Связь релятивистского уравнения Навье-Стокса

и уравнений квантовой механики

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Из релятивистского уравнения Навье-Стокса, проецируемого на поперечные компоненты скорости, получены упрощенное уравнение вдоль траектории частицы. Оказалось, что вдоль траектории четырехмерная скорость частицы постоянная, возможно комплексная. Действительная часть скорости описывает поступательное движение, а мнимая часть вращение с постоянной скоростью, равной мнимой частью. Значение энергии частицы оказалось зависящей от модуля трехмерной компоненты скорости частицы. Проецируя производную от тензора энергии-импульса на трехмерную скорость частицы, получим значение модуля трехмерной скорости, т.е. можно вычислить энергию частицы. Решение для трехмерной скорости зависит от целого числа. Определена в соответствии с соотношением неопределенности постоянная скорость частиц во всех точках определяемой поверхности. Перпендикулярно этой поверхности скорость частиц не известна, так как известна координата перпендикулярной точки. На мнимой поверхности определена постоянная скорость вращения, но не известна координата точки вращения. Получена и волновая функция частицы, определяемая значением метрического интервала, для которого вычислена зависимость от координат.

Получим релятивистское уравнение Навье-Стокса без учета тепловых потерь. Далее из него получим уравнение квантовой механики с помощью формулы $p_l = -i\hbar \dfrac{\partial \ln \psi}{\partial x^l}$. Так как импульс и скорость в квантовой механике носит распределенный характер, дивергенция от этих величин равна нулю. Запишем уравнение Эйлера для релятивистского случая, для поперечных координат см. [1]

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} - u_i u^k \frac{\partial T_k^l}{\partial x^l} = 0 . \qquad (1)$$

При скалярном умножении на продольную координату u^i получим тождественный ноль. Из этого уравнения получается уравнение Эйлера, путем подстановки $T_i^k = wu_i u^k - p\delta_i^k$, которое выглядит следующим образом

$$wu^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} = \frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k}$$

Учтем вязкость среды, для чего добавим к тензору энергии-импульса вязкий член, который должен удовлетворять условию $\tau_{ik} u^k = 0$. Это условие получается при определении скорости среды, чтобы в собственной системе отсчета импульс частиц равнялся нулю $u^\alpha = 0, \alpha = 1,...,3$. Значит в другой инерциальной системе отсчета из-за наличия потенциала, частицы образуют поверхность постоянной скорости в каждый момент времени. Для выполнения этого условия диссипативный член равен (дивергенцию скорости вычисляется равной нулю)

$$\tau_{ik} = -c\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} - u_k u^l \frac{\partial u_i}{\partial x^l} - u_i u^l \frac{\partial u_k}{\partial x^l}\right).$$

Скорость c, это фазовая скорость звука, для которой выполняется преобразование Лоренца см. [3]. Это значение тензора напряжения удовлетворяет $\tau_{ik} u^k = \tau_{ip} g^{pk} g_{kq} u^q = \tau_i^k u_k = 0, u^\alpha = 0, \alpha = 1,2,3; \tau_{0i} = 0$. Тогда оператор дифференцирования $-i\lambda \frac{\partial}{\partial x^k} = 0, \lambda = \frac{\hbar}{mc}$ определяет скорость частицы, и значит $-i\tau_i^k \lambda \frac{\partial \ln\psi}{\partial x^k} = \tau_i^k u_k = 0$, и так как доказано далее в результате вычислений, что выражение $\frac{\partial \tau_i^k}{\partial x^k} = 0$ равно нулю, значит оператор тензора напряжений коммутирует с оператором импульса. Решением уравнения (1) является постоянное, комплексное значение скорости вдоль траектории. Окажется, равна нулю $\frac{du_{k`}}{ds} = -i\lambda \frac{d}{ds}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x^k} = 0$, что может быть расписано с помощью волновой функции.

Докажем равенство нулю производной по координате тензора диссипативных напряжений. Тогда тензор энергии-импульса равен $T_i^k = wu_i u^k - p\delta_i^k + \tau_i^k$. Подстановка этого члена в уравнение (1), приведет к следующей формуле

$$wu^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} = (\delta_i^k - u_i u^k)[\frac{\partial p}{\partial x^k} + c\eta(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^p \partial x_p} - 2u^p \frac{\partial u^q}{\partial x^p}\frac{\partial u_k}{\partial x^q} - u^p u^q \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^p \partial x^q})] =$$

$$= \rho(g_{ik} - u_i u_k)[\frac{\partial U}{m \partial x_k} + c\nu(\frac{\partial^2 u^k}{\partial x^p \partial x_p} - 2u^p \frac{\partial u^q}{\partial x^p}\frac{\partial u^k}{\partial x^q} - u^p u^q \frac{\partial^2 u^k}{\partial x^p \partial x^q})]$$

Величина тепловой функции равна, где по аналогии с выводом уравнения Шредингера из нерелятивистского уравнения Навье-Стокса имеем связь между давлением и потенциалом $p/\rho = U/m$ см. [2] стр. 4

$$\begin{aligned} w = e + p = p + \frac{\rho c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \\ = \rho U/m + \rho c^2 \sqrt{1 + \sum_{l=1}^{3} u_l^2} \end{aligned}.$$

Плотность среды сокращается, и уравнение имеет вид

$$(U/m + c^2\sqrt{1+\sum_{l=1}^{3} u_l^2})u^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} =$$

$$= (g_{ik} - u_i u_k)[\frac{\partial U}{m\partial x_k} + c\nu(\frac{d^2u^k}{ds^2}u^p u_p - 2u^p \frac{du^q}{ds}\frac{du^k}{ds}u_p u_q - u^p u^q \frac{d^2u^k}{ds^2}u_p u_q)] =$$

$$= (g_{ik} - u_i u_k)\frac{dU}{mds}u^k;$$

$$0 = \frac{d[(u^0)^2 - \sum_{l=1}^{3}(u^l)^2]}{ds} = u_0\frac{du^0}{ds} + \sum_{l=1}^{3} u_l \frac{du^l}{ds} = \sum_{q=0}^{3} u_q \frac{du^q}{ds} = 0$$

При обнулении члена $2u^p \frac{du^q}{ds}\frac{du^k}{ds}u_p u_q$ воспользовались соотношением $\sum_{q=0}^{3} u_q \frac{du^q}{ds} = \sum_{q=0}^{3} u_q \frac{\partial u^q}{\partial x^k}u^k = 0$. Формула получена вдоль направления $u_l = \frac{dx_l}{ds}$. Где воспользовались формулой $\frac{\partial s}{\partial x^p} = \frac{\partial\sqrt{g_{pq}dx^p dx^q}}{\partial x^p} = \frac{(g_{pq} + g_{qp})dx^q}{2ds} = u_p$.

Окончательный вид дифференциального уравнения

$$(U/m + c^2\sqrt{1+\sum_{l=1}^{3} u_l^2})\frac{du_i}{ds} = (g_{ik} - u_i u_k)\frac{dU}{mds}u^k = 0$$

Докажем, что второй диссипативный член равен нулю $\frac{\partial u^l}{\partial x^l} = \frac{du^l}{ds}u_l = u^k \frac{\partial u^l}{\partial x^k}u_l = 0$ вдоль траектории движения, т.е. дивергенция четырех вектора равна нулю, вдоль траектории движения.

Вдоль направления $u_l = \frac{dx_l}{ds}$ четырехмерная комплексная скорость частиц равна константе. Волновая функция определится из уравнения $u_l = -i\lambda\!\!\!^{-} \frac{\partial \ln\psi}{\partial x^l}$.

Откуда получаем значение волновой функции $\psi = \exp(iu_l u^l s/\lambda\!\!\!^{-}) = \exp(is/\lambda\!\!\!^{-}) = \exp(i\sqrt{c^2 - V^2}t/\lambda\!\!\!^{-}), E = mc^2\sqrt{1 - V^2/c^2}$, где метрический интервал комплексный с отрицательной с мнимой частью в случае комплексной скорости частицы. При этом мнимость скорости частицы означает ее вращение, со скоростью, равной мнимой части.

Необходимо определить квадрат скорости частицы. Сделать это можно не используя квантовые уравнения движения. Для этого воспользуемся непосредственно равенством нулю производной от метрического тензора, получим уравнение см. [1]

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = u_i \frac{\partial w u^k}{\partial x^k} + w u_k \frac{\partial u^i}{\partial x^k} - \frac{\partial p}{\partial x^i} = c\eta(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^p \partial x_p} - u^p u^q \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^p \partial x^q}) = 0$$

Опущены члены в правой части вида $\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\frac{\partial u^k}{\partial x^p} = u_k \frac{du^i}{ds}\frac{\partial u^k}{\partial x^p} = 0$, получается, что диссипативные члены равны нулю. Преобразуем левую часть равенства

$$u_i \frac{dw}{ds} + w\frac{du^i}{ds} = \frac{dp}{ds} u_i .$$

Умножаем пространственную часть скорости на величину u_i и суммируем по трем индексам, получим

$$u^2 \frac{dw}{ds} + w\frac{du^2}{2ds} = \frac{dp}{ds} u^2 ; u^2 = \sum_{l=1}^{3} u_l^2 .$$

Делим обе части этого равенства на величину wu^2, получаем

$$\frac{d \ln wu}{ds} = \frac{dp}{wds}; w = \frac{\rho U}{m} + \rho c^2 \sqrt{1+u^2}, p = \frac{\rho U}{m}.$$

Аналогичное уравнение получается для одной из компонент, при двух других, равных нулю. К сожалению, определить направление скорости не удается, можно определить только ее трехмерный комплексный квадрат. Это соответствует квантовому соотношению неопределенности.

Интегрируем правую часть этого равенства, получим соотношение, с точностью до аргумента в правой части (2)

$$(\frac{\rho U}{m}+\rho c^2\sqrt{1+u^2})u\alpha(u)=\exp(\frac{\frac{\rho U}{m}}{\frac{\rho U}{m}+\rho c^2\sqrt{1+u^2}}) \qquad (2)$$

Этот интеграл зависит от произвольной константы $\alpha(u)$, так как на каждой траектории величина скорости является константой. Величина правой части содержит особенность $\exp(\frac{1}{x})$, Величина левой части особенность x. Для их компенсации необходимо значение функции $\alpha(u)$, равное

$$\alpha(u)=-\frac{\exp[\frac{U}{mc^2(u+\sqrt{U^2/m^2c^4-1})}]}{(u+\sqrt{U^2/m^2c^4-1})\rho c^2\sqrt{U^2/m^2c^4-1}}.$$

При этом решение уравнения

$$\ln\frac{[\frac{U}{mc^2}+\sqrt{1+u_n^2(\varphi)}]u_n(\varphi)}{-i[u_n(\varphi)+i\sqrt{1-\frac{U^2}{m^2c^4}}]\sqrt{1-\frac{U^2}{m^2c^4}}}=i\varphi= \qquad (3)$$

$$=\frac{U/mc^2}{U/mc^2+\sqrt{1+u^2}}-\frac{U}{mc^2(u+i\sqrt{1-\frac{U^2}{m^2c^4}})}$$

Тогда в точке $u=-i\sqrt{1-U^2/m^2c^4}$, будет реализовано равенство в (2), а для других точек, получим уравнение $u=u_n[U(t,x,y,z)]$, которое будет иметь множество ветвей решения. В самом деле для каждого значения n и фиксированного U существуют значения функции $u=u_n(\varphi)$. Для каждого значения U, n существуют точки пересечения правых и левых частей уравнения (3). Квадратное уравнение по определению зависимости от угла φ

$$i\varphi=\frac{U/mc^2}{U/mc^2+\sqrt{1+u^2}}-\frac{U}{mc^2(u+i\sqrt{1-\frac{U^2}{m^2c^4}})} \qquad (4)$$

Решая это уравнение определим зависимость $|u|=|u(\varphi)|>1$, в случае $|U|>>mc^2$ корень уравнения (4) равен $u=-\frac{U}{2mc^2}\pm(\frac{U}{2mc^2}-\frac{mc^2}{U\varphi})=-\frac{U}{mc^2}+\frac{imc^2}{U\varphi})$. Эта оценка энергии вполне реалистичная, так используется фазовая скорость звука. Тогда имеем уравнение

$$\frac{[\frac{U}{mc^2}+\sqrt{1+u_n^2(\varphi)}]u_n(\varphi)}{-i[u_n(\varphi)+i\sqrt{1-\frac{U^2}{m^2c^4}}]\sqrt{1-\frac{U^2}{m^2c^4}}}=4(\frac{U}{mc^2})^2=\exp(i\varphi);\varphi=2\pi n-2i\ln\frac{2U}{mc^2}$$

Откуда имеем $u_n=-\frac{U}{mc^2}+\frac{imc^2}{U[2\pi n-2i\ln\frac{2U}{mc^2}+O(1/n)+O(U/mc^2)]}$.

Решим уравнение (4) определим зависимость $u=u(\varphi)=\pm i$, в случае $|U|<<mc^2$ корень уравнения (4) равен $u=-i(1-\frac{U}{mc^2\varphi})$. Тогда имеем уравнение

$$\frac{[\frac{U}{mc^2}+\sqrt{1+u_n^2(\varphi)}]u_n(\varphi)}{i[u_n(\varphi)+i\sqrt{1-\frac{U^2}{m^2c^4}}]\sqrt{1-\frac{U^2}{m^2c^4}}}=\exp(i\pi/2)(1+i\sqrt{\frac{2\pi nmc^2}{U}})(1-\frac{3U}{2\pi nmc^2})=\exp(i\varphi);$$

$$\varphi=2\pi n-\pi/2-i\ln(1+\sqrt{\frac{2\pi nmc^2}{-U}})+O(1/n)+O(U/mc^2)$$

Имеем асимптотику скорости

$$u_n = -i\{1 + \frac{U}{mc^2[2\pi n - \pi/2 - i\ln(1+\sqrt{\frac{2\pi nmc^2}{-U}}) + O(1/n) + O(U/mc^2)]}\}.$$

Данная асимптотика не противоречива, так как скорость равна единице по модулю, как и предполагалось.

Итак, при большой по модулю потенциальной энергии имеем большую действительную с малой мнимой частью скорость движения, а значит поступательную скорость

$$u_n = -\frac{U}{mc^2} + \frac{imc^2}{U[2\pi n - 2i\ln\frac{2U}{mc^2} + O(1/n) + O(U/mc^2)]}$$

При малой по модулю потенциальной энергии имеем асимптотику мнимой сравнимой с единицей скоростью движения, а значит вращательную скорость со скоростью, больше скорости звука, что описывает спин электрона

$$u_n = -i\{1 + \frac{U}{mc^2[2\pi n - \pi/2 - i\ln(1+\sqrt{\frac{2\pi nmc^2}{-U}}) + O(1/n) + O(U/mc^2)]}\}.$$

Причем при нулевом потенциале, трехмерная скорость равна бесконечности и чисто мнимая, т.е. описывает чистое вращение электрона с бесконечной вычисленной энергией по формуле (5). Скорость вращения электрона много больше фазовой скорости звука, он вращается со световой скоростью.

Мнимая часть скорости частицы описывает вращение частицы, значит проекцию момента импульса. Одновременно по комплексной скорости частицы можно определить ее энергию. Можно определить модуль момента импульса, но не все три компоненты момента импульса. Задавая действительную и мнимую часть комплексной скорости частицы можно определить комплексную трехмерную поверхность постоянства скорости частиц среды. Но определенной скорости частицы соответствует поверхность в трехмерном комплексном пространстве. Модуль действительной части импульса и мнимая вращательная скорость тоже определена, но их координаты и направления не известны, они находятся на определяемой поверхности. Определены перпендикулярные этой поверхности координаты, но перпендикулярные этой поверхности импульсы не определены. На самом деле в классической механике скорость в произвольном потенциальном поле имеет три определяемые компоненты. Но из-за квантовых эффектов, можно определить только скорость и вращение на поверхности, не зная ничего об перпендикулярной поверхности компоненте скорости. Зато определяется проекция момента импульса, как мнимая часть скорости частицы.

Усредняя величину

$$E_n = mc^2 < \sqrt{1 - V_n^2 / c^4} >= mc^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-2\,\mathrm{Im}\dfrac{mc^2 t/\hbar}{\sqrt{1+u_n^2[U(x,y,z)]}})}{\sqrt{1+u_n^2[U(x,y,z)]}} dxdydz / \qquad (5)$$

$$/ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\,\mathrm{Im}\frac{mc^2 t/\hbar}{\sqrt{1+u_n^2[U(x,y,z)]}}) dxdydz$$

Получим среднюю энергию системы с произвольным потенциалом.

Для большого потенциала подынтегральная функция равна

$$\frac{\exp[-\mathrm{Im}\dfrac{mc^2 t/\hbar}{\sqrt{1+(\dfrac{U}{mc^2}-\dfrac{imc^2}{2\pi mU})^2}}]}{\sqrt{1+(\dfrac{U}{mc^2}-\dfrac{imc^2}{2\pi mU})^2}}; n >> 1; |U/mc^2| >> 1 \cdot$$

Так как в данной формуле используется фазовая скорость звука, время затухания велико.

Интеграл от этой функции конечен, причем мнимая часть в экспоненте минимальная. В случае малых энергий, имеем подынтегральную функцию

$$\frac{\sqrt{mc^2(2\pi n-\pi/2)}}{\sqrt{-U}};n>>1;|U/mc^2|<<1$$

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика, т.VI, М.-, «Наука», 1988г.,
2. Якубовский Е.Г. Физический смысл уравнений квантовой механики, электродинамики и уравнения ОТО с учетом кристаллической структуры элементарных частиц. «Энциклопедический фонд России», 2016, 70 стр. http://russika.ru/sa.php?s=1030
3. Якубовский Е.Г. По поводу преобразований Лоренца, «Энциклопедический фонд России», 2016, 70 стр. http://russika.ru/sa.php?s=1227