

## Скалярное произведение в квантовой механике

без знака комплексного сопряжения

Якубовский Е.Г.

e-mail [yakubovski@rambler.ru](mailto:yakubovski@rambler.ru)

*Квантовая механика оперирует с действительным пространством, причем все измеряемые собственные величины являются действительными. Но оказывается, что среди этих действительных собственных значений эрмитовых операторов имеются комплексные значения. В действительном пространстве собственные значения квантовых операторов импульса, энергии действительны. В статье приведены примеры, когда энергия является комплексной, что указывает на комплексность пространства микромира. Но возникает проблема скалярного произведения, которое без учета комплексно сопряженных членов определить сложно. Но вводя «обратную» функцию, это можно сделать.*

*Ключевые слова: комплексное пространство, несамосопряженный оператор, уравнения квантовой механики*

Quantum mechanics in a complex space.

Yakubovski EG

e-mail [yakubovski@rambler.ru](mailto:yakubovski@rambler.ru)

Quantum mechanics deals with the real space, all measured own values are valid. But it turns out that among the real eigenvalues of Hermitian operators are complex values. In real space the eigenvalues of quantum operators of energy is real value. The article gives examples of where energy and momentum are complex values.

Keywords: complex space, nonselfadjoint operator equation, quantum mechanic

### 1. Описание необходимости комплексного пространства

Покажем, что собственное значение энергии может быть комплексным. Так для ямы постоянной глубины  $U_0$  размером  $a$ , см. задачу в [1] к параграфу §22.

Вне ямы решение имеет вид  $\psi_n = b \exp(\pm \chi_n x)$ ,  $\chi_n = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E_n)}$ . Внутри ямы решение ищем в виде  $\psi_n = c \sin(k_n x + \delta)$ ,  $k_n = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}$ .

Условие непрерывности волновых функций  $\psi'_n / \psi_n$  на границе ямы, определяет в неявном виде значение энергии

$$k_n a = n\pi - 2 \arcsin \frac{k_n \hbar}{\sqrt{2mU_0}}$$

Откуда определится действительное и комплексное значение энергии  $E_n$  во всем пространстве. Комплексное значение  $E_n$  получается при значении аргумента у арксинуса больше единицы. При комплексной энергии образуются квазистационарные состояния с комплексной волновой функцией. Это состояние продлится не долго, частица перейдет на действительные уровни энергии. При этом затухание вне стационарной ямы сохранится, внутри стационарной ямы волновая функция равна

$$\begin{aligned} \psi_n &= c [\sin(\operatorname{Re} k_n x + \delta) \cosh(\operatorname{Im} k_n x) + i \cos(\operatorname{Re} k_n x + \delta) \sinh(\operatorname{Im} k_n x)] = \\ &= c \sqrt{\sin^2(\operatorname{Re} k_n x + \delta) + \sinh^2(\operatorname{Im} k_n x)} \exp(i\varphi), 0 < x < a \end{aligned}$$

Чем же это объясняется? Дело в том, что модель действительного пространства для объяснения всех эффектов квантовой механики не достаточна. Возникают комплексные собственные значения. Значит надо строить модель квантовой механики в комплексном пространстве. При этом операторы импульса во всем комплексном пространстве не будут эрмитовы. Докажем, что оператор импульса не эрмитов в комплексном пространстве. Он

равен  $\hat{p}_x \psi = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}$ , для чего вычислим скалярное произведение, оно окажется

равным в случае действительного пространства

$$\langle \varphi | \hat{p}_x \psi \rangle = \int \varphi^* \hat{p}_x \psi dx dy dz = -i\hbar \int \varphi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy dz = i\hbar \int \psi \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} dx dy dz$$

$$\langle \hat{p}_x \varphi | \psi \rangle = \int [-i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial x}]^* \psi dx dy dz = i\hbar \int \psi \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} dx dy dz$$

Если пространство действительно, то получим равенство скалярных произведений, и значит оператор импульса эрмитов. Но если пространство комплексное, то равенства выражений не будет и оператор импульса будет не эрмитов. Аналогичное доказательство можно реализовать оператора координаты  $\hat{x}G = xG = i\hbar \frac{\partial G}{\partial p_x}$  в импульсном представлении. Оказывается, в комплексном пространстве операторы, импульса и координаты являются операторами симметричными и антисимметричными, и не являются эрмитовыми.

Для оператора энергии в [1]§8 доказывается, что справедливо равенство  $\int \psi^* (\hat{H}^{*T} - \hat{H}) \psi dx dy dz = 0$ , для произвольных функций  $\psi$ . Но в комплексном пространстве  $\hat{H}^{*T} = -\frac{\partial}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial}{\partial y^{*2}} - \frac{\partial}{\partial z^{*2}} + U \neq \hat{H} = -\frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial z^2} + U$ , таким образом определенный гамильтониан не является эрмитовым в комплексном пространстве, а является эрмитовым в действительном пространстве. Т.е. оператор  $\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$  в комплексном пространстве не является эрмитовым.

Определение энергии комплексной во втором примере, говорит о том, что действительное пространство не описывает все свойства квантовой механики, и надо строить квантовую механику в комплексном пространстве.

При этом операторы энергии, и времени являются симметричными, а операторы импульса и координаты антисимметричны. При этом скалярное произведение нужно использовать без использования комплексного сопряжения. Доказательство аналогично доказательству эрмитовости операторов в действительном пространстве, только вместо эрмитова сопряжения нужно использовать транспонирование и доказательство

антисимметричности операторов проходит и в комплексном пространстве. Это позволяет для этих операторов построить ортонормированный базис для симметричных и антисимметричных операторов. Докажем это. Пусть у симметричной матрицы имеется два собственных значения и собственных вектора

$$\begin{aligned} a_{ik} g_{k\alpha} &= \lambda_{\alpha} g_{i\alpha} \\ a_{ik} g_{k\beta} &= \lambda_{\beta} g_{i\beta} \end{aligned}$$

Умножим первое из этих равенств на величину  $g_{\beta i}$ , а второе равенство на величину  $g_{\alpha i}$ , получим

$$\begin{aligned} g_{\beta i} a_{ik} g_{k\alpha} &= \lambda_{\alpha} g_{\beta i} g_{i\alpha} \\ g_{\alpha i} a_{ik} g_{k\beta} &= \lambda_{\beta} g_{\alpha i} g_{i\beta} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Транспонируем второе равенство (1.1), получим

$$g_{\beta k} a_{ik}^T g_{i\alpha} = \lambda_{\beta} g_{\beta i} g_{i\alpha} \quad (1.2)$$

В случае симметричного оператора имеем  $a_{ki} = a_{ik}^T$  и имеем одинаковые выражения в левой части первого уравнения (1.1) и (1.2). Вычитаем из первого уравнения (1.1) уравнение (1.2), получим

$$(\lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta}) g_{\beta i} g_{i\alpha} = 0.$$

Значит собственные векторы, соответствующие разным собственным числам симметричного оператора ортогональны. При этом ортонормированные собственные векторы образуют базис

$$\mathbf{e}_{\alpha} = \frac{g_{i\alpha}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N g_{\alpha k}^2}} = \frac{g_{i\alpha}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N g_{\alpha k} g_{k\alpha}^{-1} c_{\alpha}}} = \frac{g_{i\alpha}}{\sqrt{c_{\alpha}}}; c_{\alpha} = \sum_{k=1}^N g_{\alpha k}^2 \neq 0. \text{ Собственное значение в}$$

случае дискретного спектра не зависит от нормы собственного вектора. В самом деле, из равенства  $A_{ik} g_{k\alpha} = \lambda_{\alpha} g_{i\alpha}$  следует значение собственного числа

$\lambda_{\alpha} = g_{\alpha i}^{-1} A_{ik} g_{k\alpha}$  вне зависимости от значения нормы собственного вектора. В

случае  $A_{ik} = A_{ki}$  собственные векторы ортогональны, и значит,

$g_{\alpha i}^{-1} c_{\alpha} = g_{i\alpha}, c_{\alpha} \neq 0$ . Отметим, что в случае симметричного или

антисимметричного оператора можно построить ортогональный базис, а в случае оператора общего вида собственные векторы могут быть не ортогональны, но собственное число все равно можно определить, используя обратную матрицу.

В случае непрерывного спектра  $\int K_{nm}(x, y)\psi_m(y)dx = \lambda\psi_n$ , задачу можно свести к дискретному спектру с помощью преобразования

$$\psi_n^{-1}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\psi_k(y), \text{ где } \psi_k(y) \text{ это собственные функций, а величина } \psi_n^{-1}(y)$$

это «обратная» функция. Умножим это уравнение на величину  $\psi_m(y)$  и проинтегрируем по  $y$ . В силу определения «обратной» функции имеем

$$\delta_{nm} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}(\psi_k(y), \psi_m(y)) \text{ Причем использовать скалярное произведение без}$$

знака комплексного сопряжения. Коэффициенты  $a_{nk}$  определяются из формул

$$a_{nk} = (\psi_n(y), \psi_k(y))^{-1}, \text{ матрица, обратная к матрице } (\psi_k(y), \psi_m(y)) \text{ существует,}$$

в силу независимости функций ее образующих. Итак, «обратная» функция

$$\text{равна } \psi_n^{-1} = (\psi_n(y), \psi_k(y))^{-1}\psi_k(y)$$

В случае антисимметричного оператора получим  $(\lambda_\alpha + \lambda_\beta)g_{\beta i}g_{i\alpha} = 0$ , откуда следует ортогональность собственных векторов при условии  $\lambda_\alpha \neq -\lambda_\beta$ .

Определим физический смысл корня из квадрата наблюдаемой в комплексном пространстве

$$\begin{aligned} \langle |x - \langle x \rangle|^2 \rangle^* \langle |x - \langle x \rangle|^2 \rangle &= \int_{V^*} [(x - \langle x \rangle)\psi]^* d^3x \times \\ &\times \int_V (x - \langle x \rangle)^2 \psi^2 d^3x = \int_V x^2 \psi^2 d^3x - \langle x \rangle^2 \int_V \psi^2 d^3x \\ \int_V x^2 \psi^2 d^3x &= \langle x \rangle^2 + \alpha \sqrt{\langle |x - \langle x \rangle|^2 \rangle^* \langle |x - \langle x \rangle|^2 \rangle}, |\alpha| = 1 \end{aligned}$$

Причем при условии  $\arg \langle x \rangle^2 = \arg \alpha$ , имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_V x^2 \psi^2 d^3x \right| &= |\langle x \rangle|^2 + \sqrt{\langle |x - \langle x \rangle|^2 \rangle^* \langle |x - \langle x \rangle|^2 \rangle} = \\ &= |\langle x \rangle + i \sqrt{\langle |x - \langle x \rangle|^2 \rangle^* \langle |x - \langle x \rangle|^2 \rangle} |^2 \end{aligned}$$

Или имеем

$$\sqrt{\int_V x^2 \psi^2 d^3x} = (|\langle x \rangle + i \sqrt{\langle |x - \langle x \rangle|^2 \rangle^* \langle |x - \langle x \rangle|^2 \rangle}) \beta, |\beta| = 1$$

Величина  $\langle x \rangle$  и величина  $\int_V (x\psi)^2 d^3x$  в комплексном пространстве является комплексной. Корень из квадрата наблюдаемого значения координаты величина комплексная, и определяется по формуле, так как величина  $\langle |x - \langle x \rangle|^2 \rangle^* \langle |x - \langle x \rangle|^2 \rangle$  действительна. Причем получается формула при условии  $\beta = 1$

$$\sqrt{\int_V (x\psi)^2 d^3x} = |\langle x \rangle + i \sqrt{\langle |x - \langle x \rangle|^2 \rangle^* \langle |x - \langle x \rangle|^2 \rangle}|. \quad (1.3)$$

Т.е. действительная часть среднего квадрата комплексной величины равна модулю среднего значения величины, а мнимая часть среднеквадратическому отклонению.

Имеется необходимость к переходу в комплексное пространство. Действительные собственные значения энергии, импульса и координаты описывают точечные частицы. Мнимая часть этих параметров описывает распределение в пространстве. При этом рождение и уничтожение частиц происходит в области, равной, по крайней мере, комптоновской длине волны. Значит, параметры частиц должны быть распределенными, т.е. иметь мнимую часть, которая описывает отклонение от среднего значения. Кроме того, большинство процессов в квантовой механике не стационарно. Излучение электромагнитной волны сопровождается переходом с одного собственного состояния на другое собственное состояние. Этот переход описывается мнимой частью комплексной энергии. Каков же физический смысл мнимой части комплексного значения параметра в микромире? Мнимая энергия и импульс

определяют затухание волновой функции по формуле  $\psi = c \exp(i \int_{l=0}^3 p_l dx^l / \hbar)$ .

Комплексный размер системы также определяет затухание ее волновой функции или ее пульсации с амплитудой, равной мнимой части параметра. При этом путь интегрирования по комплексному пространству будет описан ниже по тексту. Комплексное собственное значение импульса локализует частицу вблизи действительного собственного значения. Мнимая часть собственной координаты описывает распределение частицы в пространстве. Собственное значение времени определяется с ошибкой, т.е. с мнимой частью и является комплексным. Мнимая часть собственного значения времени характеризует длительность реакции, или время преодоления барьера. Среднее значение действительного интервала времени описано в статье [2]. Причем пространство в этой статье описано как комплексное.

Кроме того, комплексное пространство без ввода новых членов в уравнение, описывает диссипацию энергии. В действительном пространстве для описания диссипации энергии надо вводить дополнительные константы, что является недостатком теории.

В комплексном пространстве можно удовлетворить аксиомам скалярного произведения, если определить

$$\psi_k^{-1}(y) = \sum_m (\psi_k, \psi_m)^{-1} \psi_m$$

$$\psi = \psi_n$$

Скалярное произведение равно

$$\langle \psi_k^{-1} | \psi_n \rangle = \int \psi_k^{-1}(y) \psi_n(y) d^3 y = \delta_{kn}.$$

Эту нормировку и скалярное произведение назовем «обратным», в отличие от стандартной нормировки и скалярного произведения.

Можно определить скалярное произведение двух функций с помощью формулы

$$\langle f | g \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int f^{-1}(y)(f^{-1}, f)^{-1/2}(g^{-1}, g)^{-1/2} g(y) d^3 y.$$

$$\text{Имеем } \langle f | f \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int f^{-1}(y)(f^{-1}, f)^{-1} f(y) d^3 y = 1.$$

Определим в случае линейной задачи произведение коэффициентов с одинаковым индексом обратной и основной функции равное единице  $\varphi = c_n \varphi_n$ ;  $\varphi^{-1} = d_m \langle \varphi_m \varphi_n \rangle^{-1} \varphi_n = d_m \varphi_m^{-1}$ . В результате вычислений получим  $d_m = 1/c_m$ . Умножая равенство  $d_n \varphi_n^{-1} = \varphi^{-1}$  на величину  $\varphi_m$  получим

$$d_m = (\varphi^{-1}, \varphi_m).$$

Определим коэффициент обратной функции в случае линейной задачи с помощью соотношения

$$d_n^{-1} = (\varphi, \varphi_n^{-1}). \quad (1.4)$$

Умножая равенство  $c_n \varphi_n = \varphi$  на величину  $\varphi_m^{-1}$  получим

$$c_m = (\varphi, \varphi_m^{-1}).$$

Справедливо решение

$$c_n = (\varphi, \varphi_n^{-1}) = d_n^{-1} \quad (1.5)$$

Справедливо полученное из (1.5)  $c_n = 1/d_n$ .

Скалярное произведение обратной функции на основную определяется по формуле в случае если волновая функция не тождественный ноль

$$(f^{-1}, f) = \int f^{-1} f d^3 y = \int \sum_{n,m,k=1}^N c_n^{-1} (\psi_n, \psi_m)^{-1} \psi_m c_k \psi_k d^3 y = N$$

Среднее считается по формуле

$$\langle f | A | f \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} (f^{-1}, f)^{-1} \int f^{-1}(y) A(y) f(y) d^3 y = \lim_{N \rightarrow \infty} A(f^{-1}, f) / N = A.$$



Скалярное произведение двух функций равно

$$\langle f | g \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int f^{-1}(y) g(y) d^3 y / N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N c_n^{-1} d_n / N$$

$$f^{-1}(y) = \sum_n c_n^{-1} \psi_n^{-1}(y); g(y) = \sum_n d_n \psi_n(y)$$

Где справедливо  $\langle f | f \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N c_n^{-1} c_n / N = 1$ .

Средние параметры определяются по формуле

$$\langle f_n | A | f_n \rangle = \int f_n^{-1}(y) A(y) f_n(y) d^3 y.$$

Где нормировка осуществляется автоматически.

Переход в комплексное пространство не меняет значение энергии для атома водорода и гармонического осциллятора, так как вычисленное значение энергии действительно при действительных волновых функциях для симметричного или антисимметричного оператора, и «обратная» функция совпадает с транспонированной, так как  $(\psi_n(y), \psi_m(y)) = \delta_{nm}$ , следовательно, определение собственных значений не меняется и «обратная» собственная функция равна основной функции в случае симметричного или антисимметричного оператора и результате получается квадрат волновой функции без знака комплексного сопряжения.

Рассмотрим две комплексные ортонормированные системы функций  $\psi'_n, \psi_m$  в случае симметричного или антисимметричного оператора. Они связаны друг с другом некоторым линейным преобразованием  $\psi'_n = S_{nm} \psi_m$ . Это преобразование можно записать в операторном виде  $\psi'_n = \hat{S} \psi_n$ . Вычислим скалярное произведение двух функций

$$\int \psi'_n \psi'_m d^3 x = \int (S \psi_n)(S \psi_m) d^3 x = \int (\psi_m S^T S \psi_n) d^3 x = \delta_{nm}.$$

Где под интегралом перешли к транспонированному оператору. Последнее равенство возможно, только если выполняется  $S^T S = E, S^T = S^{-1}$ .

Докажем это свойство для преобразования векторов с помощью матриц

$$(\psi'_n, \psi'_m) = S_{np} S_{mq} (\psi_p, \psi_q) = S_{np} S_{mq} \delta_{pq} = S_{np} S_{pm}^T = \delta_{nm}, S_{pm}^T = S_{pm}^{-1}.$$

Т.е. матрицы преобразования с инвариантным скалярным произведением не унитарны, а «обратная» матрица в этом случае равняется только транспонированной, без перехода к комплексно сопряженному значению, как в случае унитарной матрицы.

В случае свободного поля нормировка определяется по формуле  $\int \exp[2i(-Et + p_l x_l)] (\exp[i(-Et + p_l x_l)/\hbar], \exp[i(-Et + p_l x_l)])^{-1} d^3 x = 1$ , так как оператор свободного пространства симметричный. При интегрировании по комплексной переменной в пределах  $[-\infty \alpha, \infty \alpha], |\alpha| = 1$  получаем тот же результат в силу того, что подынтегральная функция является аналитической. При этом величина средней координаты равна

$$\begin{aligned} \int x_k \exp[2i(-Et + p_l x_l)/\hbar] d^3 x [\exp(-2iEt/\hbar) \delta(p_1) \delta(p_2) \delta(p_3) (\pi\hbar)^3]^{-1} = \\ = \frac{-i\hbar \partial \ln \delta(p_k)}{\pi \partial p_k} \end{aligned}$$

нормировав эту величину, вводя аппроксимацию дельта функции, получим

$$\langle x \rangle = -i\hbar \frac{\partial \ln \delta(p_k)}{\partial p_k} = -i\hbar \frac{\partial (\ln \frac{1}{\sigma_{p_k} \sqrt{2\pi}} - \frac{p_k^2}{2\sigma_{p_k}^2})}{\partial p_k} = i\hbar \frac{p_k}{\sigma_{p_k}^2}.$$

Где величина  $\sigma_{p_k}^2$  это дисперсия импульса. Если в качестве  $\sigma_{p_k}$  взять величину

$\sigma_{p_k} = \hbar / \sigma_{x_k}$ , где величина  $\sigma_{x_k}^2$ , это дисперсия координаты, то получим для

среднего значения координаты  $\langle x_k \rangle = i\sigma_{x_k}^2 \frac{p_k}{\hbar}$ . При рассмотрении чисто

действительного пространства величина среднего равна бесконечности.

В случае  $\langle x_k^2 \rangle$  получим значение (под значком  $\delta(p_k)$  будем подразумевать аппроксимацию дельта функции)

$$\begin{aligned} \langle x_k^2 \rangle &= -\hbar^2 \frac{\partial^2 \delta(p_k)}{\delta(p_k) \partial p_k^2} = -\hbar^2 \left( -\frac{1}{\sigma_{p_k}^2} + \frac{p_k^2}{\sigma_{p_k}^4} \right) = \\ &= \sigma_{x_k}^2 \left( 1 - \frac{\sigma_{x_k}^2 p_k^2}{\hbar^2} \right) = \sigma_{x_k}^2 \left( 1 - \frac{p_k^2}{\sigma_{p_k}^2} \right) \end{aligned}$$

В комплексном пространстве возможен отрицательный средний квадрат. Корень из среднего квадрата координаты для большого импульса величина мнимая и равна  $i\sigma_{x_k}^2 p_k / \hbar = i\hbar p_k / \sigma_{p_k}^2$ . Эта величина среднего квадрата координаты для одной частицы в свободном пространстве. Дисперсия координаты равна  $\langle (x_k - \langle x_k \rangle)^2 \rangle = \langle x_k^2 \rangle - \langle x_k \rangle^2 = \sigma_{x_k}^2$ . При этом, если средний квадрат, среднее значение и дисперсия удовлетворяют равенству  $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle^2 + \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = |\langle x \rangle + i\sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}|^2$ . Извлекая корень из этого равенства, получим  $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = [\langle x \rangle \pm i\sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}] \alpha, |\alpha| = 1$ .

Данное определение среднего и среднего квадрата получено путем умножения на мнимую единицу определенных комплексных значений при условии  $\alpha = \pm i$  получаем  $\mp i\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \pm i\langle x \rangle + \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$ . Взяв квадрат модуля этой величины, получим  $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle^2 + \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ , т.е. правильную формулу по определению среднего квадрата. Но это соотношения между средними величинами соответствует возможным комплексным значениям макромира, и для микромира не выполняется. Для микромира справедливо соотношение (1.3).

Волновую функцию в случае комплексного решения надо представлять в виде степеней комплексной переменной  $z$

$$f_p(z) = \sum_{n=0}^N c_{pn} g_n(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^N c_{pn} \left(\frac{z}{z_0}\right)^{n+1}, & |z| < |z_0| \\ \sum_{n=0}^N c_{pn} \left(\frac{z_0}{z}\right)^{n+1}, & |z| > |z_0| \end{cases}.$$

Вычислим функции  $f_p(z)$ , имеющими ортогональные значения

$$f_0 = g_0; f_1 = g_0 + \lambda g_1, \lambda = \frac{(-g_0, f_0)}{(g_1, f_0)}; (f, g) = \int_0^{\infty} f(z)g(z)dz$$

$$f_2(z) = g_0 + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$$

$$(-g_0, f_0) = \lambda_1 (g_1, f_0) + \lambda_2 (g_2, f_0)$$

$$(-g_0, f_1) = \lambda_1 (g_1, f_1) + \lambda_2 (g_2, f_1)$$

Откуда в силу линейной независимости функций  $g_n(z)$ , а значит, и функций  $f_n(z)$  определяются коэффициенты  $\lambda_1, \lambda_2$ , а значит и функция  $f_2(z)$ , ортогональная  $f_0(z), f_1(z)$ .

Таким образом, определим ортогональные функции  $f_p(z)$ . Эти функции ортонормированы относительно «обратной» функции  $f_n^{-1}(z) = \langle f_n | f_m \rangle^{-1} f_m$   $\int_0^{\infty} f_n^{-1}(z) f_k(z) dz = \delta_{nk}$ . Эта функция непрерывна при характерном размере задачи  $z = z_0$ , но производная от этой функции в этой точке рвется. В случае атома водорода за характерный размер надо брать радиус Бора.

Опишем физический смысл волновой функции. Для этого покажем, что уравнение Шредингера сводится к уравнению Навье – Стокса. Докажем это. Для чего запишем уравнение Шредингера и преобразуем его с помощью

формулы 
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_l^2} = \psi \left[ \frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial x_l^2} + \frac{1}{\psi^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_l} \right)^2 \right]$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_l^2} + U\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi \sum_{l=1}^3 \left[ \frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial x_l^2} + \frac{1}{\psi^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_l} \right)^2 \right] + U\psi.$$

Разделив на массу  $m\psi$ , получим уравнение

$$i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial \ln \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m^2} \sum_{l=1}^3 \left( \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_l} \right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2m^2} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial x_l^2} + U/m.$$

Получим уравнение в частных производных, взяв градиент от обеих частей

уравнения, введем действительную скорость по формуле  $\mathbf{V} = -i \frac{\hbar}{m} \nabla \ln \psi$ .

$$\frac{\partial i \frac{\hbar}{m} \nabla \ln \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{m^2} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_l} \frac{\partial \nabla \ln \psi}{\partial x_l} = \frac{i \hbar}{2m} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 i \frac{\hbar}{m} \nabla \ln \psi}{\partial x_l^2} + \nabla U / m$$

Подставляя значение скорости в преобразованное уравнение Шредингера, получим

$$\frac{\partial V_p}{\partial t} + \sum_{l=1}^3 V_l \frac{\partial V_p}{\partial x_l} = v \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 V_p}{\partial x_l^2} - \frac{\partial U}{\partial x^p} / m, v = \frac{i \hbar}{2m}.$$

Получим трехмерное уравнение Навье – Стокса с давлением, соответствующим потенциалу.

Физический смысл логарифма волновой функции - это потенциал скорости частиц с массой  $m$ , для среды с кинематической вязкостью  $\nu = \frac{i \hbar}{2m}$ , где  $m$  масса частиц, образующих эту среду. Причем взаимодействие этих частиц образует элементарные частицы см. [7].

Электрон, как квантовая система имеет размытые границы, которые имеют среднеквадратическое отклонение  $\lambda$ , при этом напряженность поля электрона равна  $E = \frac{e}{(r + i\lambda)^2}$ . Электромагнитная масса электрона равна

$$m_e c^2 = \int_0^{\infty} \frac{E^2}{8\pi} 4\pi r^2 dr. \text{ Значение электромагнитной массы электрона}$$

$$\begin{aligned} m_e c^2 &= \int_0^{\infty} \frac{e^2}{2(r + i\lambda)^4} [(r + i\lambda)^2 - 2i\lambda(r + i\lambda) - \lambda^2] dr = \\ &= \frac{e^2}{2} \left[ -\frac{1}{r + i\lambda} + \frac{i\lambda}{(r + i\lambda)^2} + \frac{\lambda^2}{3(r + i\lambda)^3} \right] \Big|_0^{\infty} = \frac{e^2}{6i\lambda} \end{aligned}$$

Физический смысл комплексного решения - это его модуль, откуда имеем величину среднеквадратического отклонения радиуса электрона  $\lambda = \frac{e^2}{6m_e c^2}$ . Эта величина соответствует границе комплексного радиуса электрона. Предел применимости электродинамики несколько больше и равен  $e^2 / m_e c^2$  см. [3]§75,

т.е. можно сказать, что классическая электродинамика применяется в действительном пространстве.

## 2. Упрощение вычислений в комплексном пространстве

В комплексном пространстве возможно описание скалярного поля без использования перенормировок. Перенормировки в квантовой теории поля возникли из-за стремления действительного решения к бесконечности, при наличии комплексных координат положения равновесия. Простейшей системой, для которой используется перенормировка, является функция плотности Лагранжа скалярного поля, которая в случае комплексного скалярного поля имеет вид

$$L = (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^*) - m^2 \varphi \varphi^* - g(\varphi \varphi^*)^2 / 2$$

При этом тензор плотности энергии и импульса равен

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi^* \partial_\nu \varphi + \partial_\nu \varphi^* \partial_\mu \varphi - L g_{\mu\nu}$$

При этом плотность энергии и импульса равна

$$T_{00} = \hbar \left( \frac{\partial \varphi^*}{c \partial t} \frac{\partial \varphi}{c \partial t} + \nabla \varphi^* \nabla \varphi + m^2 c^2 \varphi^* \varphi / \hbar^2 + g(\varphi^* \varphi)^2 / 2 \right)$$

$$c T_{i0} = \hbar \left( \frac{\partial \varphi^*}{c \partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{c \partial t} \right)$$

Тензор энергии и импульса является действительным. При этом поле  $\psi$  имеет размерность  $cm^{-1/2} s^{-1/2}$ .

А импульс и энергия поля равны при условии  $g = 0$ , где  $\varphi$  нормировано

$$P_\mu = \int T_{\mu 0} d^3 x.$$

Перенормировка возникает при условии модуля величины, равного отрицательному значению. Возникает редкая ситуация  $-|x|^2 = \varepsilon > 0$ , решение этого уравнения не существует ни в действительных, ни в комплексных числах. Если не использовать вычисление каждого коэффициента ряда решения, а пользоваться теорией возмущений, то образуется произвол в решении, который приводит к бесконечности решения. Говорится, что от величины  $m_0$  решение

не зависит и определяют ее как большую константу. Тогда вводят величину  $i\sqrt{\varepsilon}/m_0 \rightarrow 0$  и особенность устраняется в теории возмущений, так как от величины  $m_0$  решение не зависит, а не правильных членов редкое количество.

Но действуют более хитро, вводят величину  $\frac{i\sqrt{\varepsilon}m_0}{m_0^2 + \alpha^2}$ , причем эта величина

малая. В окончательных формулах определяют  $\alpha = 0$ , и так как решение от  $m_0$  не зависит, получают правильное решение, без учета редкого отрицательного модуля. Но если не имеется константы, от которой решение не зависит, то перенормировки при использовании теории возмущений не работают. В любом случае это решение приближенное, не учитывающее значение  $x$  при отрицательном модуле. Считается, что относительная ошибка метода  $\sqrt{\varepsilon}/m_0$  и надо выбирать  $m_0$  большим. Но если правильно считать точность метода, то получится относительная ошибка  $\varepsilon / \sum_{n=1} x_n^2$  и в случае редкого события - отрицательного значения корня, эта ошибка мала. Но решение содержит потенциальный произвол, от которого надо избавиться предлагаемыми методами.

От сингулярности радиуса частицы можно избавиться, строя определенным образом потенциал частицы см. [8].

При этом как показано в начале статьи собственные значения энергии и импульса могут быть комплексные. Значит, определение действительной функции плотности Лагранжа не включает комплексное значение и является ошибочным. Функция плотности Лагранжа надо определять без учета комплексно сопряженных членов в виде

$$L = (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi) / 2 - m^2 \varphi^2 / 2 - g \varphi^4 / 4 \quad (2.1)$$

При этом теряется инвариантность относительно экспоненты, поэтому запись лагранжиана должна быть другой

$$L = (\partial_\mu \varphi^{-1} \partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^{-1} \varphi - g (\varphi^{-1} \varphi)^2 / 2. \quad (2.2)$$

Величина «обратной» функции определяется по формуле

$$\varphi_m^{-1} = c_{mn} \varphi_n.$$

Умножаем на волновую функцию  $\varphi_k$  и интегрируем по пространству, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \delta_{mk} &= c_{mn} \langle \varphi_n \varphi_k \rangle \\ c_{mn} &= \langle \varphi_n \varphi_k \rangle^{-1} \end{aligned}$$

Получаем формулу для «обратной» функции  $\varphi_m^{-1} = \langle \varphi_m \varphi_n \rangle^{-1} \varphi_n$ . Так как функции выбираем независимые, обратная матрица существует. Уравнение становится инвариантным относительно экспоненты.

Решение строится по-другому. Из (2.2) получаем два уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial x^{02}} &= \Delta A + m^2 A + g A^{-1} A^2 \\ \frac{\partial^2 A^{-1}}{\partial x^{02}} &= \Delta A^{-1} + m^2 A^{-1} + g A (A^{-1})^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решение ищем в виде

$A = c_n \varphi_n = \varphi; A^{-1} = d_m^{-1} \langle \varphi_m \varphi_n \rangle^{-1} \varphi_n = d_m^{-1} \varphi_m^{-1} = \varphi^{-1}$ . Имеется счетное количество решений  $A^{-1} A = \alpha_k$ . Это связано с тем, что волновые функции не нормируются, а определяются точно без множителя.

В результате вычислений получим  $\sum_m d_m^{-1} c_m = \alpha_k$ . Умножая  $\varphi^{-1}$  на величину  $\varphi$  получим

$$(\varphi^{-1}, \varphi) = \alpha_k = d_m^{-1} (\varphi_m, \varphi_n)^{-1} (\varphi_n, c_k \varphi_k) = d_m^{-1} c_m. \quad (2.4)$$

Справедливо полученное из (2.4)

$$\sum_n d_n^{-1} c_n = \alpha_k = (\varphi^{-1}, \varphi). \quad (2.5)$$



Имеется вырожденное решение  $A = \pm A^{-1}$ , которое сводится к линейному уравнению, так как  $A^2 = \pm 1; (A^{-1})^2 = \pm 1$ , которое удовлетворяет уравнению только в случае  $m^2 = -g$ .

При этом координаты положения равновесия не устойчивы, так как решение линеаризованной системы уравнений  $\exp(\pm\sqrt{\lambda}t)$ . Это приводит к бесконечности решения в случае действительного решения при комплексных координатах положения равновесия (см. [4]). И к чередованию приближения к координате положения равновесия в случае комплексного решения (см. [4]). Т.е. на интервале времени, характерном для квантового описания системы, имеется множество приближений к координатам положения равновесия, но измерение квантовой механики реализует одно из них. Но определяемые этими координатами положения равновесия собственные значения квантовой системы могут быть неустойчивы, что говорит о конечности времени жизни. Устойчиво мнимое значение  $\sqrt{\lambda}$ , что реализуется очень редко. В результате измерения квантовой системы получается одно собственное значение.

При этом, так как дифференциальное уравнение (2.3), полученное из уравнения движения (2.2), имеет в общем случае комплексные координаты положения равновесия, ее действительное решение согласно теореме 1 см. [4] стремится к бесконечности и как это описано в литературе является обобщенной функцией. Комплексное решение этого нелинейного уравнения конечно согласно теореме 2 см. [4], и сводится к чередованию приближения к координатам положения равновесия.

Можно прибегнуть к другому способу вычисления собственных значений, рассматривая решение четырех уравнений

$$\begin{aligned} \Delta A + m^2 A + g A^{-1} A^2 &= 0 \\ m^2 A + g A^{-1} A^2 &= 0 \\ \Delta A^{-1} + m^2 A^{-1} + g A (A^{-1})^2 &= 0 \\ m^2 A^{-1} + g A (A^{-1})^2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Решение ищем в комплексном пространстве в виде

$$\begin{aligned}
A(x) &= \sum_{n_3=1}^{2N} \sum_{n_1, n_2=1}^N \alpha_n \varphi_n(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n_3=1}^{2N} \sum_{n_1, n_2=1}^N \alpha_n \left[ \frac{a(\psi_1, \psi_2)}{r} \right]^{n_3} \sin n_1 \psi_1 \sin n_2 \psi_2 \\
A^{-1}(x) &= \sum_{n_3=1}^{2N} \sum_{n_1, n_2=1}^N \beta_n \langle \varphi_n \varphi_m \rangle^{-1} \varphi_m(x_1, x_2, x_3) = \\
&= \sum_{n_3=1}^{2N} \sum_{n_1, n_2=1}^N \beta_n \langle \varphi_n \varphi_m \rangle^{-1} \left[ \frac{a(\psi_1, \psi_2)}{r} \right]^{n_3} \sin n_1 \psi_1 \sin n_2 \psi_2
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Где величины углов равны

$$\begin{aligned}
\psi_l &= \arg(x_3 + ix_l) = \arg[\operatorname{Re} x_3 - \operatorname{Im} x_l + i(\operatorname{Re} x_l + \operatorname{Im} x_3)] = \arctan\left(\frac{\operatorname{Re} x_l + \operatorname{Im} x_3}{\operatorname{Re} x_3 - \operatorname{Im} x_l}\right), \\
r^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2
\end{aligned}$$

Подставляем формулу (2.7) в дифференциальное уравнение (2.6), умножаем уравнение на величину  $\varphi_m(x_1, x_2, x_3), m_1, m_2, m_3 = 1, \dots, N; \psi_{1,1,1}(x_1, x_2, x_3) = 1$ , и интегрируем по комплексному пространству, получим систему  $4N^3$  уравнений с  $4N^3$  неизвестными.

$$\begin{aligned}
(F_{\text{mnl}} \alpha_n \beta_l + m^2 \delta_{\text{mn}}) \alpha_n &= 0 \\
(G_{\text{mnl}} \beta_n \alpha_l + m^2 \delta_{\text{mn}}) \beta_n &= 0
\end{aligned}$$

Решение с помощью функций (2.7) сходится лучше, чем с помощью сферических функций. Сферическая система координат не периодичная, угол  $\theta \in [0, \pi]$ , и поэтому коэффициенты ряда по сферическим функциям на бесконечности индекса стремятся к бесконечности. Так разложение плоской волны по сферическим функциям, имеет вид

$$\exp(i\mathbf{kr}) = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \sqrt{n+1/2} J_{n+1/2}(kr) \theta_{n0}(\cos \theta)$$

Где сферические функции  $\theta_{n0}(\cos \theta)$  ортонормированы.

При этом коэффициенты ряда Фурье в случае непрерывной функции сходятся на бесконечности индекса быстрее чем  $1/n^2$ . Т.е. второе решение сходится лучше, чем решение со сферическими функциями. Причем нулевое

приближение для коэффициентов, можно брать в виде  $\alpha_n^0 = \frac{\beta^0}{(n_1^2 + 1)(n_2^2 + 1)}$ , а

следующее приближение в виде  $\alpha_n^1 = \frac{\beta_n^1}{(n_1^2 + 1)(n_2^2 + 1)}$ , что ускорит процесс сходимости определения коэффициентов. Для «обратной» функции справедливо аналогичное разложение коэффициентов.

Отметим, что функциональный интеграл можно вычислить методом перевала. При этом критическая точка, или точка перевала функционального интеграла равна функции  $A(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \varphi_n(\mathbf{x}); A^{-1}(\mathbf{x}) = \sum_{n,m=1}^N \beta_n \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle^{-1} \varphi_n(\mathbf{x})$  и не зависит от времени, т.е. функциональный интеграл можно проинтегрировать по времени в критической точке. Причем критических точек имеется счетное количество, как и количество собственных значений оператора энергии. При этом возникнет большой параметр, равный приращению времени и интеграл можно считать методом перевала, причем фаза и амплитуда метода перевала определится в виде конечного интеграла.

Запишем выражение, определяющее собственную энергию частицы

$$\begin{aligned} \hat{H}\varphi &= P_N^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} i^n / n! \int [dAdA^{-1}] \hat{H}[A(\mathbf{x}), A^{-1}(\mathbf{x})] (\int L_1[A, A^{-1}] d^4 y)^n \exp[i \int L_0[A, A^{-1}] d^4 y] = \\ &= P_N^{-1} \int [dAdA^{-1}] \hat{H}[A(\mathbf{x}), A^{-1}(\mathbf{x})] \exp[i \int L[A, A^{-1}] d^4 y] = \\ &= P_N^{-1} \hat{H}[A(\mathbf{x}), A^{-1}(\mathbf{x})] \frac{\exp[i \int_{x_1^3-3\sigma}^{x_N^3+3\sigma} \int_{x_1^2-3\sigma}^{x_N^2+3\sigma} \int_{x_1^1-3\sigma}^{x_N^1+3\sigma} (x_N^0 - x_1^0) L[A(\mathbf{y}), A^{-1}(\mathbf{y})] d^3 y]}{\sqrt[4]{\int -(x_N^0 - x_1^0)^2 |B| d^3 y}} = \\ &= (\partial_\mu \varphi^{-1} \partial^\mu \varphi) + m^2 \varphi^{-1} \varphi + g(\varphi^{-1} \varphi)^2 / 2 \Big|_{\varphi=A(\mathbf{x}) \varphi^{-1}=A^{-1}(\mathbf{x})}; \\ |B| &= \begin{vmatrix} \partial^2 L[A(\mathbf{y}), A^{-1}(\mathbf{y})] / \partial A^2 & \partial^2 L[A(\mathbf{y}), A^{-1}(\mathbf{y})] / \partial A \partial A^{-1} \\ \partial^2 L[A(\mathbf{y}), A^{-1}(\mathbf{y})] / \partial A \partial A^{-1} & \partial^2 L[A(\mathbf{y}), A^{-1}(\mathbf{y})] / \partial (A^{-1})^2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Где величина

$$P_N = \int [dAdA^{-1}] \exp[i \int L[A, A^{-1}] d^4 y] = \frac{\exp[i \int_{x_1^3-3\sigma}^{x_N^3+3\sigma} \int_{x_1^2-3\sigma}^{x_N^2+3\sigma} \int_{x_1^1-3\sigma}^{x_N^1+3\sigma} (x_N^0 - x_1^0) L[A(\mathbf{y}), A^{-1}(\mathbf{y})] d^3 y]}{\sqrt[4]{\int -(x_N^0 - x_1^0)^2 |B| d^3 y}}$$

Так подынтегральное выражение в фазе экспоненты не зависит от времени, по времени можно проинтегрировать, и получим большой параметр  $x_N^0 - x_1^0$ .

Где величина функции плотности Лагранжа равна  $L = \partial_k A^{-1} \partial^k A - m^2 A^{-1} A - g(A^{-1} A)^2 / 2$ , а функция плотности Гамильтона равна  $\hat{H}(\varphi) = (\partial_\mu \varphi^{-1} \partial^\mu \varphi) + m^2 \varphi^{-1} \varphi + g(\varphi^{-1} \varphi)^2 / 2$ .

Причем значение  $A(\mathbf{x})$  не зависит от времени в точке координаты положения равновесия. При этом значение величины  $A$  надо брать из формулы

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \varphi_n(\mathbf{x}); A^{-1}(\mathbf{x}) = \sum_{n,m=1}^N \beta_n \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle^{-1} \varphi_n(\mathbf{x}).$$

определится из равенства  $m^2 A^{-1} + gA(A^{-1})^2 = 0; m^2 A + gA^2 A^{-1} = 0$ , в которое надо подставить значение функций и проинтегрировать. Фаза и амплитуда формулы метода перевала считается с помощью континуального интеграла.

Выбираем контур, удовлетворяющий  $\partial_l \text{Im} L(A, A^{-1}) = 0$ , получаем зависимость  $\text{Im} x_l = f_l(\text{Re} x_1, \text{Re} x_2, \text{Re} x_3), l = 1, \dots, 3$  и интегрируем по действительной переменной, используя вычисленные мнимые значения переменных, для нахождения фазы интеграла. При этом используется метод стационарной фазы, так как функция Лагранжа умножается на мнимую единицу.

Причем точек перевала имеется счетное количество, но энергия состояния определяется по единой формуле для любой одной точки метода перевала. Одна точка метода перевала определяет одну совокупность координат положения равновесия и одно значение энергии состояния. Плотность энергии равна

$$H(\mathbf{x}) = (\partial_\mu \varphi^{-1} \partial^\mu \varphi) + m^2 \varphi^{-1} \varphi + g(\varphi^{-1} \varphi)^2 / 2 \Big|_{\varphi=A(\mathbf{x}) \varphi^{-1}=A^{-1}(\mathbf{x})},$$

где энергия берется при квантовом поле равном классическому полю, полученному с помощью метода Галеркина. Количество собственных значений энергии определяется числом совокупностей положения равновесия системы (2.2).

При этом в случае вычисления скалярного поля имеем для него конечное значение

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= P_N^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} i^n / n! \int [dA dA^{-1}] A(\mathbf{x}) \left( \int L_1[A, A^{-1}] d^4 y \right)^n \exp[i \int L_0[A, A^{-1}] d^4 y] = \\ &= P_N^{-1} \int [dA dA^{-1}] A(\mathbf{x}) \exp[i \int L[A, A^{-1}] d^4 y] = \\ &= P_N^{-1} A(\mathbf{x}) \frac{\exp[i \int_{x_1^3-3\sigma}^{x_N^3+3\sigma} \int_{x_1^2-3\sigma}^{x_N^2+3\sigma} \int_{x_1^1-3\sigma}^{x_N^1+3\sigma} (x_N^0 - x_1^0) L[A(\mathbf{y}), A^{-1}(\mathbf{y})] d^3 y]}{\sqrt[4]{-(x_N^0 - x_1^0)^2 |B| d^3 y}} = A(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Получаем, что квантовое поле равно классическому полю

$$\varphi(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \varphi_n(\mathbf{x}), \quad \varphi^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}(\mathbf{x}) = \sum_{n,m=1}^N \beta_n \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle^{-1} \varphi_n(\mathbf{x}) \quad \text{и,}$$

следовательно, комплексная энергия этого поля равна  $E = \int \hat{H}[A(\mathbf{x}), A^{-1}(\mathbf{x})] d\mathbf{x}^3$ , причем количество собственных энергий равно количеству совокупностей координат положения равновесия, т.е. при бесконечном числе членов ряда имеется счетное количество собственных значений энергии. Каждый член  $A(\mathbf{x})$  из счетного количества значений определяется однозначно.

### 3. Преобразование Лоренца в комплексном пространстве

В комплексном пространстве метрический интервал будет комплексный

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x_1^2 - \Delta x_2^2 - \Delta x_3^2.$$

При этом преобразование Лоренца запишется в виде

$$x_1 = \frac{x'_1 + |V| x_0}{\sqrt{1 - |V|^2 / c^2}}; x_0 = \frac{x'_0 + |V| x_1}{\sqrt{1 - |V|^2 / c^2}}; x_2 = x'_2, x_3 = x'_3$$

Где величины координат комплексные. При не релятивистских скоростях пространство комплексно, а время действительно. Причем в этом случае комплексное пространство ограничено, и расположено около поверхности тел, а вдали от тел пространство действительно. Причем модуль пространственной

части много меньше  $c^2\Delta t^2$  в случае не релятивистских скоростей. При релятивистских скоростях время и пространство комплексно, и не ограничено.

#### 4. Оператор момента импульса в комплексном пространстве

Отметим, что квантовые числа  $L, M, s, \sigma$  операторов спина могут иметь не целое значение и быть комплексные. При этом собственное значение волновой функции  $\exp(iM\varphi)$  определяется по формуле  $\widehat{M}_z = -i \frac{\partial \ln \psi}{\partial \varphi} = M$  и может быть комплексным. Собственные функции оператора импульса в комплексном пространстве имеют комплексный период  $T_\varphi = 2\pi/M$ . При этом величины  $M = L, L-1, \dots, -L+1, -L$ , причем имеется  $\text{int}(2\text{Re } L + 1)$  значений проекций момента импульса.

Причем величина орбитального момента  $L$  может быть комплексной, причем действительная часть этой величины находится между значениями  $\text{Re } L, \text{Re } L + 1$ . Тогда, как предложено и обосновано в [5] энергия возбуждения атома водорода комплексная и равна  $E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 (n_r + l + 1)^2}$ , где орбитальный момент  $l$  комплексный.

#### Выводы

Комплексное решение, которое существует в случае комплексных координат положения равновесия, назовем турбулентным, в силу физического смысла комплексного решения в макро пространстве, причем в [6] описаны мнимые параметры макромира. Мнимая часть комплексного решения описывает отклонение от среднего решения, и определяет вращающуюся или осциллирующую часть решения. Причем возможно особое комплексное

решение при определенных значениях энергии системы, т.е. дисперсия решения, может проявиться и быть не нулевой при определенных значениях энергии или импульса. Расчеты в комплексном пространстве нелинейных уравнений в частных производных являются непрерывными функциями, а не обобщенными функциями, не стремятся к бесконечности, и не требуют перенормировок.

#### Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. т.Ш, Наука, 1989,768с.
2. Ольховский В.С., Майданюк С.П., Рэками Э. О несамосопряженных операторах в описании наблюдаемых в квантовой теории и ядерной физике. Физика элементарных частиц и атомного ядра. Т.41, 2010, Вып.4 [http://www1.jinr.ru/Pepan/2010-v41/v-41-4/02\\_Olkhovskii.pdf](http://www1.jinr.ru/Pepan/2010-v41/v-41-4/02_Olkhovskii.pdf)
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля т.Ш, Наука, М.,1973,564с.
4. Якубовский Е.Г. Комплексные решения уравнений в частных производных. VIII Международная Научно-практическая конференция «Актуальные вопросы развития инновационной деятельности в новом тысячелетии», Новосибирск, 2014г., стр.60-65 <http://math-systems.ru/files/Arhiv/19-0.09.2014/mis8.pdf#page=66>
5. Попов А.В. Применение несамосопряженных операторов для описания возбуждений на примере атома водорода. Известия алтайского государственного университета. №1 (73), т. 2, 2012г. <http://izvestia.asu.ru/2012/1-2/phys/TheNewsOfASU-2012-1-2-phys-06.pdf>
6. Якубовский Е. Г. Модель комплексного пространства. Материалы XIII международной научно-практической конференции, Теория и практика современной науки. Т.1, М.: 2014г. [http://istina.msu.ru/media/publications/article/c86/8ef/10390297/Model\\_kompleksnogo\\_prostranstva.pdf](http://istina.msu.ru/media/publications/article/c86/8ef/10390297/Model_kompleksnogo_prostranstva.pdf)

7. Якубовский Е.Г. Физический смысл уравнений квантовой механики, электродинамики и уравнения ОТО. «Энциклопедический фонд России». 2014г., 65с., <http://russika.ru/sa.php?s=890>
8. Якубовский Е.Г. Счетное количество комплексных радиационных поправок. «Энциклопедический фонд России», 2016, 5 стр.  
<http://russika.ru/sa.php?s=1194> scholar.google

#### References

1. Landau LD, Lifshitz EM Quantum mechanics. Non-relativistic theory. t.III Science, 1989,768s.
2. Olkhovskiy VS Maydanyuk SP, RECs E. Non-Self-operators in the description of the observed in quantum physics and nuclear physics. Particle physics and nuclear physics. T.41, 2010, issue 4 [http://www1.jinr.ru/Pepan/2010-v41/v-41-4/02\\_Olkhovskii.pdf](http://www1.jinr.ru/Pepan/2010-v41/v-41-4/02_Olkhovskii.pdf)
3. LD Landau, EM Lifshitz Field theory T. II, Nauka, Moscow, 1973,564s.
4. Yakubovski EG Complete solutions of partial differential equations. VIII International Scientific and Practical Conference "Actual questions of development of innovative activity in the new millennium", Novosibirsk, 2014., Str.60-65  
<http://math-systems.ru/files/Arhiv/19-0.09.2014/mis8.pdf#page=66>
5. Popov AV Application of nonselfadjoint operators to describe the example of excitation of the hydrogen atom. The News of Altai State University. №1 (73), vol. 2, 2012. <http://izvestia.asu.ru/2012/1-2/phys/TheNewsOfASU-2012-1-2-phys-06.pdf>
6. Yakubovski EG Model complex space. Proceedings of XIII International Scientific-practical conference, theory and practice of modern science. V.1, M.: 2014.  
[http://istina.msu.ru/media/publications/article/c86/8ef/10390297/Model\\_kompleksnogo\\_prostranstva.pdf](http://istina.msu.ru/media/publications/article/c86/8ef/10390297/Model_kompleksnogo_prostranstva.pdf)



7. Yakubovski EG The physical meaning of the equations of quantum mechanics, electrodynamics and equations of general relativity. "Collegiate Fund of Russia." 2014., 65c., <http://russika.ru/sa.php?s=890>