Коммутационные соотношения для частиц вакуума

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Теория частиц вакуума должна включать в себя коммутационное соотношение. Иначе она бы не заменяла уравнения квантовой механики. Докажем, что для потока частиц вакуума справедливо коммутационное соотношение. Для отдельных частиц вакуума оно не справедливо.

Согласно аналогии между уравнением Шредингера и уравнением Навье-Стокса см. [1] стр.79 с кинематической вязкостью $i\frac{\hbar}{2m}$, их решения связаны соотношением

$$V_l = -i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l}$$

Где ψ волновая функция уравнения Шредингера, V_l скорость потока частиц уравнения Навье-Стокса. Эту формулу можно переписать в виде

$$p_l = -i\hbar\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l}. \qquad (1)$$

Запишем коммутационное соотношение, и вычислим, чему оно равно

$$x_k p_l - p_l x_k = -i\hbar x_k\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l} + i\hbar\frac{\partial \ln\psi x_k}{\partial x_l} = -ih\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l}\delta_{lk}. \qquad (2)$$

Или вычисляя частную производную, получим коммутационное соотношение для значений координат и импульса. В квантовой механике им надо присвоить знак оператора.

$$(x_k p_l - p_l x_k)\psi = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x_l}\delta_{lk}.$$

Но это условие говорит о потоке частиц вакуума. Для отдельной частицы оно не справедливо. Если произведение двух величин минус переставленное произведение не равно нулю, то справедливо соотношение неопределенности. Если оно равно нулю, то возможны собственные значения двух величин. Проверяется путем усреднения частиц вакуума, или потоков частиц вакуума.

Рассматривая функции-оператор $(f_l\hat{g}_k - \hat{g}_k f_l)\psi$, $(\hat{f}_l g_k - g_k \hat{f}_l)\psi$ видим, что они не обязательно равны нулю. Найдем условие, когда они равны нулю. Совершенно аналогично переменным координата импульс, записывается соотношение для произвольных переменных, где одна из переменных рассматривается как независимый аргумент, а другая удовлетворяет аналогии между уравнением Шредингера и Навье-Стокса условию, которое можно формально записать в виде $\hat{g}_k = -i\hbar\frac{\partial}{\partial f_k} = g_k(f_k)$, причем f_l, g_k комплексные переменные (при этом функция $\hat{g}_k = g_k$ и переменная f_l не перестановочны в общем случае). Такая запись используется в линейных дифференциальных уравнениях с постоянными коэффициентами, когда оператору $\frac{d^n}{dt^n} = p^n$ ставится в соответствие функция комплексного аргумента, при этом обращаются с оператором, как с аргументом, так как она действует на постоянные коэффициенты, а экспонента, которой пропорционально решение сокращается. В данном случае коэффициенты не постоянны, поэтому произведение не перестановочно. Чтобы выражение было перестановочно, один из коэффициентов должен быть равен константе.

$$(f_l\hat{g}_k - \hat{g}_k f_l)\psi = -i\hbar f_l\frac{\partial \psi}{\partial f_k} + i\hbar\frac{\partial \psi f_l}{\partial f_k} = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial f_k}\delta_{lk}.$$

При коммутации имеем

$$\hat{g}_k f_l\psi - f_l\hat{g}_k\psi = \hat{g}_k f_l\psi - f_l g_k\psi = 0.$$

Если величина f_l переменная, то равенства нулю не будет, значит эта величина константа $f_l = const$, и тогда коммутационное соотношение равно нулю.

Аналогично выбирая независимую переменную g_l, а другая удовлетворяет согласно аналогии между уравнением Шредингера и Навье-Стокса $\hat{f}_l = -i\hbar\frac{\partial \ln\psi}{\partial g_l} = f_l$, причем f_l, g_k комплексные переменные

$$(\hat{f}_l g_k - g_k \hat{f}_l)\psi = -i\hbar\frac{\partial \psi g_k}{\partial g_l} + i\hbar g_k\frac{\partial \psi}{\partial g_l} = -i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial g_l}\delta_{lk}.$$

Аналогично доказывается, что переменная удовлетворяет равенству $g_k = const$, тогда коммутационное соотношение равно нулю.

Так как выбор независимой переменной произволен, получаем что для выполнения коммутационных соотношений обе переменные должны иметь постоянное значение. Если переменные не удовлетворяют коммутационному соотношению, то по крайней мере одна переменная являются функцией, и не равна константе. Возможна ситуация, когда переменные не коммутируют, но связаны функциональной зависимостью. Задача может иметь произвольное количество переменных, уравнение Шредингера и Навье-Стокса могут иметь произвольную размерность.

При этом для уравнения $-i\hbar\frac{\partial \ln\psi}{\partial g_l} = f_l(g_l)$ собственная функция должна удовлетворять условию $f_l(g_l)$, чтобы определялась потенциальная волновая функция. Собственные значения не обязательно являются константами и не обязательно являются гладкими, например, для атома водорода, радиальная часть импульса равна

$$P_r^{nl}(r) = -i\hbar\left(\frac{\partial \ln R_{nl}}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) = -i\hbar \frac{\partial[-r/n + (l+1)\ln r + \sum_{k=1}^{n_r} \ln(r - a_k)]}{\partial r} = \tag{3}$$
$$= -i\hbar\left(-\frac{1}{n} + \frac{l+1}{r} + \sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{r - a_k}\right)$$

При этом импульс не имеет собственное значение, равное константе, а является функцией и радиус является функцией. Т.е. значение импульса и координаты не коммутирует. Импульс содержит определяемую константу, как координату положения равновесия из решения уравнения Навье-Стокса в координатном представлении см. [2], но она не является собственным значением. Возможно при этом имеется функциональная связь между импульсом и координатой. Модуль и проекция орбитального момента импульса имеет собственное значение, а орбитальная координата не имеет собственного значения, значит эти переменные не коммутируют.

Координаты положения равновесия для координатного решения уравнения Навье-Стокса равны p_k, где решение ищем в виде

$$P_n(x_n) = -i\hbar \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_n} = \frac{\partial \ln \exp[i \sum_{k=1}^{N} p_k \int_{x_n^0}^{x_k} \varphi_k(x_k) dx_k / \hbar]}{\partial x_n} =$$
$$= -i\hbar \frac{\partial[i \sum_{k=1}^{N} p_k \int_{x_n^0}^{x_k} \varphi_k(x_k) dx_k / \hbar]}{\partial x_n} = p_n \varphi_n(x_n).$$

Решением, зависящим от радиуса, этого уравнения с помощью уравнения Шредингера и Навье-Стокса в случае атома водорода является функция $\varphi_r(r) = \varepsilon + \frac{\lambda}{r} + \sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{r - \beta_k}$

Тогда имеем $P(r) = p_r \varphi_r(r) = p_r[\varepsilon + \frac{\lambda}{r} + \sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{r-\beta_k}]$. Это разложение соответствует решению (3) при условии $p_r = 1, \varepsilon = -1/n, \lambda = l+1, \ \beta_k = a_k$. Ставится задача по нахождению этих коэффициентов. В статье [2], разработан метод нахождения этих коэффициентов в случае уравнения Шредингера и Навье-Стокса.

Воспользуемся определением момента импульса

$$ih\mathbf{l} = [\mathbf{r},\mathbf{p}] = -i\hbar[\mathbf{r},\nabla]$$

Где квадратные скобки соответствуют векторному произведению. Это определение потока вращающихся частиц вакуума, для отдельной частицы оператор импульса не справедлив, и импульс одной частицы не имеет такого вида. С помощью этого определения путем непосредственных вычислений получаем

$$[l_p, x_q] = ie_{pqs}x_s$$
$$[l_p, p_q] = ie_{pqs}p_s$$
$$[l_p, l_q] = ie_{pqs}l_s$$

Где квадратные скобки соответствуют коммутационному соотношению. На основании этих свойств выводятся и остальные свойства оператора импульса квантовой механики, такие как вычисление квадрата импульса, повышающий и понижающий оператор импульса уравнений квантовой механики. Значение матрицы оператора понижающего и повышающего момента импульса квантовой механики. Вычисление координатной формулы с частными производными по углам операторов проекции момента импульса и оператора квадрата импульса.

Но все это справедливо для потоков частиц вакуума. Для одиночной частицы вакуума это не оправданная экстраполяция. Интересно получить, не прибегая к аналогии между уравнением Навье-Стокса и уравнения

Шредингера эти результаты. Но уравнение Навье-Стокса - это усреднение закона движения Ньютона в комплексном пространстве на множества частиц с учетом вязкости, которая соответствует переходу частиц между разными уровнями скорости потока. Т.е. можно описывать единичный акт решения, для одной частицы вакуума, не заботясь о коммутационных соотношениях и в результате суммирования частиц вакуума в комплексном пространстве должен получиться правильный результат квантовой механики. Два исследуемых параметра можно сделать сопряженными, один обозначить как координаты, а другой как импульс. Волновые функции сопряженных параметров связаны преобразованием Фурье. Если при суммировании частиц вакуума получатся постоянные значения параметра, то коммутирующий с ним параметр должен быть аналитической функцией с несколькими полюсами.

Найдем импульсную волновую функцию, зависящую от радиуса для атома водорода

$$a(p_r) = \int_0^\infty \exp\{i\int_0^r [\varphi_r(r)dr - p_r r]\}r^2 dr =$$

$$= \int_0^\infty \prod_{n=1}^{n_r} (r-\beta_n)^i r^{i\lambda+2} \exp[i(\varepsilon - p_r)r]dr =$$

$$= \int_0^\infty r^{i\lambda+2} \exp[i(\varepsilon - p_r)r]dr = \frac{i\lambda+2}{i(\varepsilon - p_r)} \frac{i\lambda+1}{i(\varepsilon - p_r)} \cdots \frac{i\lambda - m + 2}{i(\varepsilon - p_r)} \times$$

$$\times \int_0^\infty r^{i\lambda - m} \exp[i(\varepsilon - p_r)r]dr = \prod_{k=1}^{N} \frac{\Gamma(i\lambda+3)}{[i(\varepsilon - p_r)]^{i\lambda+1}} =$$

$$== \prod_{k=1}^{N} \frac{(i\lambda+2)^{i\lambda=2} \exp(-i\lambda-2)\sqrt{2\pi(i\lambda+2)}}{[i(\varepsilon - p_r)]^{i\lambda+1}} (1 + \frac{1}{12(i\lambda+2)} + \ldots); n_r = 0 .$$

Эта волновая функция содержит особенность $\varepsilon = p_r$. Причем координата равна

$$r = i\frac{\partial \ln a}{\partial p_r} = i\frac{\partial (i\lambda+1)\ln(\varepsilon - p_r)}{\partial p_r} = \frac{\lambda - i}{\varepsilon - p_r} = -\frac{l+1-i}{1/n + p_r} .$$

Это решение уравнения Шредингера и Навье-Стокса в импульсном представлении.

Список литературы

1. *Якубовский Е.Г.* Исследование решения уравнения Навье – Стокса, «Реферативный журнал. Научное обозрение», т.1, 2016, стр. 46-80 http://science-review.ru/abstract/pdf/2016/1/632.pdf

2. Якубовский Е.Г. Определение потенциала ядра с помощью решения уравнения Шредингера. «Энциклопедический фонд России». 2017г. 7 стр. http://russika.ru/sa.php?s=1316