Форма элементарных частиц в виде тора, причем спин описывается двумя плоскостями вращения

Якубовский Е.Г.

e-mail yalubovski@rambler.ru

Для решения уравнения Шредингера с учетом спина электрона нужно описание спиновой части волновой функции электрона. Для этого используется телесный угол и аналог азимутального угла. Телесный угол имеет период 4π и описывает полуцелый спин. Форма вращения частиц вакуума, образующих элементарную частицу является тором с сомкнувшимся центром, частицы вакуума вращаются, проходя через центр тора и огибая его, описывая два угла. Вращение частиц вакуума, которые совпадают с центром телесного угла, в двух плоскостях, параллельной большой плоскости тора, и перпендикулярной ей и проходящей через центр тора. Такое описание спина позволяет получить формулы, описывающие спин элементарных частиц. Угловая часть волновой функции, описывающей спин образует сферическую функцию нечетного порядка с соответствующими углами.

Основным свойством телесного угла является равенство см. [1] глава III, раздел 54.

$$grad\Omega = \oint \frac{[d\mathbf{l},\mathbf{r}]}{r^3}.$$

Причем при вращении вершины телесного угла, по замкнутому пути, проходящем через поверхность, натянутой на замкнутый контур телесный угол получает приращение 4π.

$$\oint (grad\Omega, dx) = 4\pi(n+1/2) = \Omega + 4\pi n.$$

Слагаемое ½ является следствием нахождения начальной вершины телесного угла на поверхности, натянутой на заданный контур.

При этом имеем $\psi^1 = \exp(i\Omega/2), \psi^2 = \exp(-i\Omega/2), \psi = \begin{Vmatrix} \exp(i\Omega/2) \\ \exp(-i\Omega/2) \end{Vmatrix}$.

Причем справедливо

$$(s_x\psi)^1 = \frac{\psi^2}{2}; (s_y\psi)^1 = -\frac{i\psi^2}{2}; (s_z\psi)^1 = \frac{\psi^1}{2}$$
$$(s_x\psi)^2 = \frac{\psi^1}{2}; (s_y\psi)^2 = \frac{i\psi^1}{2}; (s_z\psi)^2 = -\frac{\psi^2}{2}$$

Где s_x, s_y, s_z это матрицы Паули. Это аналог вращения угла в одной плоскости вокруг заданной точки. При вращении вокруг точки по замкнутому пути угол получает приращение 2π. При вращении вершины телесного угла проходя поверхность, натянутую на заданную кривую, получается приращение 4π. Тогда волновая функция собственного вращения равна $\exp[is\oint (grad\Omega, dx)] = \exp[i(\Omega + 4\pi k)s] = \exp(i\Omega s), s = 1/2$.

При этом телесный угол определяет спиновый оператор поворота вокруг произвольной оси

$$R_n(\Omega) = \exp(i\Omega s_n) = \exp(i\Omega\sigma_n/2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\Omega/2)^k}{k!}\sigma_n^k =$$
$$= E\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\Omega/2)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\Omega/2)^{2k+1}}{(2k+1)!}\sigma_n = E\cos\Omega/2 + i\sigma_n \sin\Omega/2 =$$
$$= \begin{Vmatrix} \cos\Omega/2 + in_z \sin\Omega/2 & in_- \sin\Omega/2 \\ in_+ \sin\Omega/2 & \cos\Omega/2 - in_z \sin\Omega/2 \end{Vmatrix}, \sigma_n = (\sigma_i, n_i) = \begin{Vmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{Vmatrix}$$

А производная по телесному углу определяет собственное значение

$$-i\frac{\partial R_n(\Omega)}{\partial\Omega} = s_n R_n(\Omega) = sR_n(\Omega); R_n(\Omega) = \exp(is_n\Omega)$$

Но как определить азимутальный угол. Для этого продолжим угол θ на величину $\Theta = 2\pi(l + 1/2)$. Тогда половина этого угла определит положительный радиус телесного угла. На следующем периоде координата x_3

изменит свой знак, т.е. будет описана и отрицательная проекция σ_z. Формула преобразования координат

$$\sigma_i x_i = \left\| \begin{matrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{matrix} \right\| = r \left\| \begin{matrix} \cos\Theta/2 & \sin\Theta/2\exp(-i\Omega/2) \\ \sin\Theta/2\exp(i\Omega/2) & -\cos\Theta/2 \end{matrix} \right\|.$$

с центром электрона в точке О, лежащим в центре окружности. и образовать поверхность, натянутую на эту окружность В,С. Причем окружность и натянутая на эту окружность поверхность В,С должны лежать в одной произвольной плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка. При этом вершина телесного угла А, начальная точка которого, находящаяся на этой поверхности В,С в центре окружности, будет двигаться перпендикулярно натянутой поверхности вдоль прямой, проходящей через центр электрона и окружности точка О. Телесный угол при возврате в начальную точку вблизи поверхности, снизу от нее равен 2π, а сверху от нее равен -2π и испытает скачок 4π проходя через поверхность, как и угол φ сферической системы координат испытает скачок 2π при возврате в начальную точку и его надо продолжить как многозначную функцию. Так же как угол φ лежит в одной плоскости, перпендикуляр, который описывает вершина телесного угла Ω, изменяется снизу на отрезке $[0,2\pi]$, а сверху на отрезке $[-2\pi,0]$. Тогда центр электрона является центром поворота на угол $\varphi = \Omega/2$, в плоскости, перпендикулярной рисунку. Проекция этой окружности отрезок ВОС. Образуем угол поворота на $2\theta = \Theta \in [0,2\pi]$, лежащий в произвольной плоскости, ортогональной натянутой на окружность поверхности, и проходящей через центр электрона. Вершина телесного угла вращается по окружности В,С. Половина этого угла соответствует углу сферической системы координат $\theta = \Theta/2$. Этот угол не периодический, как и его аналог сферический угол системы координат. Вращение вершины телесного угла и соответствующее ей вращение угла лежат в разных плоскостях, см. формулу

(1),(2). Движение в одной плоскости огибает траекторию в другой плоскости, если несколько уменьшить радиус вращения.

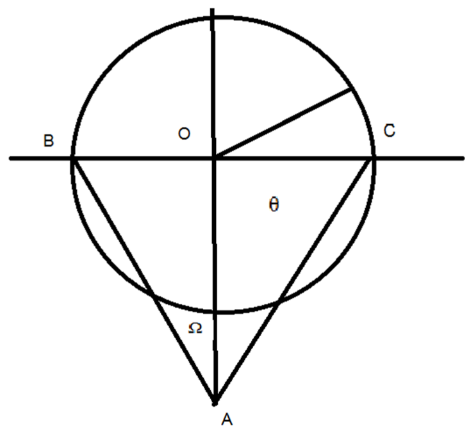

Рис.1 Изображение телесного угла

Точка O центр электрона. Точки B,C проекция окружности, с плоскостью, перпендикулярной плоскости рисунка, на которую натянута поверхность BC. Точка A вершина телесного угла $\varphi = \Omega/2$. Угол φ описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна плоскости рисунка, и проекция которой отрезок BOC. Угол $\theta = \Theta/2$.

При этом частицы вакуума или центр телесного угла, из которого видна окружность, вращаются в плоскостях, параллельных плоскости окружности B,C с телесным углом Θ относительно центра окружности B,C. Этот телесный угол не периодический и меняется на отрезке $\Theta \in [0,2\pi]$.

Но почему угол Θ не периодический? Тор получается из сферы, путем ее растяжения в одном направлении, и замыкания. В точке замыкания «азимутальный» угол рвется.

Вращающиеся частицы вакуума образуют бублик, или тор без дырки, которая сомкнулась, где происходит вращение по круговой поверхности тора, пересекая эту окружность или поверхность тора, проходя через сомкнувшийся центр тора, получая приращение телесного угла на 4π. Кроме того, частицы вакуума вращаются внутри тора по окружности B, C. Происходит вращение вокруг двух окружностей тора, одно внутри тора, другое по его поверхности, вокруг окружности В, С в плоскости перпендикулярной окружности В, С. При этом изменяются два угла $\theta = \Theta/2$ и $\varphi = \Omega/2$. Из этого равенства следуют формулы для описания спина, как вращение в сферической системе координат.

Согласно [3], протон при ультразвуковых скоростях представляет форму двояковогнутой линзы. При этом при малых скоростях протон имеет форму плоского диска. Но можно сделать заключение, что элементарные частицы описываются частицами вакуума, вращаются по траекториям в форме тора в двух плоскостях, одна проходящая параллельно большой плоскости тора и осуществляющая вращение внутри тора, а другая плоскость перпендикулярная этой большой плоскости тора и проходящей через центр тора $\theta = \Theta/2$ и $\varphi = \Omega/2$. Половинки углов равны углам сферической системы координат, и поэтому образуют сферическую функцию.

Существует представление, что спин описывает движение со сверхсветовой скоростью, поэтому модель спина невозможна. Но если ввести релятивистский знаменатель, то скорость света не будет превзойдена, и получится скорость трехмерного движения, близкой к скорости света. При этом четырехмерная скорость света $u^l = (\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \frac{\mathbf{V}/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}}). l = 0,...,3$, будет больше единицы.

Имеем свойство спина, которое называют спиральностью $(\mathbf{j},\mathbf{n}) = (\mathbf{s},\mathbf{n}), \mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}, \mathbf{l} = [\mathbf{r},\mathbf{p}]; \mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$. Проекция орбитального и спинового момента импульса на направление вектора импульса совпадают. Значит, проекция орбитального момента на это направление равна нулю. При этом $(\mathbf{l},\mathbf{s}) \neq 0, [\mathbf{l},\mathbf{s}] \neq 0$. Так как спиновая переменная описывается углами, половина которых образует сферическую систему координат сохраняется проекция собственного значения спина и его модуль. Но в силу того, что используется половина угла, нечетное значение проекции момента импульса надо разделить на два $s_z = \sigma_z / 2$, а модуль определять по формулам $|\mathbf{s}|^2 = \frac{\sigma}{2}(\frac{\sigma}{2}+1)$. При этом проекция спина одного электрона равна $1/2$ или $-1/2$. Так же как четность координатной части волновой функции определяется орбитального момента определяется $(-1)^l$, четность спиновой части определяется $(-1)^{\sigma}$, т.е. спиновая часть волновой функции с полуцелым спином всегда нечетная.

В книге [1] глава III, раздел 55 приведена формула

$$\int_{12} \mathbf{B}d\mathbf{s} = \frac{I}{c}(\Omega_2 - \Omega_1). \qquad (1)$$

Перепишем эту формулу в виде в случае если изменение координаты происходит в одной плоскости

$$B_{\varphi} r(\varphi) d\varphi = \frac{I}{c} d\Omega. \qquad (2)$$

Полагая все коэффициенты равными константе, получаем

$$d\varphi = K d\Omega, K = const$$

В силу значения периода угла φ, равного 2π и периода у телесного угла, равного 4π, получаем связь между коэффициентами $\varphi = \Omega / 2$.

Уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U\psi.$$

В этом уравнении используются введенные углы спиноров, и оператор Лапласа выглядит таким образом

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}]+$$

$$+\frac{\alpha}{4r^2}[\frac{1}{\sin\Theta/2}\frac{\partial}{\partial\Theta/2}(\sin\Theta/2\frac{\partial}{\partial\Theta/2})+\frac{1}{\sin^2\Theta/2}\frac{\partial^2}{\partial(\Omega/2)^2}]=$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{L(L+1)+\alpha\frac{\sigma}{2}(\frac{\sigma}{2}+1)}{r^2}, L_{eff}(L_{eff}+1)=L(L+1)+\alpha\frac{\sigma}{2}(\frac{\sigma}{2}+1);$$

$$\alpha=\mp(\frac{e}{\sqrt{\hbar c}})^{L!/2}=\mp\frac{1}{137^{L!/2}}, E_n=-\frac{me^4}{2\hbar^2(n_r+L_{eff}+1)^2}$$

$$\frac{1}{\sin\Theta/2}\frac{\partial}{\partial\Theta/2}(\sin\Theta/2\frac{\partial}{\partial\Theta/2})-\frac{(\sigma_z)^2}{\sin^2\Theta/2}+\sigma(\sigma+2)=0$$

$$\psi(r,\Theta,\Omega)=R_{n_rL_{eff}}(r)Y_{lm}(\theta)Y_{\sigma\sigma_z}(\Theta/2)\exp(im\varphi+i\sigma_z\Omega/2)$$

$$R_{n_rL}(r)=F(-n_r,L_{eff},r)=\frac{1}{L_{eff}(L_{eff}+1)...(L_{eff}+n_r-1)}z^{1-L_{eff}}\times$$

$$\times\exp(r)\frac{d^{n_r}}{dr^{n_r}}[\exp(-r)r^{n_r+L_{eff}-1}];$$

Где величина σ,σ_z определяют суммарный модуль спина электронов, и его проекцию. Сферические функции полуцелого порядка определяются полиномом Лежандра нечетного порядка $Y_{\sigma\sigma_z}(\Theta/2)\sim P_\sigma^{\sigma_z}(\cos\Theta/2)$. Дело в том, что телесный угол имеет период 4π, и значит, описывает полуцелый нечетный спин. Составляя произведение четного числа координатных спиновых функций, получим четную функцию. В случае произведения нечетного числа этих функций, получим нечетную волновую спиновую функцию. Так как спин этих функций полуцелый, волновая функция этих нескольких одинаковых частиц должна быть антисимметрична, при этом координатная волновая функция должна быть симметрична. Тогда произведение координатной и спиновой части волновой функции должны быть антисимметричное.

Целый спин описывается углами сферической системы координат. Например, собственные функции ψ_{jm} могут быть приведены в соответствие с компонентами ковариационного спинора ранга $2j$ по формулам (3). Собственные функции целочисленного момента j являются шаровые функции.

$$\begin{gathered}
Y_{10} = i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta = i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}n_z = ia_z = \sqrt{2}\psi^{12} \\
Y_{1\pm1} = \mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\exp(\pm i\phi) = \mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(n_x \pm in_y) = \mp(a_x \pm ia_y) \\
\psi^{11} = (a_x - ia_y)/\sqrt{2}; \psi^{22} = -(a_x + ia_y)/\sqrt{2} \\
Y_{jm}(\theta,\varphi) = \psi_{jm} = \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}}\psi_{\underbrace{11...1}_{j+m}\underbrace{22...2}_{j-m}}
\end{gathered} \tag{3}$$

Формулы можно записать в виде

$$a_z = i\sqrt{2}\psi^{12}; a_x = (\psi^{22} - \psi^{11})/\sqrt{2}; a_y = (\psi^{11} + \psi^{22})/\sqrt{2}.$$

Эту формулу можно переписать с помощью матриц Паули в виде

$$\mathbf{a} = i\sqrt{2}\mathbf{s}_{\mu}^{\lambda}\psi_{\lambda}^{\mu} \qquad \psi_{\lambda}^{\mu} = -i\sqrt{2}\mathbf{a}\mathbf{s}_{\lambda}^{\mu}$$

Все последние формулы взяты из [2]§57 .

Если часть частиц вакуума образует полуцелый спин, а часть частиц вакуума образует целый спин, то образуется система с произвольным спином. Описывать их надо с долей целой шаровой функцией α и с долей нечетной шаровой функцией $1-\alpha$, зависящей от половины телесного угла, тогда спин будет равен

$$S = m\alpha + (1-\alpha)\sigma_z/2, \sigma_z = 2k+1; L(L+1) = j(j+1)\alpha + (1-\alpha)\frac{\sigma}{2}(\frac{\sigma}{2}+1)$$

а сферическая функция равна

$$\psi = \alpha P_j^m(\cos\theta)\exp(im\varphi) + (1-\alpha)P_\sigma^{\sigma_z}(\cos\Theta/2)\exp(i\sigma_z\Omega/2), \quad \sigma = 2m+1,$$

причем получается сумма четной и нечетной функции. Такая частица нарушает CPT инвариантность, так как операция инверсии координат не определена, частица не является четной или нечетной. Если орбитальный момент у целого спина положить равным нечетному числу, то такая частица будет нечетной и не наблюдается нарушения CPT инвариантности. При этом спин будет действительный, не нулевой.

Экспериментально определена и приведена в [2] поправка к возбужденному состоянию атома гелия при условии $L = 0,1,2$ и суммарному спину $S = 0,1$. При условии $S = 0$ поправка равна нулю, поэтому считалась удвоенная поправка при $S = 1/2$.

При суммарном спине электронов равном $S = 0$.

L	0	1	2
Δ_L, *эксперимент*	-0.14	0.012	-0.0022
Δ_L, *теория*	-0.137	0.0428	-0.00219

При суммарном спине электронов равном $S = 1$.

L	0	1	2
Δ_L, *эксперимент*	-0.296	-0.068	-0.0029
Δ_L, *теория*	-0.21	-0.058	-0.00292

При положительной поправки Ридберга наблюдается расхождение с экспериментом. При орбитальном квантовом числе, равном $L = 3$ поправка равна $\Delta_{L=3} = -10^{-7}$, поэтому ее экспериментальное значение не приведено в [2].

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. III. Электричество Физматлит, 2004, 656стр.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика Нерелятивистская теория т.III, Наука, М.,1969,768с.
3. B. Blok, L. Frankfurt, M. Strikman. On the shape of a rapid hadron in QCD // препринт arXiv:0811.3737 [hep-ph] (23 November 2008)