Уравнение Навье – Стокса в электромагнитном поле

с учетом квантовых эффектов

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Решение уравнения Навье – Стокса и уравнение Шредингера связаны функциональной зависимостью. Получим уравнение Навье – Стокса с учетом спина и электромагнитного поля, соответствующее уравнению Шредингера с этими же параметрами.

Гамильтониан уравнения Шредингера с учетом электромагнитного поля и спина частицы имеет вид см. [1]

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e}{mc}(\widehat{\mathbf{p}}\mathbf{A} + \mathbf{A}\widehat{\mathbf{p}}) + \frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2 - \frac{\mu}{s}\widehat{\mathbf{s}}\mathbf{H} + e\varphi.$$

Где для электрона $\frac{\mu}{s} = -\frac{|e|\hbar}{mc}$. Согласно правилу коммутации оператора импульса с любой функцией координат, имеем

$$\widehat{\mathbf{p}}\mathbf{A} - \mathbf{A}\widehat{\mathbf{p}} = -i\hbar \mathrm{div}\mathbf{A}.$$

Делим величину Гамильтониана на волновую функцию и воспользуемся равенством $\frac{\partial^2\psi}{\partial x_l^2} = \psi[\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2} + (\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l})^2]$, получим

$$i\hbar\frac{\partial \ln\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}[\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2} + (\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l})^2] - \frac{ie\hbar}{mc}(\mathbf{A}_l\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l} - \mathrm{div}\mathbf{A}/2) + \frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2 - \frac{\mu}{s}\widehat{\mathbf{s}}\mathbf{H} + e\varphi.$$

Умножим это равенство на оператор $-\frac{\partial}{m\partial x_p}$ и воспользуется формулой $V_p = -i\frac{\hbar\partial \ln\psi}{m\partial x_p}$, получим уравнение

$$\frac{\partial V_p}{\partial t}=\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 V_p}{\partial x_l^2}-V_l\frac{\partial V_p}{\partial x_l}-\frac{e}{mc}\mathbf{A}_l\frac{\partial V_p}{\partial x_l}-\frac{ie\hbar}{2m^2c}\frac{\partial \mathrm{div}\mathbf{A}}{\partial x_p}+$$

$$-\frac{e^2}{m^2c^2}\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_p}+\frac{\mu}{ms}\hat{\mathbf{s}}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_p}-\frac{\partial e\varphi}{m\partial x_p}$$

Получим уравнение Навье – Стокса с кинематической вязкостью $\nu = i\hbar/(2m)$ и давлением соответствующим $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_k}=\frac{\partial U}{m\partial x_k}$, где имеем $U=\frac{2e\nu}{c}\mathrm{div}\mathbf{A}+\frac{e^2}{2m\ c^2}\mathbf{A}^2-\frac{\mu}{s}\hat{\mathbf{s}}\mathbf{H}+e\varphi.$

При этом уравнение Навье – Стокса выглядит таким образом

$$\frac{\partial V_p}{\partial t}=\sum_{l=1}^{3}\ [\nu\frac{\partial^2 V_p}{\partial x_l^2}-V_l\frac{\partial V_p}{\partial x_l}-\frac{e}{mc}\mathbf{A}_{1l}\frac{\partial V_p}{\partial x_l}]-\frac{e\nu}{2mc}\frac{\partial \mathrm{div}\mathbf{A}_1}{\partial x_p}+$$

$$-\frac{e^2}{m^2c^2}\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_p}+\frac{\mu}{ms}\hat{\mathbf{s}}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_p}-\frac{\partial e\varphi}{m\partial x_p},\mathbf{H}=\mathrm{rot}\mathbf{A}.$$

Где в отличие от релятивистского случая возможен произвольный спин $\hat{\mathbf{S}}=\sum_{\alpha}\ \hat{\mathbf{s}}_\alpha$ оператор полного электронного спина атома. Величину напряженности электромагнитного поля разбиваем на две части, на постоянную составляющую H_0 и на переменную составляющую H_1. В частности при условии $\mathbf{A}=[\mathbf{H}_0,\mathbf{r}]/2$ и для одного электрона $\mu/s=-|e|\hbar/mc$.

$$\Delta H=\frac{i\hbar|e|}{mc}\mathbf{A}_{0al}\frac{\partial}{\partial x_l}-\frac{\mu}{s}\hat{\mathbf{s}}\mathbf{H}_0+\frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2=\frac{|e|}{2mc}(e_{lmn}\mathbf{H}_{0m}\mathbf{r}_{na}\hat{p}_{la}+2\hat{\mathbf{S}}\mathbf{H}_0)+$$

$$+\frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2=\frac{|e|}{2mc}(\mathbf{H}_0,(\hat{\mathbf{L}}+2\hat{\mathbf{S}}))+\frac{e^2}{8mc^2}\sum_a\ ([\mathbf{H}_0,\mathbf{r}_a]+2\mathbf{A}_1)^2=$$

$$=\mu_B H_0(\overline{L}_z+2\overline{S}_z)+\frac{e^2}{8mc^2}\sum_a\ ([\mathbf{H}_0,\mathbf{r}_a]+2\mathbf{A}_1)^2$$

В книге [1]§113 вычислено значение $(\overline{J}_z+\overline{S}_z)$. Величина $\overline{J}_z=M_j$ совпадает с заданным собственным значением проекции полного момента импульса.

Величина $\bar{J}_z + \bar{S}_z = gM_j$, где имеем определение множителя Ланде $g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}$, или гиромагнитный множитель.

Но это приближенное соотношение, в сильных полях оно не справедливо. При этом справедливо для постоянного магнитного поля H_n соотношение $H_i = e_{ipq} \frac{\partial A_q}{\partial x_p}, A_q = e_{qnm} H_n r_m / 2$. Оно сводится к соотношению $H_i = (\delta_{in}\delta_{pm} - \delta_{im}\delta_{pn}) H_n \delta_{pm} / 2 = (H_i \delta_{pm} - H_i)/2 = H_i$. С учетом энергии, равной $E = E_0 + E_1 = \mu_B g M_j H_0 + E_1$, где собственная энергия E_1 определяется из решения уравнения Навье – Стокса. Выбрав направление $\mathbf{H}$ в качестве оси z, получим $(\mathbf{S}, \mathbf{H}_1) = S_z H_1$.

При этом уравнение Навье – Стокса выглядит таким образом

$$\frac{\partial V_p}{\partial t} = \sum_{l=1}^{3} [\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 V_p}{\partial x_l^2} - V_l \frac{\partial V_p}{\partial x_l} - \frac{e}{mc} \mathbf{A}_{1l} \frac{\partial V_p}{\partial x_l}] - \frac{e\nu}{2mc} \frac{\partial \mathrm{div} \mathbf{A}_1}{\partial x_p} - \frac{e^2}{m^2 c^2} \sum_a \mathbf{A}_a \frac{\partial \mathbf{A}_a}{\partial x_p} +$$
$$+ \mu_B \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x_p} - \frac{\partial e\varphi}{m \partial x_p}; \mathbf{H}_1 = \mathrm{rot} \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_a = [\mathbf{H}_0, \mathbf{r}_a]/2 + \mathbf{A}_1$$

Где учитывается переменное в пространстве магнитное поле. В литературе рассмотрен случай однородного магнитного поля $H_0 = const$, а о переменном в пространстве магнитном поле не говорится. Правда предлагаемый метод имеет свои ограничения. Вероятность состояния при его использовании получить невозможно, но дисперсия величины определяется квадратом мнимой части величины. Кроме того, решение уравнения Навье – Стокса для определения временного множителя предполагает интегрирование по пространству. В случае стационарного решения этот временной множитель константа, уточняющая решение задачи с учетом спина электрона.

Решение надо искать в виде $V_r = -\alpha(t) i \frac{\hbar}{m}[\frac{\partial \ln R_{nl}(r)}{\partial r} + \frac{1}{r}] \cong -i\alpha(t)\frac{\hbar}{m}\begin{cases} \frac{l+1}{r}, r << a_0 \\ \frac{n}{r} - \frac{1}{a_0 n}, r >> a_0 \end{cases}$, где величина $R_{nl}(r)$ решение для атома водорода, величина a_0 это радиус Бора. Стационарное решение соответствует константе α. Для волновой функции получим выражение $\psi = [R_{nl}(r)]^{\alpha} r^{\alpha - 1}$, т.е. размер системы равен na_0 / α.

Уравнение Навье – Стокса надо записать относительно радиальной компоненты скорости. При этом возникают члены, равные величине $\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2}, V_r \frac{\partial V_r}{\partial r}, \frac{\partial V_r}{r \partial r}, \frac{V_r}{r^2} \sim \frac{1}{r^3}$. При интегрировании надо умножать на величину r^2, радиус интегрирования нужно ограничить. В нуле радиуса надо вводить радиус центральной частицы, в случае атома водорода это радиус ядра атома. На бесконечности радиуса это конечный размер системы, равный na_0, где a_0 это радиус Бора.

Приведем уравнение Навье – Стокса в релятивистской форме при аналогичном выводе, $V_p = u_p c = -i\frac{\hbar \partial \ln \psi}{m \partial x^p}, V_0 = u_0 c = i \frac{\hbar \partial \ln \psi}{m \partial x^0}$, перейдем от тензорного вида в уравнении к векторному виду, для чего введем обозначения $\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu}$, где $\sigma^{\mu\nu}$ антисимметричный тензор, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $\sigma^{\mu\nu} = (\alpha, i\Sigma)$, $F^{\mu\nu} = (-\mathbf{E}, \mathbf{H})$.

Для произвольной кинематической вязкости это уравнение имеет вид

$$\nu \frac{\partial^2 V_p}{\partial (x^0)^2} + V^0 \frac{\partial V_p}{\partial x^0} - \frac{2eA_0}{mc}\frac{\partial V_p}{\partial x^0} + \frac{e\nu}{mc}\frac{\partial^2 \mathbf{A}_0}{\partial x^p \partial x^0} = \sum_{l=1}^{3} [\nu \frac{\partial^2 V_p}{\partial (x^l)^2} - V^l \frac{\partial V_p}{\partial x^l} -.$$

$$-\frac{2eA_l}{mc}\frac{\partial V_p}{\partial x^l} + \frac{e\nu}{mc}\frac{\partial^2 \mathbf{A}_l}{\partial x^p \partial x^l}] + \frac{2e^2}{m^2c^2}(\mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial x^p} - \sum_{l=1}^{3} \mathbf{A}_l \frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial x^p}) +$$

$$+\frac{e\nu}{mc}[(\alpha, \frac{\partial E}{\partial x^p}) + i(\Sigma, \frac{\partial H}{\partial x^p})]$$

Где имеем значение $\nu = i\hbar / m$. При этом эффективный потенциал равен

$$-U_{eff} = \sum_{l=1}^{3} \frac{e\nu}{c}\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial x^l} + \frac{2e^2}{mc^2}(\mathbf{A}_0^2 - \sum_{l=1}^{3} \mathbf{A}_l^2) + \frac{e\nu}{c}[(\alpha, E) + i(\Sigma, H)].$$

В случае стационарного процесса остаются члены, зависящие от скорости.

Выводы

В результате преобразования уравнения Шредингера, описывающего вероятностный процесс, получилось уравнение Навье – Стокса с мнимой кинематической вязкостью. Уравнение Навье – Стокса имеет комплексное решение, так как кинематическая вязкость величина комплексная. При этом действительная часть скорости описывает среднее значение скорости, а мнимая часть ее математическое отклонение. Причем бывают случаи, когда решать уравнение Навье – Стокса проще, чем уравнение Шредингера с учетом электромагнитного поля см. [3],[4]. Но что за среда имеет кинематическую вязкость $i\hbar/(2m)$ и описывается данным уравнением. Свойства этой среды описаны в [5], и имеют большое значение для понимания структуры вакуума.

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. т.III, М., Наука, 1989,768стр.
2. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика, т.IV, М.,- «Наука»,1989 г., 727стр.
3. *Якубовский Е.Г.* Исследование решения уравнения Навье – Стокса, «Научное обозрение. Реферативный журнал», т.1, 2016, стр. 46-80 http://science-review.ru/abstract/pdf/2016/1/632.pdf
4. Якубовский Е.Г. Вычисление энергии атома водорода с помощью частиц вакуума, «Энциклопедический фонд России», 2016, 8стр. http://russika.ru/userfiles/390_1463742955.pdf
5. *Якубовский Е.Г.* ЧАСТИЦЫ ВАКУУМА, ОПИСЫВАЮЩИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И ПОЛЯ Реферативный журнал «Научное обозрение» 2016,т.2, стр.58-80, http://science-

review.ru/abstract/pdf/2016/2/662.pdf