

## Решение уравнения Клейна-Гордона

описывающее спин частицы

Якубовский Е.Г.

e-mail [yakubovski@rambler.ru](mailto:yakubovski@rambler.ru)

Уравнение Клейна-Гордона связано с уравнением Навье-Стокса. Получим из уравнения Клейна-Гордона уравнение Навье-Стокса. Получается первый интеграл трех уравнений Навье-Стокса для потенциального течения. Если воспользоваться разделением переменных, то этот первый интеграл распадается на три интеграла, каждый из которых является одномерным. Определяются разделяющие константы каждого из интегралов в случае декартовой системы координат по потенциальной энергии и определяется решение уравнений Навье-Стокса и Клейна-Гордона в новых условиях. В случае отсутствия потенциала, т.е. в свободном пространстве, в этих уравнениях имеется решение для скорости частицы в виде дельта функции с мнимым множителем. Но аргумент дельта функции линейный по координате, т.е. дельта функция грубо говоря не равна нулю в одной точке. Т.к. множитель у дельта функции мнимый и радиус вращения центра инерции нулевой, она описывает собственное вращение частицы, т.е. спин частицы.

В статье [1] описаны координаты, описывающие произвольный спин в декартовом пространстве с помощью особых углов. Оно сводится к угловой форме оператора Лапласа, описываемого с помощью половины телесных углов. Воспользуемся этим описанием, часть этого описания приведена в приложении. При этом к стандартному оператору Лапласа добавляется оператор с коэффициентом, зависящим от радиуса

$$\frac{\alpha}{4r^2} \left[ \frac{1}{\sin \Theta_\alpha / 2} \frac{\partial}{\partial \Theta_\alpha / 2} (\sin \Theta_\alpha / 2 \frac{\partial}{\partial \Theta_\alpha / 2}) + \frac{1}{\sin^2 \Theta_\alpha / 2} \frac{\partial^2}{\partial (\Theta_\alpha / 2)^2} \right]$$

Проведем вывод уравнения Навье-Стокса в декартовой системе координат для уравнения Клейна-Гордона. Волновая функция равна

$$\psi(x_0, \dots, x_3, \Omega_\alpha, \Theta_\alpha) = \exp(\ln \psi - \ln \psi_0) = \exp \left[ \int_0^{x_k} \sum_{k=0}^3 \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial \ln \psi}{\partial \Omega_\alpha} d\Omega_\alpha + \frac{\partial \ln \psi}{\partial \Theta_\alpha} d\Theta_\alpha \right]$$

Тогда уравнение Клейна-Гордона запишется в виде

$$\begin{aligned} m^2 c^2 / \hbar^2 = & - \left( \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_0} \right)^2 - \frac{d^2 \ln \psi}{dx_0^2} + \sum_{k=1}^3 \left[ \left( \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{d^2 \ln \psi}{dx_k^2} \right] + \\ & + \frac{\alpha}{r^2 \sin^2 \Theta_\alpha / 2} \left[ \left( \frac{\partial \ln \psi}{\partial \Omega_\alpha} \right)^2 + \frac{d^2 \ln \psi}{d\Omega_\alpha^2} \right] + \frac{\alpha}{r^2} \left[ \left( \frac{\partial \ln \psi}{\partial \Theta_\alpha} \right)^2 + \frac{d^2 \ln \psi}{d\Theta_\alpha^2} + \cot(\Theta_\alpha / 2) \frac{d \ln \psi}{2 d\Theta_\alpha} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда первый интеграл запишется в виде

$$\begin{aligned} m^2 c^2 / \hbar^2 = & \left( \frac{E}{c\hbar} \right)^2 + \sum_{k=1}^3 \left[ \left( \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{d^2 \ln \psi}{dx_k^2} \right] + \\ & + \frac{\alpha}{r^2 \sin^2 \Theta_\alpha / 2} \left[ \left( \frac{\partial \ln \psi}{\partial \Omega_\alpha} \right)^2 + \frac{d^2 \ln \psi}{d\Omega_\alpha^2} \right] + \frac{\alpha}{r^2} \left[ \left( \frac{\partial \ln \psi}{\partial \Theta_\alpha} \right)^2 + \frac{d^2 \ln \psi}{d\Theta_\alpha^2} + \cot(\Theta_\alpha / 2) \frac{d \ln \psi}{2 d\Theta_\alpha} \right] \end{aligned}$$

Продифференцируем уравнение по координате, получим

$$\begin{aligned} m^2 c^2 / \hbar^2 = & m u_k \frac{\partial u_0}{\partial x_k} + i\hbar \frac{d^2 u_0}{dx_k^2} - \sum_{k=1}^3 \left[ m u_k \frac{\partial u_n}{\partial x_k} + i\hbar \frac{d^2 u_n}{dx_k^2} \right] \\ u_n = & \frac{-i\hbar}{mc} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_n} \end{aligned}$$

Разделим это уравнение на массу, получим

$$-u_0 \frac{\partial u_n}{\partial x_0} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_n}{\partial x_k} = \frac{i\hbar}{m} \left[ \frac{d^2 u_n}{dx_0^2} - \sum_{k=1}^3 \frac{d^2 u_n}{dx_k^2} \right].$$

Получим уравнение Навье-Стокса с кинематической вязкостью  $\nu = -\frac{i\hbar}{m}$ .

Уравнение Навье-Стокса с учетом электромагнитного поля и спина электрона см. [5].

Произведем разделение переменных и запишем угловую зависимость в безразмерном виде

$$\begin{aligned}
 V_{\Theta}(\Theta_{\alpha}) \frac{\cot(\Theta_{\alpha}/2)}{2} + \frac{\partial V_{\Theta}(\Theta_{\alpha})}{\partial \Theta_{\alpha}} + V_{\Theta}^2(\Theta_{\alpha}) - U(\Theta_{\alpha}) &= -\lambda - \frac{s^2}{\sin^2 \Theta_{\alpha}/2} \\
 V_{\Omega}^2(\Omega_{\alpha}) + \frac{\partial V_{\Omega}(\Omega_{\alpha})}{\partial \Omega_{\alpha}} - U(\Omega_{\alpha}) &= s^2 \quad . \quad (3) \\
 V_{\Theta}(\Theta_{\alpha}) &= \frac{\partial \ln \psi}{\partial \Theta_{\alpha}}, V_{\Omega}(\Omega_{\alpha}) = \frac{\partial \ln \psi}{\partial \Omega_{\alpha}}
 \end{aligned}$$

Где имеем  $\Theta_{\alpha} \in [0, 2\pi]$ , а телесный угол  $\Omega_{\alpha}$  имеет период  $4\pi$ . Сделав в первом уравнении (3) подстановку  $V_{\Theta}(\Theta_{\alpha}) = p(\Theta_{\alpha}) \sin \Theta_{\alpha}/2$  получим дифференциальное уравнение при нулевом потенциале, зависящем от телесного угла

$$\begin{aligned}
 p[\cos(\Theta_{\alpha}/2)] \cos(\Theta_{\alpha}/2) - \sin^2(\Theta_{\alpha}/2) \frac{2\partial p[\cos(\Theta_{\alpha}/2)]}{\partial \cos(\Theta_{\alpha}/2)} + p^2[\cos(\Theta_{\alpha}/2)] \sin^2(\Theta_{\alpha}/2) - U(\Theta_{\alpha}) &= \\
 &= -\lambda - \frac{s^2}{\sin^2(\Theta_{\alpha}/2)}
 \end{aligned}$$

Получим  $p[\cos(\Theta_{\alpha}/2)] = -\frac{2\partial \ln P_l^m[\cos(\Theta_{\alpha}/2)]}{\partial \cos(\Theta_{\alpha}/2)} = -\sum_{k=1}^l \frac{2}{\cos(\Theta_{\alpha}/2) - \alpha_k}$ . Подстановка

этой суммы и приведение дроби к общему знаменателю определит при условии  $\lambda = l(l+1), s = 0$ , где  $l$  целое, потенциал равен нулю, функцию Лежандра. При условии  $l = 0$  получаем  $p[\cos(\Theta_{\alpha}/2)] = 0, P_1^0[\cos(\Theta_{\alpha}/2)] = 1$ . При

условии  $l = 1$  получим решение

$$p[\cos(\Theta_{\alpha}/2)] = -\frac{2}{\cos(\Theta_{\alpha}/2)}, \alpha_1 = 0, P_1^0[\cos(\Theta_{\alpha}/2)] = \cos(\Theta_{\alpha}/2). \quad \text{В случае}$$

произвольного  $\lambda$  решение надо искать в виде

$$p[\cos(\Theta_{\alpha}/2)] = -\frac{\mu}{\cos(\Theta_{\alpha}/2)} - \sum_{k=1}^l \frac{2}{\cos(\Theta_{\alpha}/2) - \alpha_k} + \frac{2}{\cos(\Theta_{\alpha}/2) + \alpha_k} \quad \text{см. [1]. Это}$$

решение опишет произвольный спин частицы.

Уравнение  $V_{\Omega}^2(\Omega_{\alpha}) + \frac{\partial V_{\Omega}(\Omega_{\alpha})}{\partial \Omega_{\alpha}} - U(\Omega_{\alpha}) = s^2$  при нулевом потенциале определяет

решение в виде дельта функции плюс константа  $V_{\Omega}(\Omega_{\alpha}) = s + \alpha(\Omega_{\alpha})$

$$\frac{d\alpha(\Omega_\alpha)}{\alpha^2(\Omega_\alpha) + 2s\alpha(\Omega_\alpha)} = -d\Omega_\alpha.$$

Имеем решение этого уравнения

$$\alpha(\Omega_\alpha) = 2s \frac{\exp[-2s(\Omega_\alpha - \Omega_{\alpha 0})]\alpha(\Omega_{\alpha 0})}{\exp[-2s(\Omega_\alpha - \Omega_{\alpha 0})]\alpha(\Omega_{\alpha 0}) - \alpha(\Omega_{\alpha 0}) - 2s}.$$

Из этого уравнения имеем координату особенности

$$\Omega_\alpha = \Omega_{\alpha 0} + \frac{1}{2s} \ln \frac{\alpha(\Omega_{\alpha 0})}{\alpha(\Omega_{\alpha 0}) + 2s}.$$

В особенности решение имеет вид дельта функции с мнимым множителем

$$\begin{aligned} V_\Omega(\Omega_\alpha) &= s + 2s \frac{\exp[-2s(\Omega_\alpha - \Omega_{\alpha 0})]\alpha(\Omega_{\alpha 0})}{\exp[-2s(\Omega_\alpha - \Omega_{\alpha 0})]\alpha(\Omega_{\alpha 0}) - \alpha(\Omega_{\alpha 0}) - 2s} = \\ &= s \pm i\pi\delta[\Omega_\alpha - \Omega_{\alpha 0} - \frac{1}{2s} \ln \frac{\alpha(\Omega_{\alpha 0})}{\alpha(\Omega_{\alpha 0}) + 2s}] + Vp[\frac{1}{\Omega_\alpha - \Omega_{\alpha 0} - \frac{1}{2s} \ln \frac{\alpha(\Omega_{\alpha 0})}{\alpha(\Omega_{\alpha 0}) + 2s}}] \end{aligned}$$

Знаменатель дроби определяется как производная знаменателя по угловой переменной, умноженная на приращение угла. Скорость определена как угловая компонента четырехмерной скорости, т.е. в особенности имеющая мнимую скорость, т.е. имеем собственное вращение со скоростью больше единица, которое описывает произвольный спин частицы.

Получается, что уравнение Клейна-Гордона имеет решение в виде произвольного спина.

## Приложение

В операторе Лапласа используются введенные углы спиноров, и оператор Лапласа выглядит таким образом

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] + \\ &+ \frac{\alpha}{4r^2} \left[ \frac{1}{\sin \Theta_\alpha / 2} \frac{\partial}{\partial \Theta_\alpha / 2} (\sin \Theta_\alpha / 2 \frac{\partial}{\partial \Theta_\alpha / 2}) + \frac{1}{\sin^2 \Theta_\alpha / 2} \frac{\partial^2}{\partial (\Omega_\alpha / 2)^2} \right] = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1) + \alpha L(L+1)}{r^2}, L_{\text{eff}}(L_{\text{eff}} + 1) = l(l+1) + \alpha L(L+1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \mp \left( \frac{e}{\sqrt{\hbar c}} \right)^{L/2} = \mp \frac{1}{137^{L/2}}, E_n = - \frac{me^4}{2\hbar^2 (n_r + L_{\text{eff}} + 1)^2} \\ \frac{1}{\sin \Theta_\alpha / 2} \frac{\partial}{\partial \Theta_\alpha / 2} (\sin \Theta_\alpha / 2 \frac{\partial}{\partial \Theta_\alpha / 2}) - \frac{S^2}{\sin^2 \Theta_\alpha / 2} + L(L+1) &= 0 \\ \psi(r, \Theta_\alpha, \Omega_\alpha) &= R_{n_r, L_{\text{eff}}}(r) Y_{l_m}(\theta) Y_{L_S}(\Theta_\alpha / 2) \exp(iS\Omega_\alpha) \\ R_{n_r, L}(r) = F(-n_r, L_{\text{eff}}, r) &= \frac{1}{L_{\text{eff}}(L_{\text{eff}} + 1) \dots (L_{\text{eff}} + n_r - 1)} z^{1-L_{\text{eff}}} \times \\ &\times \exp(r) \frac{d^{n_r}}{dr^{n_r}} [\exp(-r) r^{n_r + L_{\text{eff}} - 1}]; \end{aligned}$$

Где величина  $L, S$  определяют суммарный модуль спина электронов, и его проекцию. Сферические функции полуцелого порядка определяются полиномом Лежандра полуцелого порядка  $Y_{L_S}(\Theta/2) \sim P_L^S(\cos\Theta/2)$  и описаны в разделе (2.1). Дело в том, что телесный угол имеет период  $4\pi$ , и значит, описывает полуцелый спин.

Целый спин описывается углами сферической системы координат. Например, собственные функции  $\psi_{jm}$  могут быть приведены в соответствие с компонентами ковариационного спинора ранга  $2j$  по формулам (1.7.3). Собственные функции целочисленного момента  $j$  являются шаровые функции.

$$\begin{aligned}
Y_{10} &= i\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta = i\sqrt{\frac{3}{4\pi}} n_z = ia_z = \sqrt{2}\psi^{12} \\
Y_{1\pm 1} &= \mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \exp(\pm i\phi) = \mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (n_x \pm in_y) = \mp (a_x \pm ia_y) \\
\psi^{11} &= (a_x - ia_y)/\sqrt{2}; \psi^{22} = -(a_x + ia_y)/\sqrt{2} \\
Y_{jm}(\theta, \phi) &= \psi_{jm} = \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}} \psi_{j+m, j-m}^{11\dots 122\dots 2}
\end{aligned} \tag{1.7.3}$$

Формулы можно записать в виде

$$a_z = i\sqrt{2}\psi^{12}; a_x = (\psi^{22} - \psi^{11})/\sqrt{2}; a_y = (\psi^{11} + \psi^{22})/\sqrt{2}.$$

Эту формулу можно переписать с помощью матриц Паули в виде

$$\mathbf{a} = i\sqrt{2}\mathbf{s}_{\mu}^{\lambda} \psi_{\lambda}^{\mu} \quad \psi_{\lambda}^{\mu} = -i\sqrt{2}\mathbf{a}\mathbf{s}_{\lambda}^{\mu}$$

Все последние формулы взяты из [3]§57.

Если часть частиц вакуума образует полуцелый спин, а часть частиц вакуума образует целый спин, то образуется система с произвольным спином. Описывать их надо с долей целой шаровой функцией  $\alpha$  и с долей нечетной шаровой функцией  $1 - \alpha$ , зависящей от половины телесного угла, тогда спин будет равен

$$S = m\alpha + (1 - \alpha)s_z, s_z = (2k + 1)/2; L(L + 1) = j(j + 1)\alpha + (1 - \alpha)s(s + 1)$$

а сферическая функция равна

$$\psi = \alpha P_j^m(\cos\theta) \exp(im\phi) + (1 - \alpha) P_s^{s_z}(\cos\Theta/2) \exp(is_z\Omega),$$

Причем с такой волновой функцией имеются проблемы с СРТ инвариантностью, спиновая функция при инверсии умножается на положительную или отрицательную мнимую единицу. Ее четность равна  $\hat{P}\psi(t, \mathbf{r}) = (-1)^s \psi(t, -\mathbf{r}); \hat{P}^4 = 1$ . Это соответствует внутренней симметрии частиц и античастиц. Заметим, что произошел выбор между представлением

$\hat{P}^2 = -1$  и между  $\hat{P}^2 = 1$ , в пользу первого преобразования. СРТ преобразование спинора волновой функции определяется выражением (1.7.4) и соответствует умножению волновой функции на положительное или отрицательное значение мнимой единицы

$$\widehat{CPT}\psi(t, \mathbf{r}) = [\alpha E + (1 - \alpha)\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3] \psi(-t, -\mathbf{r}) = [\alpha E + (1 - \alpha)i\gamma^5] \psi(-t, -\mathbf{r}) \quad (1.7.4)$$

$$(\gamma^5)^2 = 1; \gamma^5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5 = 0,$$

В спинорном представлении имеем

$$i\gamma^5 = \begin{vmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{vmatrix}, \xi^\alpha \rightarrow -i\xi^\alpha, \eta_\alpha \rightarrow i\eta_\alpha.$$

Для частиц вакуума с произвольным спином можно было воспользоваться одной угловой частью волновой функцией. Для этого надо ввести углы

$$\cos\Theta_\alpha = [j(j+1)\cos\theta + s(s+1)\cos(\Theta/2)]/L(L+1), \exp(iS\Omega_\alpha) = \exp[i(m\varphi + s_z\Omega)]$$

$$S = m + s_z, s_z = (2k+1)/2; L(L+1) = j(j+1) + s(s+1)$$

и определять сферические функции с квантовыми числами  $S, L$  в итоге получим волновую функцию  $Y_L^S(\Theta_\alpha, \Omega_\alpha) = P_L^S(\cos\Theta_\alpha) \exp(iS\Omega_\alpha)$ . Но как удовлетворить условиям СРТ теоремы с такой волновой функцией? Угловая часть волновой функции при инверсии умножается на комплексную величину  $\pm(-1)^L$ , где величина  $L$  действительная в общем случае. Модуль этой величины равен единице. Знак плюс-минус появился из-за зарядового сопряжения заряда.

Экспериментально определена и приведена в [3] поправка к возбужденному состоянию атома гелия при условии  $L = 0, 1, 2$  и суммарному спину  $S = 0, 1$ . При условии  $S = 0$  поправка равна нулю, поэтому считалась удвоенная поправка при  $S = 1/2$ .

При суммарном спине электронов равном  $S = 0$ .

$L$	0	1	2
$\Delta_L, \text{эксперимент}$	-0.14	0.012	-0.0022
$\Delta_L, \text{теория}$	-0.137	0.0428	-0.00219

При суммарном спине электронов равном  $S = 1$ .

$L$	0	1	2
$\Delta_L, \text{эксперимент}$	-0.296	-0.068	-0.0029
$\Delta_L, \text{теория}$	-0.21	-0.058	-0.00292

При положительной поправки Ридберга наблюдается расхождение с экспериментом. При орбитальном квантовом числе, равном  $L=3$  поправка равна  $\Delta_{L=3} = -10^{-7}$ , поэтому ее экспериментальное значение не приведено в [3].

#### Литература

1. Якубовский Е.Г. Полиномы Лежандра не целого порядка. «Энциклопедический фонд России», 2017, 11 стр. [http://russika.ru/userfiles/390\\_1505253784.pdf](http://russika.ru/userfiles/390_1505253784.pdf)
2. Yakubovskiy, E. G. "STUDY OF NAVIER–STOKES EQUATION SOLUTION III. THE PHYSICAL SENSE OF THE COMPLEX VELOCITY AND CONCLUSIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 84-87. <https://www.world-science.ru/pdf/2016/3/16.pdf>
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика Нерелятивистская теория т.Ш, Наука, М.,1969,768с.
4. Якубовский Е.Г. Уравнение Навье-Стокса в электромагнитном поле с учетом квантовых эффектов. «Энциклопедический фонд России», 2017, 6 стр. [http://russika.ru/userfiles/390\\_1482939691.pdf](http://russika.ru/userfiles/390_1482939691.pdf)



