Решение уравнения Клейна-Гордона

описывающее спин частицы

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Уравнение Клейна-Гордона связано с уравнением Навье-Стокса. Получим из уравнения Клейна-Гордона уравнение Навье-Стокса. Получается первый интеграл трех уравнений Навье-Стокса для потенциального течения. Если воспользоваться разделением переменных, то этот первый интеграл распадается на три интеграла, каждый из которых является одномерным. Определяются разделяющие константы каждого из интегралов в случае декартовой системы координат по потенциальной энергии и определяется решение уравнений Навье-Стокса и Клейна-Гордона в новых условиях. В случае отсутствия потенциала, т.е. в свободном пространстве, в этих уравнения имеется решение для скорости частицы в виде дельта функции с мнимым множителем. Но аргумент дельта функции линейный по координате, т.е. дельта функция грубо говоря не равна нулю в одной точке. Т.к. множитель у дельта функции мнимый и радиус вращения центра инерции нулевой, она описывает собственное вращение частицы, т.е. спин частицы.

В статье [1] описаны координаты, описывающие произвольный спин в декартовом пространстве с помощью особых углов. Оно сводится к угловой форме оператора Лапласа, описываемого с помощью половины телесных углов. Воспользуемся этим описанием, часть этого описания приведена в приложении. При этом к стандартному оператору Лапласа добавляется оператор с коэффициентом, зависящим от радиуса

$$\frac{\alpha}{4r^2}[\frac{1}{\sin\Theta_\alpha/2}\frac{\partial}{\partial\Theta_\alpha/2}(\sin\Theta_\alpha/2\frac{\partial}{\partial\Theta_\alpha/2})+\frac{1}{\sin^2\Theta_\alpha/2}\frac{\partial^2}{\partial(\Omega_\alpha/2)^2}]$$

Проведем вывод уравнения Навье-Стокса в декартовой системе координат для уравнения Клейна-Гордона. Волновая функция равна

$$\psi(x_0,...,x_3,\Omega_\alpha,\Theta_\alpha)=\exp(\ln\psi-\ln\psi_0)=\exp[\int_0^{x_k}\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_k}dx_k+\frac{\partial\ln\psi}{\partial\Omega_\alpha}d\Omega_\alpha+\frac{\partial\ln\psi}{\partial\Theta_\alpha}d\Theta_\alpha]$$

Тогда уравнение Клейна-Гордона запишется в виде

$$\begin{gathered}m^2c^2/\hbar^2=-(\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_0})^2-\frac{d^2\ln\psi}{dx_0^2}+\sum_{k=1}^{3}[(\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_k})^2+\frac{d^2\ln\psi}{dx_k^2}]+\\+\frac{\alpha}{r^2\sin^2\Theta_\alpha/2}[(\frac{\partial\ln\psi}{\partial\Omega_\alpha})^2+\frac{d^2\ln\psi}{d\Omega_\alpha^2}]+\frac{\alpha}{r^2}[(\frac{\partial\ln\psi}{\partial\Theta_\alpha})^2+\frac{d^2\ln\psi}{d\Theta_\alpha^2}+\cot(\Theta_\alpha/2)\frac{d\ln\psi}{2d\Theta_\alpha}]\end{gathered}\tag{2}$$

Тогда первый интеграл запишется в виде

$$\begin{gathered}m^2c^2/\hbar^2=(\frac{E}{c\hbar})^2+\sum_{k=1}^{3}[(\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_k})^2+\frac{d^2\ln\psi}{dx_k^2}]+\\+\frac{\alpha}{r^2\sin^2\Theta_\alpha/2}[(\frac{\partial\ln\psi}{\partial\Omega_\alpha})^2+\frac{d^2\ln\psi}{d\Omega_\alpha^2}]+\frac{\alpha}{r^2}[(\frac{\partial\ln\psi}{\partial\Theta_\alpha})^2+\frac{d^2\ln\psi}{d\Theta_\alpha^2}+\cot(\Theta_\alpha/2)\frac{d\ln\psi}{2d\Theta_\alpha}]\end{gathered}$$

Продифференцируем уравнение по координате, получим

$$m^2c^2/\hbar^2=mu_k\frac{\partial u_0}{\partial x_k}+i\hbar\frac{d^2u_0}{dx_k^2}-\sum_{k=1}^{3}[mu_k\frac{\partial u_n}{\partial x_k}+i\hbar\frac{d^2u_n}{dx_k^2}]$$

$$u_n=\frac{-i\hbar}{mc}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_n}$$

Разделим это уравнение на массу, получим

$$-u_0\frac{\partial u_n}{\partial x_0}+\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial u_n}{\partial x_k}=\frac{i\hbar}{m}[\frac{d^2u_n}{dx_0^2}-\sum_{k=1}^{3}\frac{d^2u_n}{dx_k^2}].$$

Получим уравнение Навье-Стокса с кинематической вязкостью $\nu=-\frac{i\hbar}{m}$. Уравнение Навье-Стокса с учетом электромагнитного поля и спина электрона см. [5].

Произведем разделение переменных и запишем угловую зависимость в безразмерном виде

$$V_\Theta(\Theta_\alpha)\frac{\cot(\Theta_\alpha/2)}{2}+\frac{\partial V_\Theta(\Theta_\alpha)}{\partial\Theta_\alpha}+V_\Theta^2(\Theta_\alpha)-U(\Theta_\alpha)=-\lambda-\frac{s^2}{\sin^2\Theta_\alpha/2}$$
$$V_\Omega^2(\Omega_\alpha)+\frac{\partial V_\Omega(\Omega_\alpha)}{\partial\Omega_\alpha}-U(\Omega_\alpha)=s^2 \quad . \qquad (3)$$
$$V_\Theta(\Theta_\alpha)=\frac{\partial\ln\psi}{\partial\Theta_\alpha}, V_\Omega(\Omega_\alpha)=\frac{\partial\ln\psi}{\partial\Omega_\alpha}$$

Где имеем $\Theta_\alpha\in[0,2\pi]$, а телесный угол Ω_α имеет период 4π. Сделав в первом уравнении (3) подстановку $V_\Theta(\Theta_\alpha)=p(\Theta_\alpha)\sin\Theta_\alpha/2$ получим дифференциальное уравнение при нулевом потенциале, зависящем от телесного угла

$$p[\cos(\Theta_\alpha/2)]\cos(\Theta_\alpha/2)-\sin^2(\Theta_\alpha/2)\frac{2\partial p[\cos(\Theta_\alpha/2)]}{\partial\cos(\Theta_\alpha/2)}+p^2[\cos(\Theta_\alpha/2)]\sin^2(\Theta_\alpha/2)-U(\Theta_\alpha)=$$
$$=-\lambda-\frac{s^2}{\sin^2(\Theta_\alpha/2)}$$

Получим $p[\cos(\Theta_\alpha/2)]=-\frac{2\partial\ln P_l^m[\cos(\Theta_\alpha/2))]}{\partial\cos(\Theta_\alpha/2)}=-\sum_{k=1}^{l}\frac{2}{\cos(\Theta_\alpha/2)-\alpha_k}$. Подстановка этой суммы и приведение дроби к общему знаменателю определит при условии $\lambda=l(l+1), s=0$, где l целое, потенциал равен нулю, функцию Лежандра. При условии $l=0$ получаем $p[\cos(\Theta_\alpha/2)]=0, P_1^0[\cos(\Theta_\alpha/2)]=1$. При условии $l=1$ получим решение $p[\cos(\Theta_\alpha/2)]=-\frac{2}{\cos(\Theta_\alpha/2)}, \alpha_1=0, P_1^0[\cos(\Theta_\alpha/2)]=\cos(\Theta_\alpha/2)$. В случае произвольного λ решение надо искать в виде $p[\cos(\Theta_\alpha/2)]=-\frac{\mu}{\cos(\Theta_\alpha/2)}-\sum_{k=1}^{l}\frac{2}{\cos(\Theta_\alpha/2)-\alpha_k}+\frac{2}{\cos(\Theta_\alpha/2)+\alpha_k}$ см. [1]. Это решение опишет произвольный спин частицы.

Уравнение $V_\Omega^2(\Omega_\alpha)+\frac{\partial V_\Omega(\Omega_\alpha)}{\partial\Omega_\alpha}-U(\Omega_\alpha)=s^2$ при нулевом потенциале определяет решение в виде дельта функции плюс константа $V_\Omega(\Omega_\alpha)=s+\alpha(\Omega_\alpha)$

$$\frac{d\alpha(\Omega_\alpha)}{\alpha^2(\Omega_\alpha)+2s\alpha(\Omega_\alpha)}=-d\Omega_\alpha\,.$$

Имеем решение этого уравнения

$$\alpha(\Omega_\alpha)=2s\frac{\exp[-2s(\Omega_\alpha-\Omega_{\alpha0})]\alpha(\Omega_{\alpha0})}{\exp[-2s(\Omega_\alpha-\Omega_{\alpha0})]\alpha(\Omega_{\alpha0})-\alpha(\Omega_{\alpha0})-2s}\,.$$

Из этого уравнения имеем координату особенности

$$\Omega_\alpha=\Omega_{\alpha0}+\frac{1}{2s}\ln\frac{\alpha(\Omega_{\alpha0})}{\alpha(\Omega_{\alpha0})+2s}\,.$$

В особенности решение имеет вид дельта функции с мнимым множителем

$$V_\Omega(\Omega_\alpha)=s+2s\frac{\exp[-2s(\Omega_\alpha-\Omega_{\alpha0})]\alpha(\Omega_{\alpha0})}{\exp[-2s(\Omega_\alpha-\Omega_{\alpha0})]\alpha(\Omega_{\alpha0})-\alpha(\Omega_{\alpha0})-2s}=$$

$$=s\pm i\pi\delta[\Omega_\alpha-\Omega_{\alpha0}-\frac{1}{2s}\ln\frac{\alpha(\Omega_{\alpha0})}{\alpha(\Omega_{\alpha0})+2s}]+Vp[\frac{1}{\Omega_\alpha-\Omega_{\alpha0}-\frac{1}{2s}\ln\frac{\alpha(\Omega_{\alpha0})}{\alpha(\Omega_{\alpha0})+2s}}]$$

Знаменатель дроби определяется как производная знаменателя по угловой переменной, умноженная на приращение угла. Скорость определена как угловая компонента четырехмерной скорости, т.е. в особенности имеющая мнимую скорость, т.е. имеем собственное вращение со скоростью больше единица, которое описывает произвольный спин частицы.

Получается, что уравнение Клейна-Гордона имеет решение в виде произвольного спина.

Приложение

В операторе Лапласа используются введенные углы спиноров, и оператор Лапласа выглядит таким образом

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}] +$$

$$+\frac{\alpha}{4r^2}[\frac{1}{\sin\Theta_\alpha/2}\frac{\partial}{\partial\Theta_\alpha/2}(\sin\Theta_\alpha/2\frac{\partial}{\partial\Theta_\alpha/2}) + \frac{1}{\sin^2\Theta_\alpha/2}\frac{\partial^2}{\partial(\Omega_\alpha/2)^2}] =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)+\alpha L(L+1)}{r^2}, L_{eff}(L_{eff}+1) = l(l+1)+\alpha L(L+1);$$

$$\alpha = \mp(\frac{e}{\sqrt{\hbar c}})^{L!/2} = \mp\frac{1}{137^{L!/2}}, E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2(n_r+L_{eff}+1)^2}$$

$$\frac{1}{\sin\Theta_\alpha/2}\frac{\partial}{\partial\Theta_\alpha/2}(\sin\Theta_\alpha/2\frac{\partial}{\partial\Theta_\alpha/2}) - \frac{S^2}{\sin^2\Theta_\alpha/2} + L(L+1) = 0$$

$$\psi(r,\Theta_\alpha,\Omega_\alpha) = R_{n_r L_{eff}}(r)Y_{lm}(\theta)Y_{LS}(\Theta_\alpha/2)\exp(iS\Omega_\alpha)$$

$$R_{n_r L}(r) = F(-n_r, L_{eff}, r) = \frac{1}{L_{eff}(L_{eff}+1)...(L_{eff}+n_r-1)}z^{1-L_{eff}} \times$$

$$\times\exp(r)\frac{d^{n_r}}{dr^{n_r}}[\exp(-r)r^{n_r+L_{eff}-1}];$$

Где величина L,S определяют суммарный модуль спина электронов, и его проекцию. Сферические функции полуцелого порядка определяются полиномом Лежандра полуцелого порядка $Y_{LS}(\Theta/2) \sim P_L^S(\cos\Theta/2)$ и описаны в разделе (2.1). Дело в том, что телесный угол имеет период 4π , и значит, описывает полуцелый спин.

Целый спин описывается углами сферической системы координат. Например, собственные функции ψ_{jm} могут быть приведены в соответствие с компонентами ковариационного спинора ранга $2j$ по формулам (1.7.3). Собственные функции целочисленного момента j являются шаровые функции.

$$Y_{10}=i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta=i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}n_z=ia_z=\sqrt{2}\psi^{12}$$

$$Y_{1\pm1}=\mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\exp(\pm i\phi)=\mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(n_x\pm in_y)=\mp(a_x\pm ia_y)$$

$$\psi^{11}=(a_x-ia_y)/\sqrt{2};\psi^{22}=-(a_x+ia_y)/\sqrt{2} \qquad (1.7.3)$$

$$Y_{jm}(\theta,\varphi)=\psi_{jm}=\sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}}\psi_{\underbrace{11...1}_{j+m}\underbrace{22...2}_{j-m}}$$

Формулы можно записать в виде

$$a_z=i\sqrt{2}\psi^{12};a_x=(\psi^{22}-\psi^{11})/\sqrt{2};a_y=(\psi^{11}+\psi^{22})/\sqrt{2}\,.$$

Эту формулу можно переписать с помощью матриц Паули в виде

$$\mathbf{a}=i\sqrt{2}\mathbf{s}_{\mu}^{\lambda}\psi_{\lambda}^{\mu} \qquad\qquad \psi_{\lambda}^{\mu}=-i\sqrt{2}\mathbf{a}\mathbf{s}_{\lambda}^{\mu}$$

Все последние формулы взяты из [3]§57 .

Если часть частиц вакуума образует полуцелый спин, а часть частиц вакуума образует целый спин, то образуется система с произвольным спином. Описывать их надо с долей целой шаровой функцией α и с долей нечетной шаровой функцией $1-\alpha$, зависящей от половины телесного угла, тогда спин будет равен

$$S=m\alpha+(1-\alpha)s_z,s_z=(2k+1)/2;L(L+1)=j(j+1)\alpha+(1-\alpha)s(s+1)$$

а сферическая функция равна

$$\psi=\alpha P_j^m(\cos\theta)\exp(im\varphi)+(1-\alpha)P_s^{s_z}(\cos\Theta/2)\exp(is_z\Omega),$$

Причем с такой волновой функцией имеются проблемы с CPT инвариантностью, спиновая функция при инверсии умножается на положительную или отрицательную мнимую единицу. Ее четность равна $\widehat{P}\psi(t,\mathbf{r})=(-1)^s\psi(t,-\mathbf{r});\widehat{P}^4=1$. Это соответствует внутренней симметрии частиц и античастиц. Заметим, что произошел выбор между представлением

$\hat{P}^2 = -1$ и между $\hat{P}^2 = 1$, в пользу первого преобразования. CPT преобразование спинора волновой функции определяется выражением (1.7.4) и соответствует умножению волновой функции на положительное или отрицательное значение мнимой единицы

$$\hat{C}\hat{P}\hat{T}\psi(t,\mathbf{r}) = [\alpha E + (1-\alpha)\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3]\psi(-t,-\mathbf{r}) = [\alpha E + (1-\alpha)i\gamma^5]\psi(-t,-\mathbf{r}) \quad (1.7.4)$$
$$(\gamma^5)^2 = 1; \gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0,$$

В спинорном представлении имеем

$$i\gamma^5 = \begin{Vmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{Vmatrix}, \xi^\alpha \to -i\xi^\alpha, \eta_{\dot{\alpha}} \to i\eta_{\dot{\alpha}}.$$

Для частиц вакуума с произвольным спином можно было воспользоваться одной угловой частью волновой функцией. Для этого надо ввести углы

$$\cos\Theta_\alpha = [j(j+1)\cos\theta + s(s+1)\cos(\Theta/2)]/L(L+1), \exp(iS\Omega_\alpha) = \exp[i(m\varphi + s_z\Omega)]$$

$$S = m + s_z, s_z = (2k+1)/2; L(L+1) = j(j+1) + s(s+1)$$

и определять сферические функции с квантовыми числами S, L в итоге получим волновую функцию $Y_L^S(\Theta_\alpha, \Omega_\alpha) = P_L^S(\cos\Theta_\alpha)\exp(iS\Omega_\alpha)$. Но как удовлетворить условиям CPT теоремы с такой волновой функцией? Угловая часть волновой функции при инверсии умножается на комплексную величину $\pm(-1)^L$, где величина L действительная в общем случае. Модуль этой величины равен единице. Знак плюс-минус появился из-за зарядового сопряжения заряда.

Экспериментально определена и приведена в [3] поправка к возбужденному состоянию атома гелия при условии $L = 0,1,2$ и суммарному спину $S = 0,1$. При условии $S = 0$ поправка равна нулю, поэтому считалась удвоенная поправка при $S = 1/2$.

При суммарном спине электронов равном $S = 0$.

L	0	1	2
Δ_L, *эксперимент*	-0.14	0.012	-0.0022
Δ_L, *теория*	-0.137	0.0428	-0.00219

При суммарном спине электронов равном $S=1$.

L	0	1	2
Δ_L, *эксперимент*	-0.296	-0.068	-0.0029
Δ_L, *теория*	-0.21	-0.058	-0.00292

При положительной поправки Ридберга наблюдается расхождение с экспериментом. При орбитальном квантовом числе, равном $L=3$ поправка равна $\Delta_{L=3}=-10^{-7}$, поэтому ее экспериментальное значение не приведено в [3].

Литература

1. Якубовский Е.Г. Полиномы Лежандра не целого порядка. «Энциклопедический фонд России», 2017, 11 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1505253784.pdf
2. Yakubovskiy, E. G. "STUDY OF NAVIER–STOKES EQUATION SOLUTION III. THE PHYSICAL SENSE OF THE COMPLEX VELOCITY AND CONCLUSIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 84-87. https://www.world-science.ru/pdf/2016/3/16.pdf
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика Нерелятивистская теория т.III, Наука, М.,1969,768с.
4. Якубовский Е.Г. Уравнение Навье-Стокса в электромагнитном поле с учетом квантовых эффектов. «Энциклопедический фонд России», 2017, 6 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1482939691.pdf