Кинетическая энергия тел или
формула Галилея с четырехмерной скоростью

Якубовский Е.Г.
e-mail yakubovski@rambler.ru

Аннотация

Казалось бы, что нового можно открыть в записи кинетической энергии тел. Но имеются свои особенности в ее определении. При этом для релятивистских скоростей справедлив принцип сложения четырехмерных скоростей Галилея, а не преобразование Лоренца. При этом невозможно записать закон сохранения энергии с потенциалом Ньютона, используя преобразование Лоренца. А с предлагаемым преобразованием это возможно. Кроме того, получена инвариантность волнового уравнения относительно преобразования Галилея с четырехмерной скоростью.

Запишем основное релятивистское соотношение в виде

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

Введем понятие четырехмерной скорости $u_l = (\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \frac{\mathbf{V}}{c\sqrt{1-V^2/c^2}})$, где трехмерные скорости, это некоторые числа.

Для него справедливо

$$m^2u_0^2c^4 = m^2\sum_{l=1}^{3} u_l^2c^4 + m^2c^4$$

Разделим его на величину mc^2, получим

$$\varepsilon = \frac{E}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = Eu_0 = mu_0^2c^2 = m\sum_{l=1}^{3} u_l^2c^2 + mc^2.$$

Назовем величину ε энергией тела, тогда квадрат импульса тела имеет вид

$$p^2 = \sum_{l=1}^{3} mc^2u_l^2 = \sum_{l=1}^{3} \frac{mV_l^2}{1-V^2/c^2}.$$

Инвариантные уравнения движения Ньютона запишутся в виде

$$mc^2 \frac{du_l}{ds} = -\frac{\partial U}{\partial x_l}$$

Умножаем обе части на величину $u_l + u_l^0$ где величина u_l^0, релятивистская постоянная скорость системы координат, получим

$$mc^2 \sum_{l=1}^{3} \frac{d(u_l + u_l^0)^2/2}{ds} = \sum_{l=1}^{3} -\frac{d(x_l + u_l^0 s)}{ds} \frac{\partial U(x_k + u_k^0 s - x_k^0 - u_k^0 s)}{\partial(x_l + u_l^0 s)} =$$

$$= -\frac{d}{ds} U(x_k + u_k^0 s - x_k^0 - u_k^0 s), k = 1,..,3$$

Откуда получаем закон сохранения и релятивистский Галилеев способ сложения скоростей и координат

$$\frac{d}{ds} \sum_{l=1}^{3} mc^2 (u_l + u_l^0)^2 / 2 + U(x_k + u_k^0 s - x_k^0 - u_k^0 s)] = 0$$

Откуда имеем релятивистское инвариантное относительно преобразования Галилея закон сохранения энергии

$$\sum_{l=1}^{3} mc^2 (u_l + u_l^0)^2 / 2 + U(x_k + u_k^0 s - x_k^0 - u_k^0 s) = const.$$

Или запишем его в штрихованной и не штрихованной системе координат

$$mc^2 \sum_{l=1}^{3} (\frac{dx_l}{ds})^2 / 2 + U(x_k - x_k^0) = const; u_l^0 = 0$$

$$mc^2 \sum_{l=1}^{3} (\frac{dx_l'}{ds})^2 / 2 + U(x_k' - x_k'^0) = const; x_k' = x_k + u_k^0 s; k = 1,...,3$$

При таком определении скорости системы координат, которая может равняться бесконечности, масштаб координат не изменяется в разных инерциальных системах координат. Инвариантен метрический интервал, определяющийся разным темпом времени движущегося объекта. Докажем это.

Определим постоянный метрический интервал через координаты и скорость

$$ds^2 = g_{lk}' dx'^l dx'^k = g_{lk} dx^l dx^k.$$

При этом должно выполняться соотношение

$$1 = g_{lk}u^l u^k = g'_{lk}(u^l + u_0^l)(u^k + u_0^k).$$

Откуда имеем преобразование метрического тензора в другой инерциальной системе координат

$$g_{lk} = g'_{lk}(1 + u_0^l / u^l)(1 + u_0^k / u^k)$$

Опишем инвариантность произведения координаты на скорость

$$ds^2 = g_{lk}R^l u^k = g'_{lk}(1 + u_0^l / u^l)R^l(1 + u_0^k / u^k)u^k =$$
$$= g'_{lk}(R^l + R_0^l)(u^k + u_0^k) = g'_{lk}R'^l u'^k; R_0^l = u_0^l R^l / u^l$$

Но как же записать инвариантным образом уравнение электродинамики? Скалярный и векторный потенциал в разных инерциальных системах координат одинаков, что следует из инвариантной формулы Лиенара-Вихерта.

$$\varphi' = \frac{eu'^0}{g'_{kl}R'^l u'^k} = \frac{eu'^0}{R'_k u'^k}; A'^l = \frac{eu'^l}{R'_k u'^k};$$
$$t' + R'(t')/c = t, u'^l = u^l + u_0^l, R'^l = x'^l - x^l$$

Согласно доказанному свойству метрический интервал произведения радиуса на скорость инвариантен. Определим формулу пересчета потенциала в разных системах отсчета

$$\varphi' = \varphi + \frac{eu_0^0}{R_k u_0^k}; A'^l = A^l + \frac{eu_0^l}{R_k u_0^k}; u'^l = u^l + u_0^l$$

При этом волновое уравнение инвариантно относительно преобразования Галилея.

$$\Delta A^l - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^l}{\partial t^2} = -4\pi u^l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$
$$\Delta \frac{eu_0^l}{R_k u_0^k} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{eu_0^l}{R_k u_0^k} = -4\pi u_0^l \delta(\mathbf{r} + \mathbf{u}_0 s - \mathbf{r}_0 - \mathbf{u}_0 s)$$

Складывая эти два уравнения, получим уравнение в штрихованной системе координат

$$\Delta A'^{l} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A'^{l}}{\partial t^2} = -4\pi u^{l}\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0)$$

$$A'^{l} = A^{l} + \frac{e u_0^{l}}{R_k u_0^{k}};\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u}_0 s;\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 s$$

Дифференцирование по штрихованным и не штрихованным координатам эквивалентно. При этом не используется преобразование Лоренца.