_2)}{\partial \psi_2} + \right. \\ \left. + \sqrt{g} g^{13} \frac{\partial \Phi(R/R_0, \psi_1, \psi_2)}{\partial R/R_0} \right] + \alpha^2 \Phi = 0 \quad (2.2)$$

Для этого введем функцию ζ_1 из уравнения, являющегося первой частью

формулы (2.2)

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \psi_1} = \frac{\partial}{\partial \zeta_1}. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) эквивалентно уравнению (полагаем, что оператор действует на функцию ζ_1)

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial \psi_1} = \sqrt{g}, \quad (2.4)$$

Получим тоже соотношение другим способом. Дифференцируя произвольную функцию $h[\zeta_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0), \psi_2, R/R_0]$ по функции ψ_1 , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial h[\zeta_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0), \psi_2, R/R_0]}{\partial \psi_1} &= \frac{\partial h[\zeta_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0), \psi_2, R/R_0]}{\partial \zeta_1} \times \\ &\times \frac{\partial \zeta_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0)}{\partial \psi_1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подставляя величину $h[\zeta_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0), \psi_2, R/R_0]$ в оператор (2.3), получим

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial h[\zeta_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0), \psi_2, R/R_0]}{\partial \psi_1} = \frac{\partial h[\zeta_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0), \psi_2, R/R_0]}{\partial \zeta_1}, \quad (2.6)$$

используя (2.5) из (2.6) получим (2.4). Уравнение (2.4) непосредственно

интегрируем, откуда получим $\zeta_1 = \int_0^{\psi_1} \sqrt{g(\psi_1, \psi_2, R/R_0)} d\psi_1$.

Запишем операторное уравнение, являющееся внутренней частью уравнения (2.2)

$$\sqrt{g} g^{11} \frac{\partial}{\partial \psi_1} + \sqrt{g} g^{12} \frac{\partial}{\partial \psi_2} + \sqrt{g} g^{13} \frac{\partial}{\partial R/R_0} = \frac{\partial}{\partial \varphi_1}, \quad (2.7)$$

и допустим оператор (2.7) действует на функцию φ_1 , откуда получим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$g^{11} \sqrt{g} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi_1} + g^{12} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi_2} + g^{13} \frac{\partial \varphi_1}{\partial R/R_0} = 1/\sqrt{g}, \quad (2.8)$$

докажем это же, по-другому, допустим оператор (2.7) действует на функцию $h[\varphi_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0)]$, тогда получим

$$\sqrt{g} \left\{ g^{11} \frac{\partial h[\varphi_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0)]}{\partial \psi_1} + g^{12} \frac{\partial h[\varphi_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0)]}{\partial \psi_2} + g^{13} \frac{\partial h[\varphi_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0)]}{\partial R/R_0} \right\} = \frac{\partial h[\varphi_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0)]}{\partial \varphi_1}, \quad (2.9)$$

при этом справедливо

$$\begin{aligned} \frac{\partial h[\varphi_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0)]}{\partial \psi_1} &= \frac{\partial h[\varphi_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0)]}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0)}{\partial \psi_1}, \\ \frac{\partial h[\varphi_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0)]}{\partial \psi_2} &= \frac{\partial h[\varphi_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0)]}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0)}{\partial \psi_2}, \\ \frac{\partial h[\varphi_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0)]}{\partial R} &= \frac{\partial h[\varphi_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0)]}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1(\psi_1, \psi_2, R/R_0)}{\partial R}, \end{aligned}$$

и значит, подставляя эти выражения в (2.9), получаем (2.8).

Итак, имеем задачу Коши для уравнения в частных производных (2.8) относительно функции трех переменных $\varphi_1 = \varphi_1(\psi_1, \psi_2, R)$ см. [2]. Найдем характеристики $\psi_1(t, s_1, s_2), \psi_2(t, s_1, s_2), R(t, s_1, s_2), \varphi_1(t, s_1, s_2)$, откуда получим $\varphi_1 = \varphi_1(\psi_1, \psi_2, R)$. Характеристиками уравнения (2.8) в частных производных являются решение трех дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi_1}{dt} = g^{11}(\psi_1, \psi_2, R), \quad \frac{d\psi_2}{dt} = g^{12}(\psi_1, \psi_2, R); \quad \frac{dR}{dt} = g^{13}(\psi_1, \psi_2, R), \quad (2.10)$$

выберем начальные условия, на поверхности, зависящей от параметра s_1, s_2

$$\psi_1(t_0, s_1, s_2) = \beta_1(s_1, s_2), \quad \psi_2(t_0, s_1, s_2) = \beta_2(s_1, s_2); \quad R(t_0, s_1, s_2) = R_0 + \beta_3(s_1, s_2), \quad (2.11)$$

где определим $\beta_1(s_1, s_2), \beta_2(s_1, s_2), \beta_3(s_1, s_2)$ как неизвестные периодические функции по аргументам s_1, s_2 с периодом 2π , откуда найдем неизвестные функции $\beta_1(s_1, s_2), \beta_2(s_1, s_2)$ по значениям в конце переменной t . Т.е. из условий

$$\begin{aligned} \psi_1[t_0 + T(s_1, s_2), s_1, s_2] &= \pi + \beta_1(s_1, s_2), \\ \psi_2[t_0 + T(s_1, s_2), s_1, s_2] &= \pi + \beta_2(s_1, s_2), \quad R(t_0 + T(s_1, s_2), s_1, s_2) = a_{\max} + \beta_3(s_1, s_2). \end{aligned}$$

Функцию $T(s_1, s_2)$ определим в дальнейшем.

Для получения единственного решения задачи Коши необходимо, чтобы выполнялось

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \beta_1}{\partial s_1} & \frac{\partial \beta_2}{\partial s_1} & \frac{\partial \beta_3}{\partial s_1} \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial s_2} & \frac{\partial \beta_2}{\partial s_2} & \frac{\partial \beta_3}{\partial s_2} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial t} & \frac{\partial \psi_2}{\partial t} & \frac{\partial R}{\partial t} \end{vmatrix}_{(\psi_1, \psi_2, R) \in \gamma} \neq 0,$$

где действительный вектор $\frac{\partial \beta_1}{\partial s_k}, \frac{\partial \beta_2}{\partial s_k}, \frac{\partial \beta_3}{\partial s_k}, k=1,2$ образуют касательную плоскость к поверхности γ , заданной условиями $\psi_1 = \beta_1(s_1, s_2)$, $\psi_2 = \beta_2(s_1, s_2), R = \beta_3(s_1, s_2)$. Векторы $g^{11}\sqrt{g}, g^{12}, g^{12}$ являются касательными к характеристикам (2.10). Эти векторы должны быть не коллинеарными, чтобы определитель был не равен нулю, и решение задачи Коши было единственно и существовало.

Подставляя уравнение характеристики (2.10) в (2.8), получим

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 1/\sqrt{g[\psi_1(t, s_1, s_2), \psi_2(t, s_1, s_2), R(t, s_1, s_2)]}; \varphi_1(t_0, s_1, s_2) = 0, \quad (2.12)$$

Причем функция равная $T(s_1, s_2)$ должна быть определена из условия $\varphi_1[t_0 + T(s_1, s_2), s_1, s_2] = \pi$. Решая уравнение характеристики (2.10) и уравнение (2.12), получим

$$\psi_1 = \psi_1(t, s_1, s_2), \quad \psi_2 = \psi_2(t, s_1, s_2), \quad R = R(t, s_1, s_2), \quad \varphi_1 = \varphi_1(t, s_1, s_2),$$

откуда можно получить уравнение поверхности $\varphi_1 = \varphi_1(\psi_1, \psi_2, R)$, где при фиксированной величине ψ_2, R и величине ζ_1 , изменяющейся на период, величина $\varphi_1 + \zeta_1$ увеличится на угол 2π . Наоборот, при фиксированной величине ζ_1 и величине ψ_2 , изменяющейся на период, величина $\varphi_1 + \zeta_1$ увеличится на угол π , т.е. и величина 2π является периодом.

Уравнение (2.2) можно решить по-другому. Запишем его в виде

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \psi_1} \left[\sqrt{g} g^{11} \frac{\partial}{\partial \psi_1} + \sqrt{g} g^{12} \frac{\partial}{\partial \psi_2} + \sqrt{g} g^{13} \frac{\partial}{\partial R/R_0} \right] = \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2}$$

Нужно найти функцию $h(\varphi_1)$, чтобы при остальных фиксированных переменных ρ, φ_2 функция, являющаяся решением оператора Лапласа,

зависела только от величины φ_1 . При этом необходимо определить функцию φ_1 . Единственной функцией $h(\varphi_1)$, с помощью которой можно впоследствии определить φ_1 , является функция $h(\varphi_1) = \varphi_1^2 / 2$. Подействуем на функцию $\varphi_1^2 / 2$ данным оператором. Получим дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \psi_1} \left[\sqrt{g} g^{11} \frac{\partial \varphi_1^2 / 2}{\partial \psi_1} + \sqrt{g} g^{12} \frac{\partial \varphi_1^2 / 2}{\partial \psi_2} + \sqrt{g} g^{13} \frac{\partial \varphi_1^2 / 2}{\partial R / R_0} \right] = \frac{\partial^2 \varphi_1^2 / 2}{\partial \varphi_1^2} = 1 \quad (2.13)$$

Представим неизвестную функцию в виде

$$\alpha(\psi_1, \psi_2, R / R_0) = \sum_{p, q, s = -\infty}^{\infty} b_{pqs} \exp[ip\psi_1 + iq\psi_2 + 2\pi is \frac{R - a_{\min}}{a_{\max} - a_{\min}}]$$

При этом выбираем $\varphi_1(\psi_1, \psi_2, R / R_0)$ в виде

$$\varphi_1 = \varphi_1(\psi_1, \psi_2, R / R_0) = \frac{\alpha(\psi_1, \psi_2, R / R_0) - \alpha(\psi_1, \psi_2, a_{\min} / R_0)}{\alpha(\psi_1, \psi_2, a_{\max} / R_0) - \alpha(\psi_1, \psi_2, a_{\min} / R_0)} 2\pi$$

Подставим в (2.13) значение $\varphi_1^2 / 2$, получим

$$\sum_{p, q, s = -\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \psi_1} \left[\frac{\partial}{\partial \psi_1} \sqrt{g} g^{11} + \frac{\partial}{\partial \psi_2} \sqrt{g} g^{12} + \frac{\partial}{\partial R / R_0} \sqrt{g} g^{13} \right] \varphi_1^2(\psi_1, \psi_2, R / R_0) / 2 = \sqrt{g}.$$

Умножая обе части на величину $\exp[-in\psi_1 - im\psi_2 - 2\pi ik(R - a_{\min}) / (a_{\max} - a_{\min})]$ и интегрируя по периоду, получим нелинейное уравнение по определению величины b_{pqs}

Откуда определяем b_{pqs} , и значит, вычислена функция $\varphi_1 = \varphi_1(\psi_1, \psi_2, R)$.

Получено решение внутри переходной зоны $a_{\min} < R < a_{\max}$. Причем первый член оператора Лапласа имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi_1^2} + \alpha^2 \Phi = 0$$

Если не решать систему (2.13), уравнение (2.2) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta_1 \partial \varphi_1} + \alpha^2 \Phi = 0,$$

которое имеет решение

$$\Phi = \exp[i\alpha(\zeta_1 + \varphi_1)] = \exp[i\alpha\eta_1(\zeta_1, \psi_2, R)],$$

при этом имеем $\eta_1 \in [0, 2\pi]$. При этом имеем $\eta_1 = \zeta_1 + \varphi_1$. Уравнение (2.2) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta_1^2} + \alpha^2 \Phi = 0,$$

где η_1 это функция от углов $\eta_1 = \eta_1(\zeta_1, \psi_2, R)$. При этом следующий член в (2.1) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta_2^2} + \beta^2 \Phi = 0,$$

Для определения радиуса ρ будем решать следующее уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial R} \left[\sqrt{g} g^{31} \frac{\partial \Phi(R, \psi_1, \psi_2)}{\partial \psi_1} + \sqrt{g} g^{32} \frac{\partial \Phi(R, \psi_1, \psi_2)}{\partial \psi_2} + \right. \\ \left. + \sqrt{g} g^{33} \frac{\partial \Phi(R, \psi_1, \psi_2)}{\partial R/R_0} \right] + \gamma^2 \Phi = 0 \end{aligned}$$

Задача решается тем же способом в переходной зоне. Имеем уравнения

$$\begin{aligned} \sqrt{g} g^{31} \frac{\partial}{\partial \psi_1} + \sqrt{g} g^{32} \frac{\partial}{\partial \psi_2} + \sqrt{g} g^{33} \frac{\partial}{\partial R/R_0} = \frac{\partial}{\partial \rho/R_0} \quad (2.14) \\ \frac{\partial}{\partial R/R_0} = \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial \xi} \end{aligned}$$

Из первого уравнения (2.14) определяем функцию $\rho/R_0 = f(R/R_0, \psi_1, \psi_2)$. При этом имеем операторное уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \rho/R_0} = \frac{\partial^2}{\partial (\xi + \rho/R_0)^2}. \quad (2.15)$$

Причем начальные условия удовлетворяют граничным условиям

$$\xi(a_{\max}/R_0, \psi_1, \psi_2) + \rho(a_{\max}/R_0, \psi_1, \psi_2)/R_0 = a_{\max}/R_0, \xi(1, \psi_1, \psi_2) + \rho(1, \psi_1, \psi_2)/R_0 = 1$$

Вычислим значение функции ξ, ρ , упрощающей дифференциальное уравнение аналогичным способом, по которому были вычислены углы $\eta_l, l = 1, 2$.

Вне переходной зоны $a_{\min} < R < a_{\max}$ решение упрощается, так как поверхность имеет форму сферы, для которой имеем $\rho = R; \eta_l = \eta_l(\psi_1, \psi_2); \psi_l = \arg(x_3 + ix_l), l = 1, 2$ и построение углов $\eta_l, l = 1, 2$ упрощается.

Уравнение Гельмгольца имеет вид вне переходной зоны

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta_2^2} \right) + k^2 U = 0.$$

Решим ту же задачу, но с другим определением углов и радиуса. Уравнение Гельмгольца в новых координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta_2^2} \right) + k^2 U = 0 \quad (2.16)$$

Построим значения ρ, η_1, η_2 .

Где величина $a = a_{\min}, a_{\max}, R_0$. Данный вид уравнения не противоречит теореме Гаусса о невозможности построения двух ортогональных углов на поверхности тела. Центр сферы перешел в плоскость, а поверхность сферы в параллельную плоскость, относительно параллельной плоскости центров сферы на расстоянии равном среднему радиусу. Причем на этой плоскости построена сетка периодических ортогональных углов. Переходная зона образует поверхности, которые переходят в плоскости на расстоянии a_{\min}, a_{\max} от плоскости центра сферы. По координатам $R, \psi_l, l=1,2$ в переходной зоне однозначно определяются координаты $\eta_l, l=1,2, \rho$; и наоборот. Зная зависимость $\psi_l = \psi_l(\rho, \eta_1, \eta_2), l=1,2; R = R(\rho, \eta_1, \eta_2)$ можно по формулам (1.3) восстановить зависимость $x_l = x_l(\rho, \eta_1, \eta_2), l=1, \dots, 3$. Значит, зная решение уравнения (2.16), можно вычислить решение дифракционной задачи для произвольного тела.

При этом преобразование координат определит следующая формула вне переходной зоны во внешнем пространстве

$$\begin{cases} x_1 = a_{\max} \eta_1 = a_{\max} / \cos q_1 \\ x_2 = a_{\max} \eta_2 = a_{\max} / \cos q_2 . \\ x_3 = r \end{cases}$$

При этом углы удовлетворяют условию $\eta_1^2 + \eta_2^2 \geq 2$. При этом углы η_l имеют период 2π , и координата входит в решение в виде $\exp(in \eta_l) = \exp(in x_l / a_{\max})$, т.е. координата функция периодическая с

периодом $2\pi a_{\max}$. Построим радиус-вектор из центра тела до поверхности сферы, радиуса a_{\max} . Угол q_l образован этим радиус-вектором и осью Ox_l .
Внутри сферы вне переходной зоны, имеем

$$\begin{cases} y_1 = a_{\min} \phi_1 = a_{\min} \cos q_1 \\ y_2 = a_{\min} \phi_2 = a_{\min} \cos q_2 \\ y_3 = r \end{cases}$$

При этом углы удовлетворяют условию $\phi_1^2 + \phi_2^2 \leq 2$.

Построим радиус-вектор из центра тела до поверхности сферы, радиуса a_{\min} . Причем имеем $x_l y_l = a^2 = a_{\max} a_{\min}$, где периодический угол q_l образован радиус-вектором тела с проекцией радиус-вектора на ось y_l .
Причем имеем соотношение для внутренности и для внешности сферы

$$\begin{aligned} \phi_1^2 + \phi_2^2 &= r^2 / a_{\min}^2 \leq 2 \\ \eta_1^2 + \eta_2^2 &= r^2 / a_{\max}^2 > 2 \end{aligned}$$

При этом преобразование координат внутри переходной зоны при условии $R_0 < R < a_{\max}$

$$\begin{cases} x_1 = R_0 \eta_1 = R_0 / \cos q_1 = \int_0^{\eta_1} r(R, \eta_1, \eta_2) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial r(R, \eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1}\right)^2} d\eta_1 \\ x_2 = R_0 \eta_2 = R_0 / \cos q_2 = \int_0^{\eta_2} r(R, \eta_1, \eta_2) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial r(R, \eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2}\right)^2} d\eta_2 \\ x_3 = \rho(R, \eta_1, \eta_2) \end{cases}$$

$$q_l = \arccos\left(\frac{R_0}{x_l}\right), a_{\max} \geq x_l \geq R_0$$

При этом преобразование координат внутри переходной зоны при условии $R_0 > R > a_{\min}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = R_0 \eta_1 = R_0 \cos q_1 = \int_0^{\eta_1} \frac{r(R, \eta_1, \eta_2)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial r(R, \eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1}\right)^2}} d\eta_1 \\ x_2 = R_0 \eta_2 = R_0 \cos q_2 = \int_0^{\eta_2} \frac{r(R, \eta_1, \eta_2)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial r(R, \eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2}\right)^2}} d\eta_2 \\ x_3 = \rho(R, \eta_1, \eta_2) \end{array} \right. .$$

$$q_l = \arccos\left(\frac{x_l}{R_0}\right), a_{\min} \leq |x_l| \leq R_0$$

Причем имеем $a_{\min} = \rho(a_{\min}, \eta_1, \eta_2), R_0 = \rho(R_0, \eta_1, \eta_2), a_{\max} = \rho(a_{\max}, \eta_1, \eta_2)$.

При этом поверхность сфер с радиусом $\rho(R, \eta_1, \eta_2)$ с заданной сеткой $x_l = R_0 \eta_l$ разворачивается в поверхности с высотой $x_3 = \rho(R, \eta_1, \eta_2)$, заданные прямоугольной сеткой. Причем высота поверхности возможно комплексная. При этом в основном декартовом пространстве образуется объемная фигура, с радиусом границы $r = r(R, \eta_1, \eta_2)$, образующей криволинейные координаты на поверхности границы, $x_l = x_l(R, \eta_1, \eta_2), l = 1, 2$.

Причем

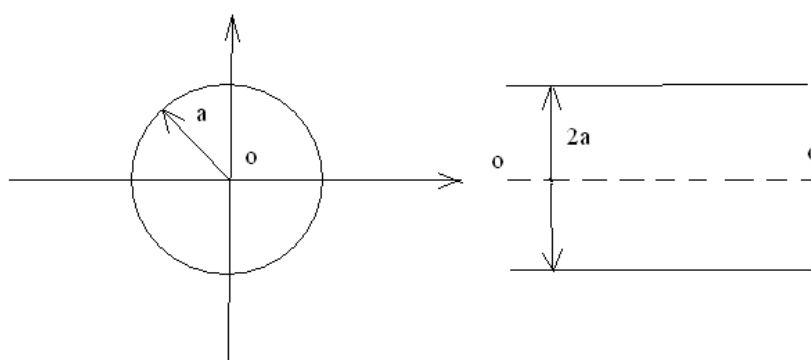
$$\begin{aligned} r(R, \eta_1, \eta_2) &= r[a_{\max} + (R - a_{\max}) + O(R - a_{\max})^2, \eta_1, \eta_2] = \\ &= a_{\max} + (R - a_{\max}) + O(R - a_{\max})^2, \end{aligned}$$

откуда имеем $r[R + O(R - a_{\max})^2, \eta_1, \eta_2] = R + O(R - a_{\max})^2$. Значит, в окрестности радиуса $R = a_{\max}$ удовлетворяют условию $\eta_1^2 + \eta_2^2 > 2$. Значит, углы в переходной зоне тем более удовлетворяют $\eta_1^2 + \eta_2^2 > 2a_{\max}^2 / R_0^2 > 2$. Но так как с помощью аналогичных рассуждений можно доказать, что углы в переходной области удовлетворяют условию $\eta_1^2 + \eta_2^2 < 2$, значит действительные углы в переходной области не существуют, и они имеют вид $\eta_l = 2 + i \operatorname{Im} \eta_l$.

Причем углы η_1, η_2 находятся на поверхности сферы радиуса a_{\max} и равны $\eta_l = 1/\cos q_l$. Где угол q_l равен $q_l = \arccos(a_{\max}/x_l), l=1,2; |x_l| > a_{\max}$. Поверхность сферы в координатах η_1, η_2 перейдет в параллельные двумерные плоскости, находящиеся на расстоянии a от центральной плоскости, образованной из центра сферы. Причем изменение координаты x_1 вызовет изменение координаты η_1 при фиксированных координатах x_2, η_2 . Причем увеличение угла вызовет пропорциональное увеличение координаты. При этом поверхность сферы развернется в двумерную периодическую плоскость в трехмерном пространстве.

Граница объема переходной зоны, заданная радиусом $r(R, \varphi_1, \varphi_2)$, при фиксированном R , преобразуется в комплексную поверхность, плавно переходящую в параллельные плоскости на расстоянии a_{\min}, R_0, a_{\max} .

Расстояние на поверхности плоскости, соответствующее поверхности сферы, задается формулой $l_l = a\eta_l$. Причем расстояние на плоскости соответствует периодической координате $x_l = a\eta_l$. Причем углы η_l имеют период 2π по способу построения этих углов. В одномерном случае имеем следующее соответствие



Длина окружности радиуса a перейдет в две параллельные прямые линии. Центр окружности O перейдет в прямую линию OO . Длина окружности радиуса r , перейдет в прямые на расстоянии r от прямой OO .

При этом эти прямые имеют ту же длину, что и длина окружности

радиуса a , так как центр окружности растянут в прямую линию OO того же периода, что и длина окружности радиуса a . Т.е. окружность преобразуется в прямоугольник со сторонами $[2a, 2\pi a]$, причем высота этого прямоугольника $2a$, а основание $2\pi a$.

При этом основание периодически продолжено до бесконечности, что соответствует периодической поверхности окружности, а радиус окружности изменен. При этом поверхность окружности описывается периодически. В результате получено такое нелинейное преобразование пространство вне окружности в периодическое пространство. Причем внутри окружности эти углы удовлетворяют $|\phi_l| \leq 1$, т.е. длина основания меньше величины a , т.е. внутри окружности длина дуги меньше периода и значит координата функция не периодическая. Наше декартово макро пространство находится внутри сферы, и значит, координаты не периодические. При этом микро пространство имеет период a_{\min} , но этот период мал и мы его не замечаем. При этом наше декартово пространство соответствует переходной зоне, т.е. находится внутри $[a_{\min}, a_{\max}]$. Вне этой переходной зоны во внешнем пространстве имеем периодическое пространство a_{\max} . Во внутреннем пространстве вне переходной зоны имеем период a_{\min} . Но так как во внутренности сферы a_{\min} периоды не укладываются, внутреннее пространство сферы не периодическое. А внутри этой переходной зоны пространство без периодов.

Т.е. вне радиуса a_{\max} координаты x_1, x_2 периодические. Можно построить три периодических угла ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 соответствующие трем координатам x_1, x_2, x_3 , и тогда пространство вне радиуса a_{\max} будет периодическое. Это означает существование параллельных периодических миров, с теми же свойствами и живущих по тем же законам природы. Но время в этих мирах течет без опережения и запаздывания, иначе другие периоды пространства могли бы вмешаться и изменить ход событий.

При этом в переходной области действительные углы φ_l не существуют, значит, пространство в переходной области не плоское и метрический интервал определяется по формуле.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \sum_{l,k=1}^3 \sqrt{(\operatorname{Re} g_{lk} dq^l dq^k)^2 + (\operatorname{Im} g_{lk} dq^l dq^k)^2} = c^2 dt^2 -$$

$$- \sum_{l,k=1}^3 h_{lk} d|q^l| d|q^k|; h_{lk} = \sqrt{(\operatorname{Re} g_{lk} \frac{dq^l}{d|q^l|} \frac{dq^k}{d|q^k|})^2 + (\operatorname{Im} g_{lk} \frac{dq^l}{d|q^l|} \frac{dq^k}{d|q^k|})^2}.$$

Вычислим величину

$$\frac{dq^l}{d|q^l|} = \frac{d(2 + i \operatorname{Im} q^l)}{d\sqrt{4 + (\operatorname{Im} q^l)^2}} = \frac{di\sqrt{s_l^2 - 4}}{ds^l} = \frac{is_l}{\sqrt{s_l^2 - 4}} = \frac{i\sqrt{4 + (\operatorname{Im} q^l)^2}}{\operatorname{Im} q^l}$$

Тогда метрический тензор равен

$$h_{lk} = \sqrt{(\operatorname{Re} g_{lk})^2 + (\operatorname{Im} g_{lk})^2} \frac{\sqrt{4 + (\operatorname{Im} q^l)^2}}{\operatorname{Im} q^l} \frac{\sqrt{4 + (\operatorname{Im} q^k)^2}}{\operatorname{Im} q^k}.$$

Т.е. на границе переходной зоны $r = a_{\min}, r = a_{\max}$, метрический тензор стремится к бесконечности, так как на границе переходной зоны $\operatorname{Im} q^l = 0$.

Стремление метрического тензора на границе переходной зоны к бесконечности, оправдывает введение разного решения на границе переходной зоны и необходимости граничных условий, сглаживающих этот скачок.

Стремление метрического тензора к бесконечности, означает бесконечный потенциал гравитационного поля, т.е. на границе с радиусом a_{\max} сосредоточены большие массы материи не обязательно излучающей свет, которые ускоряют вещество с радиусом $r < a_{\max}$.

Аналогичная ситуация с радиусом $r = a_{\min}$. Точек, являющихся центром системы координат имеется множество, так как имеется множество тел,, следовательно и множество центров всей системы. В

точечном объеме центра системы координат сосредоточена огромная масса, которая наращивается за счет притяжения других тел и образуются черные дыры, в центре которых метрический тензор стремится к бесконечности (см. [1]§102)

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{r_g}{r} dR^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = c^2 d\tau^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2r_g}(R - c\tau)\right]^{3/2}} - \left[\frac{3}{2}(R - c\tau)\right]^{3/2} r_g^{1/2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Т.е. частицы стремятся к центру системы $r \rightarrow 0, R - c\tau \rightarrow 0$, за конечный интервал времени. При этом черным дырам соответствует a_{\min} , а ускорению материи a_{\max} .

Причем формула справедлива для модуля комплексного пространства. При этом справедливо равенство

$$\Gamma'_{i,pq} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial^2 x_l}{\partial x'^p \partial x'^q} + \frac{\partial x_l}{\partial x'^i} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^p \partial x'^q} \right), \quad (2.19)$$

которое доказывается вычислением символа Кристоффеля, при условии $g'_{pq} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^l}{\partial x'^p} \frac{\partial x_l}{\partial x'^q} + \frac{\partial x_l}{\partial x'^p} \frac{\partial x^l}{\partial x'^q} \right)$. Поэтому в случае выполнения (2.19) в пространстве следует выполнение $\Gamma_{s, nm} = 0$, что следует из формулы (2.20)

см. аналогичную формулу в [1] относительно символа Кристоффеля Γ^i_{pq}

$$\Gamma'_{i,pq} = \Gamma_{s, nm} \frac{\partial x^s}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^p} \frac{\partial x^m}{\partial x'^q} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial^2 x_l}{\partial x'^p \partial x'^q} + \frac{\partial x_l}{\partial x'^i} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^p \partial x'^q} \right) \quad (2.20)$$

Так как (2.19) выполняется в комплексном пространстве, следует, что метрический интервал равен модулю пространственной комплексной части метрического интервала и пространство в переходной области не плоское. При этом комплексное пространство переходной области является плоским.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \sum_{l,k=1}^3 g_{lk} dq^l dq^k$$

Где величины g_{lk}, q^l, q^k комплексные.

Как же строить решение задачи дифракции на произвольном теле. Оно сводится к рассеянию на трех плоскостях при нормальном падении волны с высотой a_{\min}, R_0, a_{\max} . Причем внутри переходной зоны построить решение сложно. Но можно построить решение в окрестности границы тела и в окрестности границы переходной зоны. Кроме того, определяется решение вне переходной области. Причем вне переходной зоны имеем пространства с волновым числом $k, k/\sqrt{\epsilon\mu}$, а внутри переходной зоны имеем волновое число $k_{nm}, k_{nm}/\sqrt{\epsilon\mu}$. Решение волнового уравнения,

$$u = \exp(in\eta_1 + im\eta_2 \pm \sqrt{\frac{k_{nm}^2}{\epsilon\mu} - \frac{n^2 + m^2}{a^2}} r), \text{ где } a = a_{\min}, a_{\max}, R_0$$

$$u = \exp(in\eta_1 + im\eta_2) \sin \sqrt{k_{nm}^2 / \epsilon\mu - n^2 / a^2 - m^2 / a^2} r.$$

Строим граничные условия на поверхности минимального радиуса сферы

$$\begin{aligned} & c_1 \sin\left(\sqrt{k_{nm}^2 / \epsilon\mu - \frac{n^2 + m^2}{R_0^2}} a_{\min}\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{k_{nm}^2 / \epsilon\mu - \frac{n^2 + m^2}{R_0^2}} a_{\min}\right) = \\ & = c_3 \sin \sqrt{k_{nm}^2 a_{\min}^2 / \epsilon\mu - n^2 - m^2} \\ & [c_1 \cos\left(\sqrt{k_{nm}^2 / \epsilon\mu - \frac{n^2 + m^2}{R_0^2}} a_{\min}\right) - c_2 \sin\left(\sqrt{k_{nm}^2 / \epsilon\mu - \frac{n^2 + m^2}{R_0^2}} a_{\min}\right)] \times \\ & \times \epsilon \sqrt{k_{nm}^2 / \epsilon\mu - \frac{n^2 + m^2}{R_0^2}} a_{\min} = \epsilon c_3 \sqrt{k_{nm}^2 a_{\min}^2 / \epsilon\mu - n^2 - m^2} \cos \sqrt{k_{nm}^2 a_{\min}^2 / \epsilon\mu - n^2 - m^2} \end{aligned}$$

Строим граничные условия на поверхности тела

$$\begin{aligned}
& c_1 \sin(\sqrt{k_{nm}^2 R_0^2 / \varepsilon \mu - n^2 - m^2}) + c_2 \cos(\sqrt{k_{nm}^2 R_0^2 / \varepsilon \mu - n^2 - m^2}) = \\
& = c_4 \sin(\sqrt{k_{nm}^2 - (n^2 + m^2) / a_{\max}^2} R_0) + c_5 \cos(\sqrt{k_{nm}^2 - (n^2 + m^2) / a_{\max}^2} R_0) \\
& [c_1 \cos(\sqrt{k_{nm}^2 R_0^2 / \varepsilon \mu - n^2 - m^2}) - c_2 \sin(\sqrt{k_{nm}^2 R_0^2 / \varepsilon \mu - n^2 - m^2})] \times \\
& \quad \times \varepsilon \frac{\sqrt{k_{nm}^2 - (n^2 + m^2) / R_0^2}}{\sqrt{k_{nm}^2 - (n^2 + m^2) / a_{\max}^2}} = \\
& = [c_4 \cos(\sqrt{k_{nm}^2 - (n^2 + m^2) / a_{\max}^2} R_0) - c_5 \sin(\sqrt{k_{nm}^2 - (n^2 + m^2) / a_{\max}^2} R_0)]
\end{aligned}$$

Граничные условия для максимального радиуса переходной зоны

$$\begin{aligned}
& c_6 \exp(-i\sqrt{k^2 a_{\max}^2 - n^2 - m^2}) + U_0 = \\
& = c_4 \sin(\sqrt{k_{nm}^2 a_{\max}^2 - n^2 - m^2}) + c_5 \cos(\sqrt{k_{nm}^2 a_{\max}^2 - n^2 - m^2}) \\
& - i c_6 \exp(-i\sqrt{k^2 a_{\max}^2 - n^2 - m^2}) \sqrt{k^2 - (n^2 + m^2) / a_{\max}^2} + \frac{\partial U_0}{\partial n} = \sqrt{k_{nm}^2 - (n^2 + m^2) / a_{\max}^2} \times \\
& \quad \times [c_4 \cos(\sqrt{k_{nm}^2 a_{\max}^2 - n^2 - m^2}) - c_5 \sin(\sqrt{k_{nm}^2 a_{\max}^2 - n^2 - m^2})]
\end{aligned}$$

Запишем эти граничные условия в комплексной форме

$$\begin{aligned}
& c_4 \sin(\sqrt{k_{nm}^2 a_{\max}^2 - n^2 - m^2}) + c_5 \cos(\sqrt{k_{nm}^2 a_{\max}^2 - n^2 - m^2}) + \\
& + i \frac{\sqrt{k_{nm}^2 a_{\max}^2 - n^2 - m^2}}{\sqrt{k^2 a_{\max}^2 - n^2 - m^2}} [c_4 \cos(\sqrt{k_{nm}^2 a_{\max}^2 - n^2 - m^2}) - c_5 \sin(\sqrt{k_{nm}^2 a_{\max}^2 - n^2 - m^2})] = \\
& = 2c_6 \exp(-i\sqrt{k^2 a_{\max}^2 - n^2 - m^2}) + U_0 + i \frac{\partial U_0}{\partial n \sqrt{k^2 - (n^2 + m^2) / a_{\max}^2}}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Решаем однородную систему 6 уравнений с 6 неизвестными с точностью до множителя, из равенства нулю определителя определим волновое число k_{nm} . Определим решение однородной системы уравнений с точностью до комплексного множителя, который определим из решения уравнения (2.20). При этом получим решение во внешней области, периодически зависящее от величин $\sqrt{k^2 - n^2 / a_{\max}^2 - m^2 / a_{\max}^2} r$ и скачком меняющееся до величины $\sqrt{k_{nm}^2 - n^2 / a_{\max}^2 - m^2 / a_{\max}^2} r$.

В переходной зоне меняется скачком от величины

$\sqrt{k_{nm}^2(a_{\max}, a_{\min}) - n^2/a_{\max}^2 - m^2/a_{\max}^2} r$, до величины $\sqrt{k_{nm}^2(a_{\max}, a_{\min})/\epsilon\mu - n^2/R_0^2 - m^2/R_0^2} r$. Вне переходной зоны, но внутри тела меняется скачком от величины $\sqrt{k_{nm}^2/\epsilon\mu - n^2/R_0^2 - m^2/R_0^2} r$ до величины $\sqrt{k_{nm}^2/\epsilon\mu - n^2/a_{\min}^2 - m^2/a_{\min}^2} r$.

При этом радиус R_0 нужно определить по формуле $R_0^2 = a_{\max} a_{\min}$. Пространственный период вне переходной зоны определяется радиусами a_{\min}, a_{\max} . При этом тело произвольной формы имеет резонансные частоты, зависящие от радиусов a_{\max}, a_{\min} и от диэлектрических и магнитных свойств тела.

При этом данная задача удовлетворяет условию излучения. В самом деле

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} R_{nm} \exp(inx_1/a_{\max} + imx_2/a_{\max} + \sqrt{k^2 - n^2/a_{\max}^2 - m^2/a_{\max}^2} x_3) = \\
 &= R(\alpha, \beta) \exp[i\varphi(\alpha, \beta) + ikR]/kR
 \end{aligned}$$

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля т. II, Наука, М., 1973, 564с.