Первые интегралы уравнений Навье-Стокса

в градиентном представлении скорости

Якубовский Е.Г.

Уравнение Шредингера связано с уравнением Навье-Стокса. Получим из уравнения Шредингера уравнение Навье-Стокса в сферической системе координат. Получается первый интеграл трех уравнений Навье-Стокса для потенциального течения. Если воспользоваться разделением переменных, то этот первый интеграл распадается на три интеграла, каждый из которых является одномерным. Определяются разделяющие константы каждого из интегралов в случае декартовой системы координат по потенциальной энергии и определяется решение уравнений Навье-Стокса и Шредингера в новых условиях. Это же можно сделать в случае сферической системы координат, но получатся более сложные соотношения.

Уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+U\psi$$

Если взять волновую функцию в виде

$$\psi(r,\theta,\varphi)\exp(-iEt/\hbar)=\exp[-iEt/\hbar+\int_0^r\frac{\partial\ln\psi}{\partial r}dr+\int_0^\theta\frac{\partial\ln\psi}{\partial\theta}d\theta+\int_0^\varphi\frac{\partial\ln\psi}{\partial\varphi}d\varphi],$$

то получим дифференциальное уравнение относительно логарифма волновой функции. Если представить волновую функцию с разделяющимися переменными, то получим три уравнения, каждое относительно одной неизвестной, при этом потенциал надо представить в виде суммы трех потенциалов $U(r,\theta,\varphi)=U(r)+\frac{\hbar^2}{mr^2}[U(\theta)+\frac{U(\varphi)}{\sin^2\theta}]$. Продифференцировав эти уравнения по независимой переменной, получим уравнения, являющиеся усеченные уравнения Навье-Стокса.

$$\begin{aligned}
-E=-i\hbar\frac{\partial\ln\psi}{\partial t}=\frac{\hbar^2}{2m}[(\frac{\partial\ln\psi}{\partial r})^2+\frac{d^2\ln\psi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\ln\psi}{\partial r}]-U+\\
+\frac{\hbar^2}{2mr^2}[\frac{\partial^2\ln\psi}{\partial\theta^2}+(\frac{\partial\ln\psi}{\partial\theta})^2+\frac{\partial\ln\psi}{\partial\theta}ctg\theta]+\\
+\frac{\hbar^2}{2mr^2\sin^2\theta}[\frac{\partial^2 i\ln\psi}{\partial\varphi^2}-(\frac{\partial\ln\psi}{\partial\varphi})^2]
\end{aligned}\quad. \tag{1}$$

Продифференцируем это уравнение по радиусу, получим уравнение

$$\begin{aligned}
m\frac{\partial V_r}{\partial t}=[-mV_r\frac{\partial V_r}{\partial r}-i\hbar\frac{d^2V_r}{dr^2}/2-\frac{i\hbar}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{i\hbar V_r}{r^2}]-\frac{\partial U}{\partial r}+\\
-\frac{i\hbar}{2r^2}\frac{\partial^2V_r}{\partial\theta^2}-\frac{i\hbar\partial V_r}{2r^2\partial\theta}ctg\theta-mV_\theta\frac{\partial V_r}{r\partial\theta}+\frac{i\hbar\partial V_\theta}{r^2\partial\theta}+m\frac{V_\theta^2}{r}+\frac{i\hbar V_\theta}{r^2}ctg\theta\\
-\frac{i\hbar}{2r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2V_r}{\partial\varphi^2}-V_\varphi\frac{\partial V_r}{r\sin\theta\partial\varphi}+\frac{i\hbar}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{mV_\varphi^2}{r},\\
V_r=-i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial\ln\psi}{\partial r},V_r=-i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial\ln\psi}{r\partial\theta},V_\varphi=-i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial\ln\psi}{r\sin\theta\partial\varphi}
\end{aligned}\quad.$$

Это уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+V_\theta\frac{\partial V_r}{r\partial\theta}+V_\varphi\frac{\partial V_r}{r\sin\theta\partial\varphi}-\frac{V_\theta^2+V_\varphi^2}{r}=\\
=-\frac{i\hbar}{2m}[\Delta V_r-\frac{2V_r}{r^2}-\frac{2\partial\sin\theta V_\theta}{\sin\theta r^2\partial\theta}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}]-\frac{\partial U}{m\partial r}
\end{aligned}$$

Дифференцируя по углам, получим остальные уравнения Навье-Стокса. Уравнения Навье-Стокса в случае наличия потенциала скорости допускают первый интеграл (1).

В случае разделения переменных у волновой функции они допускают три первых интеграла

$$-E=\frac{\hbar^2}{2m}[V_r^2(r)+\frac{dV_r(r)}{dr}+\frac{2V_r(r)}{r}]-U(r)-\frac{\hbar^2\lambda}{2mr^2}$$
$$V_\theta(\theta)\cot\theta/2+\frac{\partial V_\theta(\theta)}{\partial\theta}/2+V_\theta^2(\theta)/2-U(\theta)=-\lambda/2-\frac{s^2}{2\sin^2\theta}.$$
$$V_\varphi^2(\varphi)/2+\frac{\partial V_\varphi(\varphi)}{\partial\varphi}/2-U(\varphi)=s^2/2$$
$$V_r(r)=\frac{\partial\ln\psi}{\partial r},V_\theta(\theta)=\frac{\partial\ln\psi}{\partial\theta},V_\varphi(\varphi)=\frac{\partial\ln\psi}{\partial\varphi}$$

Для частных случаях эти уравнения допускают решения в квадратурах, например, для атома водорода, эти уравнения имеют решение в безразмерном виде $V_r(r)=\frac{\partial\ln R_{nl}(r)}{\partial r},V_\theta(\theta)=\frac{\partial\ln P_l^m(\cos\theta)}{\partial\theta},V_\varphi(\varphi)=m$. Угадывая вид решения для скорости, можно проинтегрировать эти дифференциальные уравнения для разных потенциалов и квантовых числах.

Так, например, сделав во втором уравнении подстановку $V_\theta(\theta)=p(\theta)\sin\theta$ получим дифференциальное уравнение

$$p(\theta)\cos\theta-\sin^2\theta\frac{\partial p(\theta)}{\partial\cos\theta}/2+p^2(\theta)\sin^2\theta/2-U(\theta)=-\lambda/2-\frac{s^2}{2\sin^2\theta}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (2) из [1] на стр. 6 (нумерация формул перепутана надо смотреть формулу (2) на стр.6), если изменить знак неизвестной функции при нулевом угловом потенциале и определить $z=\cos\theta,s=0$.

Получим $p(\theta)=-\frac{\partial\ln P_l^m(\cos\theta)}{\partial\cos\theta}=-\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{\cos\theta-\alpha_k}$ при целом орбитальном квантовом числе. Подстановка этой суммы и приведение дроби к общему знаменателю определит при условии $\lambda=l(l+1),m=0$ функцию Лежандра. При условии $l=0$ получаем $p(\cos\theta)=0,P_1^0(\cos\theta)=1$. При условии $l=1$ получим решение $p(\cos\theta)=-\frac{1}{\cos\theta},\alpha_1=0,P_1^0(\cos\theta)=\cos\theta$. В случае произвольного $\lambda,s=0$ решение надо искать в виде $p(\theta)=-\frac{\mu}{\cos\theta}-\sum_{k=1}^{l}[\frac{1}{\cos\theta-\alpha_k}+\frac{1}{\cos\theta+\alpha_k}]$ см. [1].

Пользуясь аналогией решения для атома водорода, можно получить новое решение и для разной зависимости потенциала от радиуса по аналогичному принципу, вычислив при этом собственную энергию.

Для контроля вычислений проведем вывод уравнения Навье-Стокса в декартовой системе координат. Волновая функция равна

$$\psi(t,r,\theta,\varphi) = \exp[-iEt/\hbar + \int_0^{x_k} \frac{\partial \ln\psi}{\partial x_k} dx_k]$$

Тогда уравнение Шредингера запишется в виде

$$-i\hbar \frac{\partial \ln\psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{k=1}^{3} [(\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_k})^2 + \frac{d^2 \ln\psi}{dx_k^2}] - U \qquad (2)$$

Продифференцируем уравнение по координате, получим

$$m\frac{\partial V_n}{\partial t} = \sum_{k=1}^{3} [-mV_k \frac{\partial V_n}{\partial x_k} - \frac{i\hbar}{2} \frac{d^2 V_n}{dx_k^2}] - \frac{\partial U}{\partial x_n}$$

$$V_n = \frac{-i\hbar}{m} \frac{\partial \ln\psi}{\partial x_n}$$

Разделим это уравнение на массу, получим

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} V_k \frac{\partial V_n}{\partial x_k} = -\frac{i\hbar}{2m} \sum_{k=1}^{3} \frac{d^2 V_n}{dx_k^2} - \frac{\partial U}{m \partial x_n}.$$

Получим уравнение Навье-Стокса с кинематической вязкостью $\nu = -\frac{i\hbar}{2m}$.

Первый интеграл уравнения Навье-Стокса в случае потенциальной скорости равен (2). При разделении переменных он распадается на три первых интеграла, которые запишем в безразмерном виде

$$\begin{gathered} -E = V_k^2(x_k) + \frac{dV_k}{dx_k} - U(x_k) - E_n, k = 1 \\ -E_n = V_n^2(x_n) + \frac{dV_n}{dx_n} - U(x_n), n = 2,3 \quad . \\ V_k = \frac{\partial \ln\psi}{\partial x_k}, k = 1,...,3 \end{gathered} \qquad (3)$$

Решим второе уравнение (3). При условии $V_m(x_m)=\sqrt{-E_m}+\alpha_m(x_m)+\sum_{k=1}^{n_r}\frac{1}{x_m-\beta_k}$.

Тогда получим уравнение

$$2\sqrt{-E_m}[\alpha_m(x_m)+\sum_{k=1}^{n_r}\frac{1}{x_m-\beta_k}]+\alpha_m^2(x_m)+2\alpha_m(x_m)\sum_{k=1}^{n_r}\frac{1}{x_m-\beta_k}+\alpha'_m(x_m)-U(x_m)=0$$

.

Тогда в случае радиального квантового числа $n_r=0$, получаем уравнение

$$2\sqrt{-E_m}\alpha_m(x_m)+\alpha_m^2(x_m)+\alpha'_m(x_m)-U(x_m)=0.$$

Это уравнение в случае $U(x_m)$ полинома $2N$ степени содержит $2N+1$ уравнения, так как образуется полином $2N$ степени. Функция $\alpha_m(x_m)$ является полиномом степени N содержит $\mathrm{N}+1$ неизвестных коэффициентов. Плюс один неизвестных коэффициента E_m. Из равенства количества неизвестных количеству уравнений имеем $N=1$. Задача имеет не единственное решение, так как необходимо решать квадратное уравнение. При другом радиальном числе прибавится степень уравнения и на столько же прибавится количество неизвестных коэффициентов β_k. Среди коэффициентов потенциала $U(x_m)$ степени $2N$ могут быть $p\le N-1$ неизвестных коэффициента, остальные коэффициенты надо задавать. Тогда степень полинома равна $N=p+1$.

Решим задачу в случае $p=0$, $n_r=0$. Имеем уравнение

$$2\sqrt{-E_m}(ax+b)+a^2x^2+2abx+b^2+a-c_0-c_1x-c_2x^2=0.$$

Эта система уравнений имеет два решения $a=\pm\sqrt{c_2}, E_m=c_0-\frac{c_1^2}{4c_2}\mp\sqrt{c_2}$

$b=\pm\frac{c_1}{2\sqrt{c_2}}-\sqrt{-E_m}$. При величине $c_2<0$, решение будет комплексным, турбулентным, причем потенциальная энергия имеет максимум. При условии $c_2>0$ минимума потенциальной энергии решение будет комплексным, турбулентным, если $E_m = c_0 - \frac{c_1^2}{4c_2} \mp \sqrt{c_2} > 0$. Волновая функция равна $\psi = \exp(\pm\sqrt{c_2}x_m^2/2 + (\pm\frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{-E_m})x_m]$ в случае $c_2 < 0$ имеет комплексную фазу и на конечном отрезке реализуется. При условии положительного $c_2 > 0$ надо выбрать отрицательное значение $a = -\sqrt{c_2} < 0$, тогда волновая функция имеет максимум, и на бесконечности координаты стремится к нулю.

Решение уравнения Навье-Стокса имеет вид $V_m(x_m) = \pm\sqrt{c_2}x_m/L \pm \frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{-E_m}$ и справедливо для ограниченной области и при перепаде давления $U(x_m) = p(x_m) = c_0 + c_1x_m/L + c_2x_m^2/L^2$ при энергии потока $E_m = c_0 - \frac{c_1^2}{4c_2} \mp \sqrt{c_2}/L$.

Получив решение для трех направлений скорости нужно использовать уравнение неразрывности для вычисления связи между тремя решениями $\mathrm{div}\mathbf{V} = 0$. В случае прямоугольного параллелепипеда в трех направлениях сечения реализуется равенство нулю дивергенции скорости $\sum_{k=1}^{3} \pm\sqrt{c_{2k}}/L_k = 0$ и наряду с постоянной компонентой скорости потока $\frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{-E_m} = const, c_1/L << 1, c_2/L^2 << 1$ имеется линейный по координате член.

Это решение для прямоугольного параллелепипеда, у которого на трех гранях скорость равна $\pm\frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{-E_m}$, на остальных гранях скорость равна нулю, при этом выполняется $\sum_{k=1}^{3} \pm\sqrt{c_{2k}}/L_k = \mathrm{div}\mathbf{V}(0) = 0$, т.е. втекаемые и вытекаемые потоки компенсируются. Кроме того, должно выполняться условие $\sqrt{c_2} + \frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{-E_m} = 0$, т.е. скорость на гранях прямоугольного параллелепипеда, противоположных граням, в которых поток втекает, равна нулю. Такой своеобразный бассейн с вращением жидкости по сложному закону.

В случае $n_r = 1$ получаем систему уравнений

$$[2\sqrt{-E_m}\alpha_m(x_m) + \alpha_m^2(x_m)](x_m - \beta_1) + 2(\sqrt{-E_m} + 1)\alpha_m(x_m) + [\alpha'_m(x_m) - U(x_m)](x_m - \beta_1) = 0.$$

Которая в случае $U(x_m)$ полинома $2N$ степени содержит $2N + 2$ уравнения, так как образуется полином $2N + 1$ степени. Функцию $\alpha_m(x_m)$ возводится в квадрат и умножается на линейную функцию и является полиномом степени N содержит $\mathrm{N} + 1$ неизвестных коэффициентов. Плюс два неизвестных коэффициента β_1, E_m. Из равенства количества неизвестных количеству уравнений имеем $N = 1$. Задача имеет не единственное решение, так как надо решать квадратное уравнение. При другом радиальном числе прибавится степень уравнения и на столько же прибавится количество неизвестных коэффициентов β_k. Среди коэффициентов потенциала $U(x_m)$ степени $2N$ могут быть $p \le N - 1$ неизвестных коэффициента, остальные коэффициенты надо задавать. Тогда степень полинома равна $N = p + 1$. Это решение описывает бассейн в виде прямоугольного параллелепипеда с особенностями при определенных значениях возможно комплексной координаты, т.е. пульсации мнимой части координаты с амплитудой, равной мнимой части. В случае скорости, изменяющейся по закону $V_k(x_k) = \dfrac{1}{x_k - \beta_{1k}}$ в точке с координатой $x_k = \mathrm{Re}\,\beta_{1k}$ наблюдается колебание с амплитудой $-1/\mathrm{Im}\,\beta_{1k}$ с амплитудой, меньшей, чем больше мнимая часть $\mathrm{Im}\,\beta_{1k}$. Энергия вихря пропорциональна квадрату скорости, так как она мнимая, то энергия вихря отрицательная. Поэтому получается, чем больше мнимая часть знаменателя, тем энергия вихря больше $E = -1/(\mathrm{Im}\,\beta_{1k})^2$. При встрече двух вихрей наблюдается не синхронное вращение потока, а не колебание, т.е. бурление потока.

Покажем, что уравнение Шредингера определяет уравнение неразрывности в случае комплексной скорости. Для этого запишем уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi^2}{2\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi\Delta\psi + U\psi^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}div(\psi\nabla\psi) + \frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\psi)^2 + U\psi^2.$$

Получим равенство

$$\frac{\partial\psi^2}{2\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\mathrm{div}(\psi\nabla\psi) - \frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla\ln\psi)^2 + U\psi^2 / i\hbar. =$$
$$= \frac{\hbar}{2m}\mathrm{div}[\psi^2(i\nabla\ln\psi)] - \frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla\ln\psi)^2 + U\psi^2 / i\hbar = .$$
$$= -\mathrm{div}(\psi^2\mathbf{V})/2 + \frac{\psi^2}{i\hbar}(-mV^2/2 + U),$$

$$\frac{\partial\psi_{nl}^2}{\partial t} + \mathrm{div}(\psi_{nl}^2\mathbf{V}_{nl}) + i\frac{\psi_{nl}^2}{\hbar}2(-mV^2/2 + U) = 0$$
$$\frac{\partial < \ln\psi_{nl}^2 >}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} < \frac{\partial\ln\psi_{nl}^2}{\partial x^k}V_{knl} > + div < \mathbf{V}_{nkl} > + i\frac{6E_{nl}}{\hbar} = 0$$
$$E_{nl} = < \frac{mV_{nl}^2}{2} + U > = < U > /2; \mathbf{V} = -i\frac{\hbar}{m}\nabla\ln\psi;$$

Где воспользовались теоремой вириала, кинетическая энергия равна половине потенциальной с обратным знаком. Получаем уравнение неразрывности потока с концентрации частиц вакуума ψ^2 и соответствующей скоростью потока с дополнительным мнимым членом, зависящим от потенциала частиц. Скорость частиц вакуума комплексная $\mathbf{V} = -i\frac{\hbar}{m}\nabla\ln\psi$, так как волновая функция комплексная.

Так как квадрат плотности волновой функции пропорционален комплексной концентрации среды, имеем следующее уравнение неразрывности для движения элементарных частиц в газовой среде. Где изменение комплексной концентрации среды вызывает двигающаяся частица

$$< \frac{\partial \ln n}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \ln n}{\partial x^k} V_k > + < \mathrm{div}\mathbf{V} > + i\frac{3 < U >}{\hbar} = 0$$

$$< \frac{d \ln n}{dt} > + < \mathrm{div}\mathbf{V} > + i\frac{6E_{nl}}{\hbar} = 0 .$$

Действительная часть комплексной скорости среды описывает среднее значение концентрации, а мнимая часть ее среднеквадратичное отклонение.

$$n(x,y,z,t) = n_0(x,y,z)\exp[-6iE_{nl}(t-t_9)/\hbar - \int_0^t \mathrm{div}\mathbf{V}dt] = \\ = n_0(x,y,z)\exp[-6i\omega(t-t_9) - \int_0^t \mathrm{div}\mathbf{V}dt] . \quad (4)$$

Причем модуль концентрации изменяется во времени, меняется действительная и мнимая часть, т.е. среднее значение переходит в среднеквадратичное отклонение и реализуется обратный процесс. Потенциальная энергия может быть, как электромагнитный, так и гравитационной. Причем при изменении концентрации среды меняется и потенциал. Модуль величины концентрации меняется, при убывании концентрации в одном месте, она растет в другом, суммарное количество энергии и потенциала сохраняется. В момент образования Вселенной все величины были комплексные, т.е. колебались во времени, образуя среднеквадратичное отклонение, т.е. мнимую часть. Потенциал не является исключением, он был комплексным. Образуется комплексный потенциал в одном месте, имеется комплексно-сопряженный потенциал в другом месте, концентрация частиц вакуума возрастает или убывает, таким образом образовались элементарные частицы и из них макротела. Наличие отрицательной дивергенция скорости вызывает рост концентрации среды, положительная дивергенция скорости вызывает уменьшение концентрации. Приращение скорости вызывает отток частиц из точки с нулевой дивергенцией.

Данное решение при отрицательном значении дивергенции описывает повышение плотности среды. Для неизменном модуле плотности среды дивергенция скорости должна быть мнимая или нулевая. В случае мнимой фазы в формуле (4), модуль плотности среды равен константе и происходит колебание плотности среды за счет собственного вращения – спина.

Но при некоторых значениях потенциала получатся потенциальное комплексное турбулентное решение уравнения Навье-Стокса с учетом нелинейности, так как коэффициенты полинома $\alpha_m(x_m)$ возводятся в квадрат. Это произойдет при отрицательном потенциале. При условии, что член потенциала с наибольшей степенью отрицателен гарантированно получится комплексное решение. В частности для решенной задачи требуется положительность собственной энергии для получения комплексного решения. Проблеме турбулентных комплексных решений уравнения Навье-Стокса посвящены статьи [2], [3], [4]. Но проблемы комплексного турбулентного решения уравнения Навье-Стокса на этом не кончаются. Надо пересчитывать мнимую часть скорости потока, или мнимую часть числа Рейнольдса потока в действительную часть. Мнимая часть числа Рейнольдса потока существенным образом зависит от степени шероховатости. Необходимо усреднить по степени шероховатости, причем усреднение по средней высоте шероховатости зависит от тангенса наклона шероховатости и безразмерного давления или числа Рейнольдса см. [3] стр. 71.

Таким образом можно решить уравнение Шредингера и получить потенциальное решение уравнения Навье-Стокса с учетом нелинейности и комплексной скорости.

Литература

1. Якубовский Е.Г. Полиномы Лежандра не целого порядка. «Энциклопедический фонд России», 2017, 11 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1505253784.pdf
2. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION I. THE GENERAL SOLUTION OF NONLINEAR

ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 60-66. https://world-science.ru/pdf/2016/3/14.pdf

3. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION II. THE USE OF LAMINAR SOLUTIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 67-83.https://world-science.ru/pdf/2016/3/15.pdf
4. YAKUBOVSKIY, E. G. "STUDY OF NAVIER–STOKES EQUATION SOLUTION III. THE PHYSICAL SENSE OF THE COMPLEX VELOCITY AND CONCLUSIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 84-87. https://www.world-science.ru/pdf/2016/3/16.pdf