Возможный вариант уравнения Дирака для анизотропного пространства

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

В уравнении Дирака используется матрица Дирака, по имеется проблема с ее вычислением в случае произвольного метрического тензора. Переопределим эту матрицу, получая из уравнения Дирака уравнение Клейна-Гордона. Возможные приложение этой теории для описания анизотропного кристалла с постоянным метрическим тензором. Фонон описывается уравнением квантовой механики. аналогично и анизотропный кристалл описывается уравнением Дирака. Спин при этом получается произвольный.

Уравнения Дирака запишем в виде

$$\begin{aligned} \widehat{p}_\mu \gamma^\mu_{ik} \psi_k &= m\psi_i \\ \widehat{p}_\nu (\gamma^\nu_{ni})^{-1} \psi_i &= m\psi_n \end{aligned}.$$

Подействуем на первое уравнение оператором $\widehat{p}_\nu (\gamma^\nu_{ni})^{-1}$, получим

$$\widehat{p}_\nu \widehat{p}_\mu (\gamma^\nu_{ni})^{-1} \gamma^\mu_{ik} \psi_k = m\widehat{p}_\nu (\gamma^\nu_{ni})^{-1} \psi_i = m^2 \psi_n.$$

Матрицы Дирака определим из условия

$$(\gamma^\nu_{ni})^{-1} \gamma^\mu_{ik} = g^{\mu\nu} \delta_{nk}$$

Умножим обе части на величину $\gamma_{mn\nu}$ и просуммируем по индексам ν, n, получим тождество

$$\gamma^\mu_{mk} = g^{\mu\nu} \delta_{nk} \gamma_{mn\nu} = \gamma^\mu_{mk}$$

Значит имеем уравнение Клейна-Гордона в декартовых координатах

$$g^{\nu\mu} \widehat{p}_\nu \widehat{p}_\mu \psi_n = m^2 \psi_n.$$

Возможно обобщение на произвольный метрический тензор состоящий из констант

$$\lambda_\mu (\delta^\nu_{ni})^{-1} \gamma^\mu_{ik} = g^{\mu\nu} U_{nk} .$$

Но тогда возникает связь

$$\lambda_\mu \gamma^\mu_{mk} = g^{\mu\nu} \delta_{mn\nu} U_{nk} = \delta^\mu_{mn} U_{nk} .$$

Можно добиться равенства матриц Дирака. Тогда возникнет задача на собственные значения

$$\begin{gathered} \gamma^\mu_{mn} (U_{nk} - \lambda_\mu \delta_{nk}) = 0 \\ | U_{nk} - \lambda_\mu \delta_{nk} | = 0 \end{gathered} .$$

Но в определении матриц Дирака имеется произвол с точностью до множителя c^μ_m, но собственное число определится однозначно. Разный постоянный метрический тензор определяет разные энергии системы.

Уравнения Дирака запишутся в виде

$$\begin{gathered} \widehat{p}_\mu \lambda_\mu \gamma^\mu_{ik} \psi_k = m \psi_i \\ \widehat{p}_\nu (\gamma^\nu_{ni})^{-1} \psi_i = m \psi_n \end{gathered} .$$

Уравнения Клейна-Гордона имеют вид

$$g^{\nu\mu} \widehat{p}_\nu \widehat{p}_\mu U_{nk} \psi_k = m^2 \psi_n .$$

Значит уравнение Клейна-Гордона описывает и спиноры. Уравнение Клейна-Гордона описывает спин, равный целому числу. Извлекая корень из оператора левой части уравнения Клейна-Гордона получаем спин, равный ½. Полученные уравнения имеют общий вид и описывают произвольный спин. Сделаем предположение, что они описывают спин, равный половине собственного числа. Тогда все 4 компоненты волновой функции описывают разный спин. Причем спин зависит от метрического тензора. Наличие разных спинов может возникнуть при описании кристаллической структуры твердого тела см. [1] стр. 57. Получим аналог уравнения Дирака в твердом теле для звуковых волн. Это аналогично описанию фононов в твердом теле с помощью уравнений квантовой механики.

Литература

1. Якубовский Е.Г. По поводу преобразований Лоренца. «Энциклопедический фонд России», 2017, 62стр. http://russika.ru/sa.php?s=1227 scholar.google