Описание перехода от Броуновского движения

к детерминированному движению.

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Существует детерминированное движение между двумя точками под действием силы. Существует и броуновское движение между двумя точками. Как их описать с помощью одного уравнения. Оказывается, это можно сделать с помощью присоединенной матрицы массы. При этом получился очень интересный результат, координата броуновской частицы может измениться скачком. Это следствие нелинейных уравнений и комплексного решения.

Детерминированное уравнение не релятивистского движения имеет вид

$$m\frac{d^2x_l}{dt^2} = F_l(x_1, x_2, x_3).$$

Где величина $F_l(x_1, x_2, x_3)$ задана. Для описания броуновского движения нужно ввести переменную присоединенную матрицу массы жидкости. При этом начальные координаты заданы, а начальная скорость определяется попаданием в заданную точку. В случае ламинарного, а не потенциального течения, эта присоединенная матрица зависит от скорости и ее определитель может равняться нулю. При этом ускорение образует мнимую дельта функцию и скорость, и координата становится комплексными. При этом действительная часть координаты определяет среднее значение, а мнимая часть координаты определяет среднеквадратичное отклонение. Необходимо, выбрать начальную скорость, чтобы среднее значение попало в заданную точку.

Эта задача интересна своей нелинейностью, делением на ноль, образованием обобщенной дельта функции и как следствие переходу к комплексной скорости тела малой массы. Среда при этом остается ламинарной в силу малой массы тела и малого возмущения среды. Но координаты, скорость и присоединенная масса тела становятся комплексными. Докажем это.

При этом в результате решения координата x_l окажется комплексной, и если имеется среднее, то оно в среднем достигнет заданной точки, причем имея среднеквадратичное отклонение.

Но броуновское движение является изрезанным. Для введения изрезанности нужно использовать переменную матрицу присоединенной массы в случае ламинарного обтекания. В среде, в которой описывается броуновское движение, образуется переменная матрица присоединенной массы. Т.е. уравнение имеет вид см. [1] §11 формула (11.8)

$$[m\delta_{lk} + m_{lk}(x_1, x_2, x_3, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt})]\frac{d^2x_k}{dt^2} = F_l(x_1, x_2, x_3)\,.$$

Если масса частицы, испытывающая броуновское движение мала, то определитель матрицы массы может равняться нулю. В случае потенциального течения присоединенная масса является константой. Но в случае ламинарного движения она зависит от скорости тела и так как скорость тела переменна, является переменной. Тогда ускорение определится как мнимая дельта функция, а скорость испытает скачок.

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} = [m\delta_{kl} + m_{kl}(x_1, x_2, x_3, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt})]^{-1} F_l(x_1, x_2, x_3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dx_k(t_p + i0)}{dt} - \frac{dx_k(t_p)}{dt} &= \int_{t_p-\varepsilon}^{t_p+\varepsilon} \frac{A_{kl}(t_p)}{t - t_p + i0} F_l([x_1(t_p), x_2(t_p), x_3(t_p)]dt = \\
&= A_{kl}(t_p)F_l([x_1(t_p), x_2(t_p), x_3(t_p)] \int_{t_p-\varepsilon}^{t_p+\varepsilon} [-i\pi\delta(t - t_P) + Vp(\frac{1}{t - t_P})]dt = \\
&= -i\pi A_{kl}(t_p)F_l([x_1(t_p), x_2(t_p), x_3(t_p)]
\end{aligned}.$$

Тогда скорость приобретет мнимую составляющую, испытав скачок. Если определитель имеет кратный корень, обращающий определитель в ноль, то имеем мнимый скачок координаты, так как имеем формулу

$$\frac{1}{(t-t_P+i0)^2} = i\pi\delta'(t-t_P) + Vp[\frac{1}{(t-t_P)^2}]$$

Имеем формулу

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} = B_{kl}(t_p)F_l([x_1(t_p), x_2(t_p), x_3(t_p)][i\pi\delta'(t-t_P) + Vp[\frac{1}{(t-t_P)^2}].$$

Интегрируя эту формулу, получим мнимый скачок координаты

$$\frac{dx_k}{dt} = B_{kl}(t_p)F_l([x_1(t_p), x_2(t_p), x_3(t_p)][i\pi\delta(t-t_P) + Vp[\frac{1}{(t-t_P)}].$$

При этом первый скачок испытает среднеквадратичное отклонение, а действительная координата непрерывна. Следующий скачок соответствует комплексным координатам, и амплитуда скачка является комплексной. При этом присоединенная масса является комплексной, так как координаты частицы являются комплексными. Но все эти скачки однозначно определяют среднее значение и среднеквадратичное отклонение, так что можно выбрать начальную скорость для попадания в данную точку.

При этом получен фундаментальный результат, координата броуновской частицы может измениться скачкообразным образом, причем как действительная координата, так и мнимая координата. Но это скачкообразное изменение средней координаты и среднеквадратичного отклонения. Но изменение статических характеристик, среднего и среднеквадратичного отклонения не происходит без изменения реализаций, определяющей среднее и среднеквадратичное отклонение. Но это так как это отклонение от среднего, то оно может произойти на большую величину или на малую величину, отступ от среднего определяется среднеквадратичным отклонением.

Таким образом описано единым образом как детерминированное движение частицы, так и Броуновское случайное движение. При детерминированном движении определитель матрицы присоединенной массы в ноль не обращается. Детерминированным образом описываются тела с большой массой, а тела с малой массой могут иметь нулевой определитель матрицы присоединенной массы.

Возникает вопрос, как добиться скачка тела с большей массой. Для этого вычислим кинетическую энергию двигающейся жидкости в турбулентной среде. Она равна

$$E = \int_V \rho \sum_{i,k=1}^{3} U_i(x_1, x_2, x_3) U_k(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ = \sum_{i,k=1}^{3} m_{ik}(x_1, x_2, x_3, V_1, V_2, V_3) V_i V_k .$$

Где $U_i(x_1, x_2, x_3)$ скорость жидкости, V_i скорость тела, помещенного в жидкость, величина $m_{ik}(x_1, x_2, x_3, V_1, V_2, V_3)$ это присоединенная масса тела, полученная как с помощью теоремы о среднем значении интеграла. При этом если плотность среды больше плотности тела, присоединенная масса больше массы тела, определитель этой массы может равняться нулю, и координата двигающегося тела может измениться скачком. Но для этого необходим турбулентный режим, чтобы массы $3m + m_{11} + m_{22} + m_{33} = \mathrm{Re}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) < 0$, иначе определитель этой матрицы больше нуля. Нулевое значение определителя возможно при комплексной, турбулентной скорости потока.

Список литературы

1. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц* Гидродинамика, т.VI, М.-, «Наука», 1988г.,