Зависимость метрики ОТО от потенциалов гравитационного и электромагнитного поля

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Метрика для ковариантной и контравариантной компоненты метрического тензора ОТО, выраженные через ковариантные и контравариантные компоненты потенциала, должна быть одинакова. Получено линейное приближение зависимости метрики от гравитационного и электромагнитного поля. Из линейного приближения сконструирована метрика для нелинейной зависимости метрического тензора от потенциала электромагнитного и гравитационного поля. При этом коэффициент при потенциале этого метрического тензора соответствует решению Шварцшильда. Количество независимых компонент комплексных потенциалов совпадает с количеством независимых действительных метрических тензоров.

Введение множителя в уравнение общей теории относительности, позволяющего описывать электромагнитное поле

Основные попытки обобщения уравнений Максвелла связаны с развитием методов вычисления собственной энергии электрона. С необходимостью такого обобщения, чтобы формула для энергии электрона не стремилась к бесконечности, при радиусе, относительно центра электрона, стремящемся к нулю. Причем при больших расстояниях от излучателя, оно должна приводить к уравнениям классической электродинамики.

Существует распространенная ошибка, что классическое электромагнитное поле не применяется при условии (1.1). На самом деле это граница, когда начинается квантовое описание частицы.

$$\hbar\omega_H = \frac{\hbar eH}{m_e c} = \frac{137 e^3 H}{m_e c^2} < 2 m_e c^2 . \qquad (1.1)$$

Существуют границы нелинейного электромагнитного описания тел. Они получаются из формулы (1.14) $|\frac{(ie + m\sqrt{G})A_\alpha}{mc^2}| < 1$. Применяя эту формулу нелинейного эффекта к квантовому состоянию электрона, получим порядок величины формулы (1.1) $|\frac{(ie + m\sqrt{G}) r_e H}{mc^2}| = \frac{e^3 H}{m_e^2 c^4} < 1, r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$.

Условие нелинейности электромагнитного поля эквивалентно

$$\frac{eA}{m_e c^2} = \frac{E_{e.m.}}{m_e c^2} >> 1, E_{e.m.} = eA \qquad (1.2)$$

Характерная энергия электромагнитного поля при удержании плазмы с помощью электромагнитного поля равна $20 - 100 keV$, при величине энергии электрона $0.5 MeV$.

Получается, что малый параметр ОТО при удержании плазмы равен $\frac{E_{e.m.}}{m_e c^2} = 0.04 \div 0.2$. Для удержания плазмы значение этого коэффициента имеет значение $0.04 \div 0.2$, т.е. классическая электродинамика выполняется с точностью $4 \div 20\%$.

Уравнение общей теории относительности имеет вид (см.[1])

$$R_i^k = \frac{8\pi G}{c^4}(T_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k T), \qquad (1.3)$$

где R_i^k получен из тензора Риччи, обозначаемого R_{ik} – свернутого тензора кривизны пространства, T_i^k тензор энергии-импульса единицы объема тела, величина G это гравитационная постоянная, c скорость света.

Но уравнение общей теории относительности не содержит зарядов частиц, и, следовательно, не описывают электромагнитные взаимодействия. Необходим множитель в правой части уравнения общей теории относительности, позволяющий ввести в уравнение электромагнитные заряды и стремящийся к единице, при нулевом заряде или при большой массе.

Гравитационную массу покоя представим, как $\sqrt{G}m$ и введем дополнительный множитель в правую часть уравнения ОТО

$$(1+\frac{iq_1}{m_1\sqrt{G}})(1+\frac{iq_2}{m_2\sqrt{G}})=(1+\frac{iq_1}{m_1\sqrt{G}}+\frac{iq_2}{m_2\sqrt{G}}-\frac{q_1q_2}{m_1m_2G}), \qquad (1.4)$$

учитывающий электромагнитный заряд частиц разного знака

$$R_i^k=\frac{8\pi G}{c^4}(1+\frac{iq_1}{m_1\sqrt{G}})(1+\frac{iq_2}{m_2\sqrt{G}})(T_i^k-\frac{1}{2}\delta_i^k T). \qquad (1.5)$$

При величине массы, удовлетворяющей условию $m\to\infty$, получим стандартное детерминированное уравнение общей теории относительности. Причем гравитационный радиус

$$r_g=\frac{2Gm_2}{c^2}(1+\frac{iq_1}{m_1\sqrt{G}})(1+\frac{iq_2}{m_2\sqrt{G}}) \qquad (1.6)$$

для малых частиц имеет размер, соответствующий размерам квантовой механики. При этом, если имеем взаимодействие частиц разного знака, то гравитационный радиус равен

$$r_g=\frac{2Gm_2}{c^2}(1+\frac{ie}{m_1\sqrt{G}})(1-\frac{ie}{m_2\sqrt{G}})=\frac{2Gm}{c^2}+\frac{2e^2}{mc^2}, m_1=m_2=m.$$

В случае взаимодействия двух частиц с одинаковым зарядом гравитационный радиус комплексный и равен $r_g=\frac{2Gm_2}{c^2}(1\pm\frac{ie}{m_1\sqrt{G}})(1\pm\frac{ie}{m_2\sqrt{G}})$. При этом физический смысл имеет модуль гравитационного радиуса. Для описания микромира необходимо при использовании метрического тензора, чтобы он имел характерный размер, соответствующий размерам элементарных частиц. Процесс излучения электромагнитной энергии связан с имеющим малые размеры электроном.

Но возникает проблема описания электромагнитного поля, спин фотона которого равен 1, а спин гравитационного поля равен 2. Но введение мнимого потенциала снимает эту проблему. В случае электромагнитного взаимодействия двух частиц образуется электромагнитное поле со спином 2. При повороте системы на π в случае одинакового заряда получим тот же диполь одинакового знака и одинаковый гравитационной радиус. В случае двух частиц разного знака надо добавить комплексное сопряжение, так как такой поворот соответствует изменению знака диполя, т.е. зарядовому сопряжению диполя. Значит, мнимая величина заряда умножается на минус единицу и получается эквивалентное значение диполя с одинаковым знаком заряда и одинакового гравитационного радиуса, значит, спин электромагнитного поля для двух частиц равен двум, так как поворот на π приводит к эквивалентному состоянию диполя и значению гравитационного радиуса.

Построим, метрический тензор общей теории относительности по функции Лагранжа в случае электромагнитного и гравитационного поля. Возможно комплексная скорость тела, где мнимая часть соответствует вращению тела. Тогда при стационарных значениях метрического тензора, его можно построить таким образом, чтобы он удовлетворял уравнениям ОТО.

Функция Лагранжа частицы в электромагнитном и гравитационном поле при малых поправках к тензору метрики Галилея, равна

$$L = -mc^2\sqrt{1 - V^2/c^2} - q_1(A_i V^i / c + A_0) - mU\ , \qquad (1.7)$$

где четырехмерная скорость при малой скорости движения тела равна $V^i / c = (1, V^\alpha / c), \alpha = 1,...,3; i = 0,...,3$. Вводя вместо заряда q_1 комплексный заряд $q_1 = ie + m\sqrt{\gamma}$, где гравитационный потенциал U входит в потенциал A_0

.

Имеем соотношение

$$S = -mc\int ds = \int\ Ldt\ , \qquad (1.8)$$

Величина A_i определена с точность до градиента функции $\mathbf{A}=\mathbf{A}'+\nabla\alpha, \varphi=\varphi'-\frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ при калибровке Лоренца. Но при подстановке в (1.8) получаем соотношение

$$S=\int Ldt-e\int d\alpha/c=\int Ldt-e\alpha/c. \qquad (1.9)$$

Получаем, что величина α включается в действие частицы, т.е. величина четырехмерного потенциала определяется однозначно за вычетом градиента функции при малых энергиях, когда уравнение ОТО сводятся к волновым уравнениям. Надо определить векторный и скалярный потенциал. Вектор $\mathbf{A}$ содержит $\nabla\alpha$, а скаляр φ содержит $-\frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t}$, причем скаляр α удовлетворяет волновому уравнению в силу условия калибровки Лоренца.

Т.е. скаляр равен функции, удовлетворяющей волновому уравнению

$$\alpha(x_0,..,x_3)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ikx_0)[a_{nm}H^{(1)}_{n+1/2}(kr)+b_{nm}H^{(2)}_{n+1/2}(kr)]\times \\ \times Y_{nm}(\theta,\varphi)/\sqrt{kr}dk \qquad (1.10)$$

вне тела и внутри тела равен

$$\alpha(x_0,..,x_3)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}a_{nm}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ikx_0)J_{n+1/2}(kr\sqrt{\varepsilon})Y_{nm}(\theta,\varphi)/\sqrt{kr}dk.$$

Известный вектор $\mathbf{A}$, определенный по однозначному значению метрического тензора, можно представить в виде соленоидальной и градиентной составляющей. Взяв операцию, дивергенция от этого вектора, выделим градиентную составляющую, получим равенство, справедливое внутри тела

$$\nabla\mathbf{A}=\Delta\alpha(x_0,..,x_3)=$$

$$=\Delta\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}a_{nm}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ikx_0-k^2/\sigma^2)J_{n+1/2}(kr\sqrt{\varepsilon})Y_{nm}(\theta,\varphi)/\sqrt{kr}dk= \qquad (1.11)$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}a_{nm}\int_{-\infty}^{\infty}k^2\exp(ikx_0-k^2/\sigma^2)J_{n+1/2}(kr\sqrt{\varepsilon})Y_{nm}(\theta,\varphi)/\sqrt{kr}dk$$

При этом произведена регуляризация этого интеграла. Откуда можно определить коэффициенты a_{nm}, и значит определить градиентную составляющую вектора. Значит, можно выделить соленоидальную часть векторного потенциала, для которой и справедливо уравнение ОТО.

Причем справедлива формула

$$ds = [\sqrt{1 - V^2 / c^2} + (iq_1 + m_1\sqrt{G})\sum_{\alpha=0}^{3} A_\alpha V^\alpha / (m_1 c^3)]cdt\,. \quad (1.12)$$

Мнимый электрический заряд является естественным обобщением формулы (1.4), так как его использование в сочетании с формулой (1.4), приводит к волновому уравнению с мнимым зарядом в правой части, которое следует из уравнения общей теории относительности.

Введение мнимого заряда позволяет единым образом описать отталкивание зарядов одного знака и притяжение гравитационных масс. Кроме того, заряды и массы подчиняются одинаковым волновым уравнениям. Значение элементарного заряда e гораздо больше массы элементарных частиц $m\sqrt{\gamma}$, и, поэтому, элементарные частицы излучают только электромагнитную энергию, а излученная гравитационная энергия пренебрежимо мала. Поэтому считается, что в волновом уравнении временной член для уравнения относительно гравитационного поля равен нулю.

При этом метрический тензор в микромире при сильном электромагнитном поле является изрезанным, что придает новый физический смысл геометрической структуре микромира. Геометрический смысл имеет метрический тензор, построенный с помощью этой формулы.

При этом метрический интервал равен

$$ds^2=\{[\sqrt{1-V^2/c^2}+\frac{Q_\alpha V^\alpha\sqrt{1-V^2/c^2}}{m_1c^3\sqrt{1-V^2/c^2}}]\times$$

$$\times[\sqrt{1-V^2/c^2}+\frac{Q_\beta V^\beta\sqrt{1-V^2/c^2}}{m_1c^3\sqrt{1-V^2/c^2}}]\}c^2dt^2= \qquad .(1.13)$$

$$=[1-\frac{V^2}{c^2}+\frac{Q_\alpha V^\alpha\sqrt{1-V^2/c^2}}{m_1c^3}][1-\frac{V^2}{c^2}+\frac{Q_\beta V^\beta\sqrt{1-V^2/c^2}}{m_1c^3}]\frac{c^2dt^2}{1-V^2/c^2}$$

Контравариантные компоненты метрического интервала равны

$$ds^2=\{[\sqrt{1-V^2/c^2}-\frac{Q^\alpha V_\alpha\sqrt{1-V^2/c^2}}{m_1c^3\sqrt{1-V^2/c^2}}]\times$$

$$\times[\sqrt{1-V^2/c^2}-\frac{Q^\beta V_\beta\sqrt{1-V^2/c^2}}{m_1c^3\sqrt{1-V^2/c^2}}]\}c^2dt^2= \qquad .(1.13)$$

$$=[1-\frac{V^2}{c^2}-\frac{Q^\alpha V_\alpha\sqrt{1-V^2/c^2}}{m_1c^3}][1-\frac{V^2}{c^2}-\frac{Q^\beta V_\beta\sqrt{1-V^2/c^2}}{m_1c^3}]\frac{c^2dt^2}{1-V^2/c^2}$$

Величина Q_α определяется по формуле $Q_\alpha=(iq_1+m_1\sqrt{G})A_\alpha=\dfrac{(iq_1+m_1\sqrt{G})(iq_2+m_2\sqrt{G})V_\alpha}{[R-\frac{(\mathbf{R},\mathbf{V})}{c}]c}$, причем имеем

$Q_0=(iq_1+m_1\sqrt{G})A_0=-\dfrac{(iq_1+m_1\sqrt{G})(iq_2+m_2\sqrt{G})}{R-\frac{(\mathbf{R},\mathbf{V})}{c}}$, где в последней формуле используется гравитационный и электрический потенциал, причем $A_k=(\varphi,-\mathbf{A}),k=0,...,3$.

Откуда получаем для значения метрического тензора

$$g_{00}=1+\frac{2Q_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{m_1c^2}+\frac{Q_0^2(2-V^2/c^2)}{m_1^2c^4}\cong 1+\frac{2\sqrt{G}\varphi}{c^2}=1-\frac{r_g}{r}$$

$$g_{\alpha 0}=-g_{0\alpha}=\frac{2Q_\alpha\sqrt{1-V^2/c^2}}{m_1c^2}+\frac{Q_0}{m_1c^2}\frac{Q_\alpha}{m_1c^2} \qquad (1.14)$$

$$g_{\alpha\beta}=-g_{\beta\alpha}=\frac{Q_\alpha}{m_1c^2}\frac{Q_\beta}{m_1c^2},\alpha\neq\beta$$

$$g_{\alpha\alpha}=-1-\frac{2\sum_{\gamma=0}^{3}Q_\gamma V^\gamma}{m_1c^3\sqrt{1-V^2/c^2}}+\frac{Q_\alpha}{m_1c^2}\frac{Q_\alpha}{m_1c^2}\sim \qquad (1.15)$$

$$\sim -1-\frac{2\sqrt{\gamma}\varphi}{c^2}=-1+\frac{r_g}{r}$$

Контравариантные компоненты метрического тензора равны

$$g^{00}=1-\frac{2Q^0\sqrt{1-V^2/c^2}}{m_1c^2}+\frac{(Q^0)^2(2-V^2/c^2)}{m_1^2c^4}\cong 1+\frac{2\sqrt{G}\varphi}{c^2}=1-\frac{r_g}{r}$$

$$g^{\alpha 0}=-g^{0\alpha}=-\frac{2Q^\alpha\sqrt{1-V^2/c^2}}{m_1c^2}+\frac{iQ^0}{m_1c^2}\frac{Q^\alpha}{m_1c^2}$$

$$g^{\alpha\beta}=-g^{\beta\alpha}=\frac{Q^\alpha}{m_1c^2}\frac{Q^\beta}{m_1c^2},\alpha\neq\beta$$

$$g^{\alpha\alpha}=-(1-\frac{\sum_{\gamma=0}^{3}Q^\gamma V_\gamma}{m_1c^3\sqrt{1-V^2/c^2}}-\frac{Q^\alpha}{2m_1c^2}\frac{Q^\alpha}{m_1c^2})^{-2}=.$$

$$=-(1+\frac{2\sum_{\gamma=0}^{3}Q^\gamma V_\gamma}{m_1c^3\sqrt{1-V^2/c^2}}+\frac{Q^\alpha}{m_1c^2}\frac{Q^\alpha}{m_1c^2})$$

Члены с разными значениями индекса метрического тензора оказалась антиэрмитовы. Умножая их на мнимую единицу получим эрмитову матрицу. метрический интервал равен

$$ds^2 = (g_{ik} + g_{ki})dx^i dx^k / 2 = [(g_{ik} + g_{ki})/2 + (g_{ik} - g_{ki})/2]dx^i dx^k =$$
$$= (g_{ii}\delta_{ik} + i\sum_{\substack{i,k=0 \\ i\neq k}}^{3} \operatorname{Im} g_{ik})dx^i dx^k$$

При этом для неподвижного тела $V = 0$ получаем решение

$$ds^2 = (1 - \frac{r_g}{r})c^2 dt^2 - (1 + \frac{r_g}{r})(dx^2 + dy^2 + dz^2). \qquad (1.16)$$

Решение Шварцшильда при нулевой скорости тела определяется по формуле см. [1] , задача 4 к §100

$$ds^2 = \frac{(1 - r_g/4r)^2}{(1 + r_g/4r)^2}c^2 dt^2 - (1 + r_g/4r)^4(dx^2 + dy^2 + dz^2) \qquad (1.17)$$

При этом совпадает первое приближение этих формул. Для получения точного решения для двигающегося тела необходимо подставить в формулу (1.17) вместо статического решения, полное выражение, содержащее, члены, зависящие от скорости создающего поле тела. Это позволяет уточнить решение

$$ds^2 = \frac{(1-\delta)^2}{(1+\delta)^2}c^2 dt^2 - (1+\lambda)^4(dx^2 + dy^2 + dz^2);$$

$$\delta = [-\frac{2Q_0\sqrt{1 - V^2/c^2}}{m_1 c^2} + \frac{Q_0^2(2 - V^2/c^2)}{m_1^2 c^4}]/4 \cong -\frac{\sqrt{G}\varphi}{2c^2} = \frac{r_g}{4r}; A_0 = \varphi$$

$$\lambda = -[\frac{2\sum_{\gamma=1}^{3} Q_\gamma V^\gamma}{m_1 c^3\sqrt{1 - V^2/c^2}} - \frac{Q_\alpha}{m_1 c^2}\frac{Q_\alpha}{m_1 c^2} + \frac{2Q_0}{m_1 c^2\sqrt{1 - V^2/c^2}}]/4 = \frac{r_g}{4r}.$$

$$g_{0\alpha} = \frac{2Q_\alpha\sqrt{1 - V^2/c^2}}{m_1 c^2} + \frac{Q_0}{m_1 c^2}\frac{Q_\alpha}{m_1 c^2}$$

$$g_{\alpha\beta} = \frac{Q_\alpha}{m_1 c^2}\frac{Q_\beta}{m_1 c^2}, \alpha \neq \beta$$

В случае симметричного метрического тензора он является диагональным и равен

$$g_{00+} = g^{00-} = [\frac{1 - \dfrac{Q_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{2m_1c^2}}{1 + \dfrac{Q_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{2m_1c^2}}]^2 \sim 1 - \frac{r_g}{r};$$

$$g_{\alpha\alpha+} = g^{\alpha\alpha-} = -\{\frac{1 + \sum\limits_{\gamma=1}^{3} Q_\gamma V^\gamma / [2m_1c^3\sqrt{1-V^2/c^2}]}{1 - \sum\limits_{\gamma=1}^{3} Q_\gamma V^\gamma / [2m_1c^3\sqrt{1-V^2/c^2}]}\}^2 \sim -1 - \frac{r_g}{r}.$$

$$Q_\gamma = \frac{(ie + m\sqrt{G})A_\gamma}{mc^2}$$

Антисимметричная часть метрического тензора имеет вид

$$g^{ik} = \begin{Vmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ -p_1 & 0 & -a_3 & a_2 \\ -p_2 & a_3 & 0 & -a_1 \\ -p_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

При этом имеем соответствие

$$g^{ik} = (\mathbf{p},\mathbf{a}), g_{ik} = (-\mathbf{p},\mathbf{a}); \mathbf{p} = g^{\alpha 0} = -g^{0\alpha}\mathbf{,}\, \mathbf{a} = g^{\alpha\beta} = -g^{\beta\alpha}, \alpha \neq \beta = 1,...,3$$

Значение метрического тензора равно

$$g^{\alpha 0} = -g^{0\alpha} = -\frac{2Q_\alpha\sqrt{1-V^2/c^2}}{mc^2}$$

$$g^{\alpha\beta} = -g^{\beta\alpha} = \frac{Q_\alpha}{mc^2}\frac{Q_\beta}{mc^2}, \alpha \neq \beta$$

.

Разлагая метрический тензор общего вида на симметричную Sg_{ik} и антисимметричную Ag_{ik} часть.

Преобразуем произведение метрических тензоров

$$(Sg_{ik} + iAg_{ik})(Sg^{kl} - iAg^{kl})/2 = (Sg_{ik}Sg^{kl} + Ag_{ik}Ag^{kl})/2 +$$
$$+ i(Ag_{ik}Sg^{kl} - Sg_{ik}Ag^{kl})/2 = \delta_i^l + i(Ag_{ik}Sg^{kl} - Sg_{ik}Ag^{kl})/2 = .$$
$$= (G_i^\alpha)^{-1}\delta_{\alpha\beta}\lambda_\alpha G_\beta^l = A_i^l = \delta_i^l + A_i^l / r, \lambda_\alpha = 1 + \Lambda_\alpha / r,; r \to \infty$$

Величину собственного вектора можно определить $G_\beta^l = \delta_\beta^l + H_\beta^l / r; r \to \infty$.

Величину $|g_{ik}| = \sqrt{2} + H/r; |g^{kl}| = \sqrt{2} + P/r; r \to \infty$

Тогда имеем формулу для метрического тензора

$$G_\alpha^i g_{ik} g^{kl} (G_l^\beta)^{-1}/2 = \delta_\alpha^\beta \lambda_\alpha = \delta_\alpha^\beta (1 + Q_\alpha / r)$$

Окончательная формула для ковариантной и контравариантной компоненты метрического тензора

$$h_{\alpha k} = G_\alpha^i g_{ik} / \sqrt{2\lambda_\alpha}; h^{k\beta} = g^{kl} (G_l^\beta)^{-1} / \sqrt{2\lambda_\alpha}; r \to \infty$$

$$g_{ik} / \sqrt{2\lambda_\alpha} = g_{ii0} - \frac{r_g}{r}, g_{ii0} = (1,-1,-1,-1); g_{i0} = \frac{r_g}{r}; g_{\alpha\beta} = O(\frac{r_g}{r})^2, \alpha \neq \beta = 1,\dots,3$$

Отметим, что формула для метрического тензора определяется 8 значениями потенциала, на которые наложены две связи $\frac{\partial A_0}{\partial x^0} + \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial A_l}{\partial x^l} = 0$ для действительной и мнимой компоненты потенциалов. Число действительных неизвестных функций, равное числу независимых значений метрического тензора, совпало с количеством неизвестных компонент комплексных потенциалов. В случае симметричного метрического тензора асимптотика метрического тензора переходит в асимптотику решения Шварцшильда, т.е. формула переходит в линейное уравнение. Отмечу, что построенные метрические тензоры зависят от скорости тела.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля т. II, Наука, М.,1973,564с.