

## Углы сферической системы координат и отрицательный радиус

Якубовский Е.Г.

e-mail [yakubovski@rambler.ru](mailto:yakubovski@rambler.ru)

Сходимость рядов по сферическим функциям плохая из-за разного значения косинуса на концах изменения при вычислении скалярного произведения. Если ввести отрицательный радиус на второй части изменения меридионального угла, то скалярное произведение можно обобщить на весь период угла, и тогда сферические функции будут периодическими. Только надо учитывать, когда радиус положителен, а когда отрицателен. Формула для оператора Лапласа содержит квадрат радиуса. Формулы остаются неизменными при таком преобразовании и сходимость ряда не улучшается. Но перейдя в комплексное пространство удастся построить периодические углы, однозначно связанные с декартовыми координатами. Вычислен метрический тензор и его определитель. Вычисления производились в двух случаях, с комплексно сопряженным произведением и без комплексного сопряжения. Удалось определить оператор проекции момента импульса для двух углов в двух случаях. с комплексно сопряженным произведением и без комплексного сопряжения. Построен оператор Лапласа в обоих случаях. Получилось альтернативное уравнение для двух случаев. Но осмыслить полученные результаты пока не удалось. Получились другие квантовые числа.

Является большим заблуждением думать, что меридиональный угол изменяется на отрезке  $[0, \pi]$ . Это приводит к плохой сходимости рядов, так как угол не периодичен. На самом деле сферическая функция содержит  $\cos^n \theta$  разложение которого определяет угол  $\cos n\theta$ , выходящий за границы  $[0, \pi]$ . При этом будут существовать две частоты вращения, по меридиональному и азимутальному углу. Причем эти углы будут определяться однозначно из преобразования к декартовым координатам. Но углы будут однозначно

соответствовать координатам  $\varphi = \arg(x_1 + ix_2) + 2\pi k, \theta = \arg(x_3 + i\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) + 2\pi k$ .

Определитель метрического тензора равен  $r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ . Преобразование координат

$$x_1 = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$x_2 = r \sin \theta \cos \varphi.$$

$$x_3 = r \cos \theta$$

При переходе к углу  $\theta \in [\pi, 2\pi]$  произойдет инверсия знака координат  $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta, \sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$ , но углы определяются однозначно при этих значениях периода, только для сохранения периодичности углов меняется знак радиуса. Комплексный радиус используется при описании не сферического тела см. [1]. В зависимости от значения меридионального угла радиус бывает положительный и отрицательный. Сохраняются ортогональные сферические функции, только значение аргумента угла изменяется. Но необходимо рассматривать отдельно пространство с положительным и отрицательным радиусом, при этом угол меняется непрерывно и преобразование координат непрерывное, и производная по радиусу непрерывная, т.е. метрический тензор непрерывен. Радиус в операторе Лапласа входит в квадрате, так что оператор не изменится. Но дифференцировать уравнение надо по радиусу, если угол изменяется  $\theta \in [0, \pi]$  и по отрицательному радиусу, если  $\theta \in [\pi, 2\pi]$ . Знак определителя метрического тензора, умноженный на дифференциалы сохраняется. Интегрировать при вычислении скалярного произведения векторов надо по всему периоду, во второй половине радиус меняет знак и ортогональность полином Лежандра сохранится, просто скалярное произведение умножится на два. Полином Лежандра изменится на множитель, но вычислять скалярное произведение надо отдельно со единичным множителем плюс по изменению углов  $\theta \in [0, \pi]$  и с единичным множителем знака минус, связанным с  $\theta \in [\pi, 2\pi]$  отрицательным радиусом  $dr$ . При этом сходимость ряда по функции Лежандра

улучшится, так как каждый член ряда в начале периоде и в его конце будет принимать одинаковые значения.

К сожалению формулы описывающие переменные сферической системы координат инвариантны относительно изменения знака у радиуса и добавки угла  $\pi$  к меридиональному углу, например

$$\exp(ikr \cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\cos \theta),$$

$$j_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+1/2}(kr) = 2^n (kr)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (n+m)!}{m!(2n+2m+1)!} (kr)^{2m}.$$

Поэтому коэффициенты ряда не меняются. При ортонормированных функциях, наблюдается плохая сходимость ряда, коэффициент стремится к бесконечности. Несмотря на то, что угол периодический, так как радиус меняет знак, радиальная функция меняет знак и сходимость не улучшается.

В комплексном пространстве не надо менять значение радиуса и углы будут периодическими

$$x_1 = \exp(i\theta)r \sin \varphi$$

$$x_2 = \exp(i\theta)r \cos \varphi.$$

$$x_3 = \exp(i\theta)r$$

Что эквивалентно

$$z = x_2 + ix_1 = r \exp(i\theta + i\varphi)$$

$$x_3 = r \exp(i\theta)$$

Углы определяются однозначно

$$\varphi = \arg(x_2 + ix_1) = \arg[i(\operatorname{Re} x_1 + \operatorname{Im} x_2) + \operatorname{Re} x_2 - \operatorname{Im} x_1] - \arg(x_3) + 2\pi k, \theta = \arg(x_3) + 2\pi k. \quad \text{И}$$

следовательно сходимость улучшится.

Выведем метрический тензор в комплексном пространстве

$$ds^2 = g_{kl} dq^k dq^l = (g_{kl} + g_{lk}) dq^k dq^l / 2 = (g_{kl} + g_{kl}^*) dq^k dq^l / 2 = \operatorname{Re} g_{kl} dq^k dq^l$$

$$g_{lk} = \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \frac{\partial x_i^*}{\partial q_k}$$

Метрический тензор равен  $g_{kl} = (\frac{\partial x_l}{\partial q_k} \frac{\partial x_l^*}{\partial q_l} + \frac{\partial x_l}{\partial q_l} \frac{\partial x_l^*}{\partial q_k})/2$

$g_{rr} = 2, g_{\theta\theta} = 2r^2, g_{r\theta} = 0, g_{r\varphi} = 0, g_{\theta\varphi} = r^2, g_{\varphi\varphi} = r^2$  и надо строить другие ортогональные полиномы. Корень из определителя метрического тензора равен  $\sqrt{2}r^2 dr d\theta d\varphi$ . Ортогональный полином произвольного порядка  $P_0(\theta) = 1, \dots, P_n(\theta) = \exp(in\theta)$ . Скалярное произведение считается по формуле

$\int_0^{2\pi} P_k^*(\theta) P_n(\theta) d\theta = 2\pi \delta_{kn}$ . При этом нормировка функции осуществляется по

формуле  $\int_0^{2\pi} P_n^*(\theta) P_n(\theta) d\theta = 2\pi$ .

В случае соответствия углам классического преобразования действительных координат значения метрического тензора не диагональные

$$x_1 = -i \exp(i\theta) r \sin \varphi$$

$$x_2 = -i \exp(i\theta) r \cos \varphi$$

$$x_3 = \exp(i\theta) r$$

Величины  $g_{rr} = g_{\theta\theta} = 0, g_{r\theta} = (-i+1)r, g_{\theta r} = (i-1)r, (g_{r\theta} + g_{\theta r})/2 = 0, g_{r\varphi} = 0, g_{\theta\varphi} = r^2$ .

Величина  $g_{\varphi\varphi} = -r^2$  при значении определителя метрического тензора, равного нулю. Т.е. дифференциальные уравнения в этой системе координат невозможны и надо описывать орбитальный и спиновый момент с помощью матриц. Но в действительном пространстве удалось описать орбитальный момент с большими проблемами для собственных значений и собственных функций. Орбитальный момент считается только с конечным полиномом Лежандра при целом орбитальном моменте для модуля орбитального момента и одной проекции. используя не стандартное комплексное новое преобразование координат удалось получить простые собственные функции, соответствующие простым преобразованиям.

В новых координатах имеем

$$\begin{aligned}\widehat{P}_\theta \psi_n &= n \psi_n, \psi_n = \exp(in\theta), \widehat{P}_\theta = \frac{\partial}{\partial i\theta} \\ \widehat{P}_\varphi \psi &= m \psi, \psi = \exp(im\varphi), \widehat{P}_\varphi = \frac{\partial}{\partial i\varphi}\end{aligned}\quad (1)$$

Тогда имеем

$$\langle n | a | n \rangle = \int_0^{2\pi} \psi_n^*(\theta) a \psi_n(\theta) d\theta = n \int_0^{2\pi} \psi_n^*(\theta) \psi_n(\theta) d\theta = n$$

Подсчитаем матрицу, обратную к матрице метрического тензора

$$g^{lk} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2r^2 & r^2 \\ 0 & r^2 & r^2 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} r^4 & 0 & 0 \\ 0 & 2r^2 & -2r^2 \\ 0 & -2r^2 & 4r^2 \end{vmatrix} / 2r^4 = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & -1/r^2 \\ 0 & -1/r^2 & 2/r^2 \end{vmatrix}$$

Оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial q^k}) = \frac{1}{2r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + 2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 4 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 4 \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \right] \quad (2)$$

Оба оператора (1) коммутируют с оператором (2), т.е. можно получить собственные значения для всех операторов. При этом оператор модуля момента импульса имеет собственные значения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \right) \psi_{nm} = -(n^2 + 2m^2 - 2nm) \psi_{nm}, \psi_{nm} = \exp(in\theta + im\varphi).$$

Оказалось что состояние квантовой системы описывают две проекции момента импульса, а не модуль момента импульса и его проекция.

Но в комплексном пространстве нельзя использовать произведение комплексно-сопряженных величин. Так тогда величины модуля определяются положительными, и при вычислениях могут оказаться отрицательными, что вызывает перенормировки. Поэтому построим алгоритм без произведения комплексно сопряженных величин.

Выведем метрический тензор в комплексном пространстве, удовлетворяющим свойствам

$$ds^2 = g_{kl} dq^k dq^l = (g_{kl} + g_{lk}) dq^k dq^l / 2$$

$$g_{lk} = \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

Определитель метрического тензора равен

$$g_{rr} = 2 \exp(2i\theta/3), g_{\theta\theta} = 2r^2 \exp(2i\theta/3)/9, g_{r\theta} = 2ir \exp(2i\theta/3)/3, g_{r\varphi} = 0,$$

$$g_{\theta\varphi} = 0, g_{\varphi\varphi} = r^2 \exp(2i\theta/3)$$

и надо строить другие ортогональные полиномы. Корень из определителя метрического тензора равен  $2^{3/2} r^2 \exp(i\theta) dr d\theta d\varphi / 9$ . Ортогональный полином произвольного порядка  $P_0(\theta) = \exp(-i\theta), \dots, P_n(\theta) = \exp[-i(n+1)\theta]$ . Скалярное

произведение считается по формуле  $\int_0^{2\pi} P_k^*(\theta) P_n(\theta) \exp(i\theta) d\theta = 2\pi \delta_{k(n-1)}$ . При этом

нормировка функции осуществляется по формуле  $\int_0^{2\pi} P_{n+1}^*(\theta) P_n(\theta) \exp(i\theta) d\theta = 2\pi$ .

Построим повышающий индекс и понижающий индекс оператор.

$$\begin{aligned} \hat{a} \psi_n[\exp(2in\theta)] &= n \psi_{-n}, \psi_n = \exp(-in\theta), \hat{a} = \frac{\partial[\exp(2in\theta)]}{\partial i\theta} \\ \hat{a}_+ \psi_n[\exp(2in\theta)] &= n \exp(-i\theta) \psi_{-(n+1)}, \psi_n = \exp(-in\theta), \hat{a}_+ = \frac{\partial[\exp(2in\theta)]}{\partial i\theta} \\ \hat{a}_- \psi_n[\exp(2in\theta)] &= n \exp(i\theta) \psi_{-(n-1)}, \psi_n = \exp(-in\theta), \hat{a}_- = \frac{\partial[\exp(2in\theta)]}{\partial i\theta} \\ \hat{P}_\varphi \psi_m \exp(-2im\varphi) &= m \psi_{-m}, \psi_m = \exp(im\varphi), \hat{P}_\varphi = \frac{\partial[\exp(-2im\varphi)]}{\partial i\varphi} \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}
\langle n | \hat{a} | n \rangle &= \int_0^{2\pi} \psi_n(\theta) \hat{a} [\psi_n(\theta) \exp(2in\theta) \exp(i\theta)] d\theta = (n+1) \int_0^{2\pi} \psi_n(\theta) \psi_{-n}(\theta) \exp(i\theta) d\theta = 0 \\
\langle n+1 | \hat{a}_+ | n \rangle &= \int_0^{2\pi} \psi_{n+1}(\theta) \hat{a}_+ [\psi_n(\theta) \exp(2in\theta) \exp(i\theta)] d\theta = \\
&= (n+1) \int_0^{2\pi} \psi_{n+1}(\theta) \psi_{-(n+1)}(\theta) d\theta = n+1 \\
\langle n-1 | \hat{a}_- | n \rangle &= \int_0^{2\pi} \psi_{n-1}^*(\theta) \hat{a}_- [\psi_n(\theta) \exp(2in\theta) \exp(-i\theta)] d\theta = \\
&= (n-1) \int_0^{2\pi} \psi_{n-1}(\theta) \psi_{-(n-1)}(\theta) d\theta = n-1
\end{aligned}$$

Подсчитаем матрицу, обратную к матрице метрического тензора

$$g^{lk} = 2^3 \exp(2i\theta) / 9 \begin{vmatrix} 2 & 2ir & 0 \\ 2ir & 2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} r^4 & -2ir^3 & 0 \\ -2ir^3 & 2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8r^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1/2 & -i/r & 0 \\ -i/r & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4/r^2 \end{vmatrix} 9/4$$

Оператор Лапласа имеет вид

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{9}{4r^2 \exp(i\theta)} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \exp(i\theta)) \frac{\partial}{\partial r} - \right. \\
&\left. -i \frac{\partial r \exp(i\theta)}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} - i \frac{\partial r \exp(i\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2 \exp(i\theta)}{\partial \theta^2} + 4 \frac{\partial^2 \exp(i\theta)}{\partial \varphi^2} \right]
\end{aligned}$$

Приведем подобные члены

$$2\Delta = \frac{9}{4} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{9}{2r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{9i}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} + \frac{9\partial^2}{2r^2 \partial \theta^2} + \frac{9i}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{18\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} \quad (4)$$

Оба оператора (3) не коммутируют с оператором (4), т.е. нельзя получить собственные значения для всех операторов. При этом оператор модуля момента импульса имеет собственные значения

$$\left( \frac{\partial^2}{2\partial \theta^2} + \frac{2\partial^2}{\partial \varphi^2} - i \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \psi_{nm} = -(n^2/2 + 2m^2 + in) \psi_{nm}, \psi_{nm} = \exp(-in\theta + im\varphi).$$

Оказалось что состояние квантовой системы описывают две проекции момента импульса, а не модуль момента импульса и его проекция.

Радиальная часть оператора Лапласа имеет вид

$$\Delta = \frac{9}{8} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{9(1+n)}{4r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{9(n^2/2 + 2m^2 + in)}{2r^2}.$$

При условии  $n = -2$  получаем волновую функцию,  $\psi_{(-2)m} = R_{(-2)m}(r) \exp(2i\theta + im\varphi)$  которая соответствует переходу на волновую функцию  $\psi_{1m} = R_{1m}(r) \exp(-i\theta + im\varphi)$  с  $n = 1, \Delta\theta = -3\theta, \Delta n = 3$ .

получаем уравнение, которое можно решить

$$\Delta = \frac{9}{8} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{8(m^2 + 1 - i)}{r^2} \right]$$

#### Литература

1. Якубовский Е.Г. Преобразование произвольного тела в сферу комплексного радиуса. «Энциклопедический фонд России», 2017, 18 стр. [http://russika.ru/userfiles/390\\_1492726821.pdf](http://russika.ru/userfiles/390_1492726821.pdf)