

Определение скорости звука квазичастиц

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Аннотация

Вычислено отношение скорости нулевой фазы ферми жидкости к обычной скорости звука. Уточнено значение этого отношения. На этой основе вычислена скорость звука разных состояний квазичастиц как для бозонов, так и для фермионов. Оказалось, что отношение скорости нулевой фазы к обычной скорости жидкости у ферми и бозе жидкостей отличаются на малую величину.

Формула для энергии квазичастиц и их свойства

Энергия Бозе – системы или Ферми - системы равна

$$E = \frac{\varepsilon}{\exp(\varepsilon/T) \pm 1}.$$

Покажем, что при низких температурах эта функция имеет минимум.

$\frac{dE}{d\varepsilon} = \frac{1}{\exp(\varepsilon/T) - 1} \left[1 - \frac{\varepsilon/T}{\exp(\varepsilon/T) \pm 1} \right] = 0$. При высоких температурах эта

функция не имеет корней. Но при низких температурах имеем уравнение

$x = \exp(x) \pm 1$ и имеется комплексный корень $x + 2\pi i n = \exp x \pm 1$, который

вычисляется по рекуррентной схеме $x_{n+1} = \ln(\mp 1 + 2\pi i n + x_n)$. Так как

комплексная энергия имеет смысл только при квантовых эффектах, этот

корень существует только при низких температурах. Причем имеется счетное

количество корней $\frac{\varepsilon_n}{T} \cong \ln(1 + 4\pi^2 n^2)/2 + i \arg(\mp 1 + 2\pi i n)$.

При этом можно определить скорость жидкости, соответствующую разным фазам по формуле для фермионов

$$\frac{c_{s0}}{c_{sn}} = 1 + 2 \sum_{k=-n}^n \operatorname{Re} \frac{\varepsilon_k / T}{\exp(\varepsilon_k / T) + 1}; x_k = \frac{\varepsilon_k}{T} = \frac{mc_s^2}{T \sqrt{1 - V_k^2 / c_s^2}};$$

$$x_k = \ln(-1 + x_k - 2\pi ik); \Sigma = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\varepsilon_k / T}{\exp(\varepsilon_k / T) + 1} + \frac{\varepsilon_k^* / T}{\exp(\varepsilon_k^* / T) + 1} \right].$$

$$\frac{c_{s0}}{c_{s\infty}} = 1 + \Sigma = 1.693$$

Где величина $c_{s0} = \frac{P_F}{m^*}$. Причем справедливо приближенное соотношение

$$\frac{c_{s0}}{c_{s\infty}} \approx \sqrt{3} = 1.732. \text{ Была составлена Mathcad программа по вычислению}$$

отношения $\frac{c_{s0}}{c_{sn}}$. Оказалось, что величина отношения равна $\frac{c_{s0}}{c_{s\infty}} = 1.693$.

Сумма, определяющая энергию частицы, образует сходящийся ряд в случае суммирования с отрицательными индексами вида

$$\frac{\varepsilon_k / T}{\exp(\varepsilon_k / T) \pm 1} + \frac{\varepsilon_k^* / T}{\exp(\varepsilon_k^* / T) \pm 1} = \frac{\ln 2\pi k \mp i\pi / 2}{x_k + 2\pi ki} +$$

$$+ \frac{\ln 2\pi k \pm i\pi / 2}{x_k^* - 2\pi ik} = \frac{\ln 2\pi k \mp i\pi / 2}{\ln 2\pi k + 2\pi(k \mp 1/4)i} + \frac{\ln 2\pi k \pm i\pi / 2}{\ln 2\pi k - 2\pi i(k \mp 1/4)} =$$

$$= \frac{(\ln 2\pi k)^2 \mp \pi^2(k \mp 1/4)}{[2\pi(k \mp 1/4)]^2 + (\ln 2\pi k)^2}$$

Сложим теперь расходящиеся члены с положительным и отрицательным индексом

$$\frac{\pi^2(k - 1/4)}{[4\pi(k - 1/4)]^2} - \frac{\pi^2(k + 1/4)}{[4\pi(k + 1/4)]^2}$$

Получим сходящуюся сумму. Разность двух расходящихся одинаковым образом рядов равна константе. Разница между суммами ферми и бозе распределения равна нулю.

Доказано, что сумма комплексно сопряженных положительных и отрицательных индексов образует сходящийся ряд.

Приведем таблицу вычисленных значений скорости для разных состояний жидкости в случае фермионов

n	10000	9000	8000	6000	4000	2000	0
c_{s0}/c_{sn}	1.693	1.627	1.56	1.415	1.29	1.147	1

По мере роста квантового числа увеличивается отношения скорости звука квазичастиц и в пределе стремится к 1.693. Образуется нормальная компонента скорости звука.

Совершенно аналогичная картина для скорости квазичастиц, образованных бозонами. При бесконечном квантовом числе образуется отношение скорости звука при нуле температур к нормальной компоненте скорости звука, при этом имеем формулу

$$\frac{c_{s0}}{c_{sn}} = 1 + 2 \sum_{k=-n}^n \operatorname{Re} \frac{\varepsilon_k / T}{\exp(\varepsilon_k / T) - 1}; x_k = \frac{\varepsilon_k}{T} = \frac{mc_s^2}{T \sqrt{1 - V_k^2 / c_s^2}};$$

$$x_k = \ln(1 + x_k - 2\pi i k); \Sigma = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\varepsilon_k / T}{\exp(\varepsilon_k / T) - 1} + \frac{\varepsilon_k^* / T}{\exp(\varepsilon_k^* / T) - 1} \right].$$

$$\frac{c_{s0}}{c_{s\infty}} = 1 + \Sigma = 1.693$$

Величина $\sum_{k=-n}^n \operatorname{Re} \frac{\varepsilon_k / T}{[\exp(\varepsilon_k / T) - 1]}$ определяет сходящийся ряд с

действительной скоростью. Величина $c_{s0} = \left(\frac{4\pi\hbar^2 aN}{m^2 V} \right)^{1/2}$, где a длина

рассеяния Бозе частиц, нормальная скорость звука величина известная.

Таким образом можно определить скорость звука квазичастиц, являющихся бозонами. Приведем результаты вычислений скорости звука в случае бозонов

и	10^6	$0.98 \cdot 10^6$	$0.92 \cdot 10^6$	$6.8 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^5$	0
c_{s0}/c_{sn}	1.693	1.667	1.586	1.26	1.147	1

Предел отношения $c_{s0}/c_{s\infty} = 1.693$ для бозонов и фермионов оказался одинаков. Это произошло из-за симметричных точек экстремума для фермионов и бозонов. Разность между этими значениями у бозонов и фермионов асимптотически равна нулю.

Но как же описать сверхтекучесть ферми жидкости. Энергия основного состояния у ферми жидкости не нулевая, и основное состояние не проявляет сверхтекучие свойства. Надо учесть, что образуются куперовские пары, подчиняющиеся статистики бозонов. При этом образуются частиц по схеме $x_n = \ln(-1 + 2 \operatorname{Re} x_n - 2\pi i n)$, но энергию ферми частиц надо определять по формуле $\frac{\varepsilon_n + \varepsilon_n^*}{\exp(\varepsilon_n/T) + 1}$. При этом $x_0 = i\pi$ и собственная энергия нулевого состояния куперовской пары нулевая, и она образует нулевую вязкость.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теоретическая физика т. IX, Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Статическая физика, часть II, Теория конденсированного состояния М.: Наука, 1978, 448 стр.