Решение не продолжаемых обыкновенных нелинейных уравнений первого порядка с полюсами

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Решение системы обыкновенных дифференциальных нелинейных автономных уравнений первого порядка с полюсами в правой части дифференциального уравнения при численном счете может стремиться к бесконечности. Причиной этого является наличие точки ветвления у решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, т.е. решение имеет вид $x_l(t) = \alpha_l + \beta_l (t - t_0)^\alpha + ..., 0 < \alpha < 1$, *причем первая производная по времени стремится к бесконечности. Выяснения условий этой ситуации и посвящена предлагаемая статья.*

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений, правая часть которой обращается в некоторых точках в бесконечность и в ноль. Построим решение такой системы нелинейных дифференциальных уравнений. Итак, имеем систему нелинейных уравнений

$$\frac{dx_l}{dt} = F_l(x_1, ..., x_N) .$$

Перейдем к переменным, соответствующим линеаризованной системе дифференциальных уравнений. Причем эта система нелинейных уравнений имеет однократные положения равновесия и точки, в которых полюса правой части дифференциального уравнения. $F_l(a_1^s, ..., a_N^s) = 0, l = 1,.., N; s = 1, ..., S$ и уравнения $1/F_l(b_1^k, ..., b_N^k) = 0, l = 1,.., N; k = 1, ..., K$. Тогда l уравнение можно записать в виде

$$\frac{dx_l}{dt} = \exp\{G_l[x_1(t),...,x_N(t)]\}\frac{\prod_{s=1}^{S}(x_l - a_l^s)}{\prod_{k=1}^{K}(x_l - b_l^k)};$$

$$\exp\{G_l[x_1(t),...,x_N(t)]\} = \frac{F_l[x_1(t),...,x_N(t)]\prod_{k=1}^{K}(x_l - b_l^k)}{\prod_{s=1}^{S}(x_l - a_l^s)}.$$

Причем величина $\exp\{G_l[x_1(t),...,x_N(t)]\}$, не обращающаяся ни в ноль, ни в бесконечность функция в точках положениях равновесия и в полюсах правой части дифференциального уравнения. Значение этой функции в нуле и в полюсе правой части дифференциального уравнения можно вычислить с помощью правила Лопиталя. Тогда вводя новую независимую переменную $H_l(t) - H_l(t_0) = \int_{t_0}^{t} \exp\{G_l[x_1(t),...,x_N(t)]\}dt$, получим дифференциальное уравнение, которое и будем решать

$$\frac{dx_l}{dH_l(t)} = \frac{\prod_{s=1}^{S}(x_l - a_l^s)}{\prod_{k=1}^{K}(x_l - b_l^k)}. \qquad (1)$$

В случае если перед старшей производной системы нелинейных дифференциальных уравнений стоит матрица, определитель которой может равняться нулю, то система нелинейных уравнений может иметь точку ветвления. В случае зависимости решения от параметра, решение может зависеть от этого параметра в дробной или иррациональной степени см. [1]. Возможно построение решения в виде ряда, имеющего действительную отрицательную степень аргумента дифференциального уравнения с помощью свойства Пенлеве. Но решение имеет отрицательные степени аргумента, т.е. особенности. Оказывается, что система обыкновенных, нормальных, нелинейных автономных дифференциальных уравнений может иметь точку ветвления типа $x_l(t) = \alpha_l + \beta_l (t - t_0)^{\alpha} + ..., 0 < \alpha < 1$, где α определяемое рациональное число.

В случае уравнения $\dfrac{\prod_{s=1}^{S} (x - b^s)}{\prod_{s=1}^{P} (x - a^s)} \dfrac{dx}{dt} = 1$, где все множители сокращены, имеем

решение $x = b^k + \beta^k (t - t_0)^{\alpha} + ...$ и имеем точку ветвления $\dfrac{\prod_{s=1}^{k-1} (b^k - b^s) \prod_{s=k+p}^{K} (b^k - b^s)}{\prod_{s=1}^{S} (b^k - a^s)} (\beta^k)^p \alpha (t - t_0)^{p\alpha - 1} \{1 + 0[(t - t_0)^{\alpha}]\} = 1,$ откуда

получаем $\alpha = 1/p$ и имеем p значений

$$\beta^k = \sqrt[p]{\frac{\prod_{s=1}^{S} (b^k - b^s)}{\alpha \prod_{s=1}^{k-1} (b^k - b^s) \prod_{s=k+p}^{K} (b^k - b^s)}},$$

определяющих p решений. При этом можно продолжать строить решение вне особой точки.

Если величина β^k комплексная, то в результате получится p ветвей комплексного решения, которое будет огибать остальные точки b^s ветвления.

Координату t_0 можно определить, зная решение до точки t_0. Допустим решение в окрестности точки t_0 равно x_1 в момент времени t_1. Тогда координата t_0 определится из уравнения $x_1 = b^k + \beta^k (t_1 - t_0)^{1/p}$. Откуда имеем значение $t_0 = t_1 - [(x_1 - b^k)/\beta_k]^p$. При величине β_k комплексной, начиная с точки $x_1(t_1)$, решение будет комплексным.

Попробуем получить глобальное решение этой системы нелинейных уравнений. Для этого распишем зависимость от x

$$\frac{\prod_{s=1}^{S}(x-b^s)}{\prod_{s=1}^{P}(x-a^s)}\frac{dx}{dt}=1.$$

Воспользуемся формулой разложения дроби на слагаемые, так как корни a^s однократные

$$\frac{1}{\prod_{s=1}^{P}(x-a^s)}=\sum_{k=1}^{P}\frac{\lambda_k}{x-a^k},\lambda_k=\frac{1}{\frac{d}{dx}\prod_{s=1}^{P}(x-a^s)|_{x=a_k}}.$$

Получим формулу

$$\sum_{k=1}^{P}\frac{\prod_{s=1}^{S}(x-b^s)}{x-a^k}\lambda_k\frac{dx}{dt}=1.$$

Распишем левую часть выражения перед производной

$$\sum_{k=1}^{P}\frac{\prod_{s=1}^{S}(x-b^s)}{x-a^k}\lambda_k=\sum_{k=1}^{P}\left[\frac{\prod_{s=1}^{S}(x-b^s)-\prod_{s=1}^{S}(a^k-b^s)}{x-a^k}+\frac{\prod_{s=1}^{S}(a^k-b^s)}{x-a^k}\right]\lambda_k.$$

Где выражение $\sum_{k=1}^{P}\frac{\prod_{s=1}^{S}(x-b^s)-\prod_{s=1}^{S}(a^k-b^s)}{x-a^k}\lambda_k=Q_{S-1}(x)$ это целый полином степени $S-1$. Интегрируем эту систему нелинейного уравнения, получим

$$\int_{x_0}^{x}Q_{S-1}(x)dx+\sum_{k=1}^{P}\prod_{s=1}^{S}(a^k-b^s)\lambda_k(\ln\frac{x-a^k}{x_0-a^k}+2\pi i\Delta n)=t-t_0. \qquad (2)$$

Первый член - это полином степени S, который имеет S корней решений нелинейного уравнения. Член, содержащий Δn, соответствует разности целых чисел, и соответствует излучению энергии между начальными условиями и текущим значением функции.

Но корни этого уравнения непрерывно зависят от предыдущего значения, и это выбирает ветвь решения. Когда достигается точка ветвления нелинейного уравнения, происходит ветвление решения. Причем эта точка ветвления соответствует координатам $x = b^k$, так как именно в этой точке начинается ветвление, а до нее имеется монотонность во времени координаты x на общих отрезках $[a^k, a^{k+1}], [b^s, b^{s+1}]$. Причем достижение границы a_k, означает плюс, минус бесконечность $t - t_0$, возможно не доходя до точки ветвления. Это означает, что координата положения равновесия достигнута. Ветвление решения сохраняет силу при комплексных координатах положения равновесия и полюсов, только необходимо, чтобы координата x дошла до точки ветвления, т.е. существование точки ветвления зависит от начальных условий, возможно комплексных.

Задав начальные условия решения, из интеграла (2) получим S ветвей решения. Причем теорема о локальном существовании и единственности решения не нарушена, так как правая часть дифференциального уравнения в точке ветвления имеет особенность. Не-продолжаемые системы уравнений имеют несколько ветвей решения.

Литература

1. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Точки ветвления решения нелинейных уравнений М.: «Наука». 1969г., 529с.