Механизм распространения цунами и разрушительный режим в трубопроводах

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Уравнение Шредингера связано с уравнением Навье-Стокса. Получим из уравнения Шредингера уравнение Навье-Стокса в цилиндрической системе координат. Получается первый интеграл трех уравнений Навье-Стокса для потенциального течения. Если воспользоваться разделением переменных, то этот первый интеграл распадается на три интеграла, каждый из которых является одномерным. Определяются разделяющие константы каждого из интегралов в случае декартовой системы координат по потенциальной энергии и определяется решение уравнений Навье-Стокса и Шредингера в новых условиях. В данной статье получено решение уравнения Навье-Стокса для цилиндрической системы координат. Описано комплексное, турбулентное течение в трубах и ламинарное, действительное движение цунами. Комплексный, турбулентный режим в трубах может быть разрушительным, а может и безопасным. Найдены условия разрушительного режима. Найдены ограничения на течение с постоянным градиентом во всех сечениях. При больших числах Рейнольдса это приближение не справедливо. Правильным является профиль давления в виде полинома четной степени. Но описание профиля в виде полинома давления имеет свои проблемы. Необходимо уметь считать коэффициенты полинома, описывающего давление, по дополнительной не гидродинамической информации.

Уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+U\psi$$

Если взять волновую функцию в виде

$$\psi(r,\theta,\varphi)\exp(-iEt/\hbar)=\exp[iEt/\hbar+\int_0^r\frac{\partial\ln\psi}{\partial r}dr+\int_0^\theta\frac{\partial\ln\psi}{\partial z}dz+\int_0^\varphi\frac{\partial\ln\psi}{\partial\varphi}d\varphi],$$

то получим дифференциальное уравнение относительно логарифма волновой функции. Если представить волновую функцию с разделяющимися переменными, то получим три уравнения, каждое относительно одной неизвестной, при этом потенциал надо представить в виде суммы трех потенциалов $U(r,\theta,\varphi)=U(r)+\frac{\hbar^2}{m}[U(z)+\frac{U(\varphi)}{r^2}]$. Продифференцировав эти уравнения по независимой переменной, получим уравнения, являющиеся усеченные уравнения Навье-Стокса.

$$\begin{aligned}E=-i\hbar\frac{\partial\ln\psi}{\partial t}&=\frac{\hbar^2}{2m}[(\frac{\partial\ln\psi}{\partial r})^2+\frac{d^2\ln\psi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\ln\psi}{\partial r}]-U+\\&+\frac{\hbar^2}{2m}[\frac{\partial^2\ln\psi}{\partial z^2}+(\frac{\partial\ln\psi}{\partial z})^2]+\\&+\frac{\hbar^2}{2mr^2}[\frac{\partial^2\ln\psi}{\partial\varphi^2}+(\frac{\partial\ln\psi}{\partial\varphi})^2]\end{aligned}. \qquad (1)$$

В случае разделения переменных у волновой функции они допускают три первых интеграла

$$\begin{aligned}&E=\frac{\hbar^2}{2m}[V_r^2(r)+\frac{dV_r(r)}{dr}+\frac{V_r(r)}{r}]-U(r)+E_z\\&\frac{\partial V_z(z)}{\partial z}/2+V_z^2(z)/2-U(z)=E_z\\&V_\varphi^2(\varphi)/2+\frac{\partial V_\varphi(\varphi)}{\partial\varphi}/2-U(\varphi)=0\\&V_r(r)=\frac{\partial\ln\psi}{\partial r},V_\theta(\theta)=\frac{\partial\ln\psi}{\partial\theta},V_\varphi(\varphi)=\frac{\partial\ln\psi}{\partial\varphi}\end{aligned}. \qquad (2)$$

Для контроля вычислений проведем вывод уравнения Навье-Стокса в декартовой системе координат. Волновая функция равна

$$\psi(t,r,\theta,\varphi) = \exp[iEt/\hbar + \int_0^{x_k} \frac{\partial \ln\psi}{\partial x_k} dx_k]$$

Тогда уравнение Шредингера запишется в виде

$$-i\hbar \frac{\partial \ln\psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{k=1}^{3} [(\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_k})^2 + \frac{d^2 \ln\psi}{dx_k^2}] - U \qquad (3)$$

Продифференцируем уравнение по координате, получим

$$m\frac{\partial V_n}{\partial t} = \sum_{k=1}^{3} [-mV_k \frac{\partial V_n}{\partial x_k} - \frac{i\hbar}{2} \frac{d^2 V_n}{dx_k^2}] - \frac{\partial U}{\partial x_n}$$

$$V_n = \frac{-i\hbar}{m} \frac{\partial \ln\psi}{\partial x_n}$$

Разделим это уравнение на массу, получим

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} V_k \frac{\partial V_n}{\partial x_k} = -\frac{i\hbar}{2m} \sum_{k=1}^{3} \frac{d^2 V_n}{dx_k^2} - \frac{\partial U}{m\partial x_n}.$$

Получим уравнение Навье-Стокса с кинематической вязкостью $\nu = -\frac{i\hbar}{2m}$.

Приведем его к безразмерному виду относительно числа Рейнольдса потока.

Решим второе безразмерное уравнение (2). При условии $V_z(x_z) = \sqrt{E_z} + \alpha_z(z) + \sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{z-\beta_k}$. Тогда получим уравнение

$$2\sqrt{E_z}[\alpha_z(z) + \sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{z-\beta_k}] + \alpha_z^2(z) + 2\alpha_z(z) \sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{z-\beta_k} + \alpha_z'(z) - U(z) = 0.$$

Тогда в случае радиального квантового числа $n_r = 0$, получаем уравнение

$$2\sqrt{E_z}\alpha_z(z) + \alpha_z^2(z) + \alpha_z'(z) - U(z) = 0.$$

Это уравнение в случае $U(z)$ полинома $2N$ степени содержит $2N+1$ уравнения, так как образуется полином $2N$ степени. Функция $\alpha_z(z)$ является полиномом степени N содержит $\mathrm{N}+1$ неизвестных коэффициентов. Плюс один неизвестных коэффициента E_z. Из равенства количества неизвестных количеству уравнений имеем $N=1$. Задача имеет не единственное решение, так как необходимо решать квадратное уравнение. При другом радиальном числе прибавится степень уравнения и на столько же прибавится количество неизвестных коэффициентов β_k. Среди коэффициентов потенциала $U(x_m)$ степени $2N$ могут быть $p \le N-1$ неизвестных коэффициента, остальные коэффициенты надо задавать. Тогда степень полинома равна $N = p+1$.

Решим задачу в случае $p=0$, $n_r=0$. Имеем уравнение

$$2\sqrt{E_z}(az+b)+a^2z^2+2abz+b^2+a-c_0-c_1z-c_2z^2=0.$$

Эта система уравнений имеет два решения $a=\pm\sqrt{c_2}, E_z=-c_0+\frac{c_1^2}{4c_2}\pm\sqrt{c_2}$ $b=\pm\frac{c_1}{2\sqrt{c_2}}-\sqrt{E_z}$. При величине $c_2<0$, решение будет комплексным, турбулентным, причем потенциальная энергия имеет максимум. При условии $c_2>0$ минимума потенциальной энергии решение будет комплексным, турбулентным, если $E_z=-c_0+\frac{c_1^2}{4c_2}\pm\sqrt{c_2}<0$. При использовании действительной кинематической вязкости это соответствует отрицательной энергии $E_z=-\frac{me^2}{2\hbar^2n^2}=\frac{e^2}{8\nu^2mn^2}$, т.е. турбулентный комплексный режим связан с отрицательной энергией. Волновая функция равна $\psi=\exp(\pm\sqrt{c_2}z^2/2\pm(\frac{c_1}{2\sqrt{c_2}}-\sqrt{E_z})z)$ в случае $c_2<0$ имеет комплексную фазу и на конечном отрезке реализуется. При условии положительного $c_2>0$ надо выбрать отрицательное значение $a=-\sqrt{c_2}<0$, тогда волновая функция имеет максимум, и на бесконечности координаты стремится к нулю.

Решение уравнения Навье-Стокса имеет вид $V_z(z)=\sqrt{c_2}z/L+\frac{c_1}{2\sqrt{c_2}}-\sqrt{E_z}$ и справедливо для ограниченной области и при изменении давления

$U(z) = p(z) = c_0 + c_1 z / L + c_2 z^2 / L^2$. В уравнение Навье-Стокса входит градиент давления $\frac{dp(z)}{dz} = c_1 / L + 2c_2 z / L^2$. Он равен нулю при условии $z = -c_1 L/(2c_2)$, Такое же условие нулевой числа Рейнольдса потока с возможно мнимой добавкой $z = -c_1 L/(2c_2) + L\sqrt{E_z / c_2}$. Нулевой градиент давления соответствует нулевой силе, действующей на поток частиц жидкости, при дальнейшем увеличении координаты длины трубы эта сила становится отрицательной, что соответствует стенке в потоке. Это резкое изменение свойств потока, из положительного градиента давления, он меняет знак и становится отрицательным. Это соответствует появлению сильного торможения жидкости, переходу через отрицательное давление $p(L) = c_0 - \frac{c_1^2}{4c_2}$ при изменении знака c_2, и значит эта задача эквивалентна наличию стенки в трубопроводе. Если параметры давления таковы, что параметры связаны условием $1 + \frac{c_1}{2c_2} - \mathrm{Re}\sqrt{E_z / c_2} \le 0$ происходит гидравлический удар. Условие реализуемости давления, положительность значения $p(L) = c_0 - \frac{c_1^2}{4c_2}$, т.е. отрицательный дискриминант давления при положительном c_2 при сохранении положительности давления, т.е. давление имеет положительный минимум. В случае c_2 меньше нуля, положительное давление имеет максимум и положительно при положительном дискриминанте на отрезке $\frac{z}{L} \in [\frac{-c_1}{2c_2} - \sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{c_0}{c_2}}, \frac{-c_1}{2c_2} + \sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{c_0}{c_2}}]$. Условие реализуемости положительного давления на всей длине трубопровода $\frac{-c_1}{2c_2} + \sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{c_0}{c_2}} \ge 1$, что не совместимо с условием $1 + \frac{c_1}{2c_2} - \mathrm{Re}\sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{c_0}{c_2} + 1/(\sqrt{c_2})} \le 0$ всегда имеется действительная часть, где давление отрицательно согласно формуле

$\sqrt{a+bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$. Причем при переходе коэффициента c_2 через ноль положительность давления нарушается при любой длине трубопровода.

Профиль давления всегда устанавливается квадратичным, где коэффициенты давления переменные. При малом, положительном значении коэффициента $1 >> c_2 > 0$ устанавливается комплексный, турбулентный режим течения, аналог течения Пуазейля. При условии положительного значения $\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{c_0}{c_2} + 1/(\sqrt{c_2})$ устанавливается ламинарный режим с меньшим числом Рейнольдса потока. Но с ростом координаты, описывающей длину трубопровода растет безразмерная скорость потока на величину $\sqrt{c_2}$. Это связано с ростом давления по мере увеличения координаты. Но возможно это эффект градиентного значения скорости потока. В случае уравнения неразрывности с переменной плотностью потока этот эффект объясняется. Но в случае несжимаемой жидкости эффект необъясним. Причем чем меньше коэффициент $\sqrt{c_2}$, тем скорость больше и сжимаемость увеличивается, должна расти добавка к скорости, но она компенсируется увеличением скорости, и суммарная добавка к скорости растет.

Если же жидкость не сжимаема, то квадратичный профиль давления не устанавливается, $c_2 \to 0$, $\frac{c_1^2}{2c_2} = const$ и имеем малый постоянный по потоку градиент давления, причем у течения Пуазейля $V = kc_1, c_1 \sim c_2$ и числа Рейнольса малы. При развитой турбулентности $V \sim \sqrt{c_1}$ см. [2] $c_1 \sim c_2^{2/3}, V \sim c_2^{1/3}, c_2 << 1$ и числа Рейнольса гораздо выше при одинаковом c_2. Значит градиентный режим качественно описывает и решение для несжимаемой жидкости. Зависимость от коэффициентов значения давления универсальна, и градиентное решение универсально. На самом деле у безразмерного давления имеется большой коэффициент и число Рейнольдса пропорционально корню из этого коэффициента без малой поправки. Приближение течения Пуазейля и несжимаемой жидкости справедливо при условии $0 < c_2 << 1$ и будучи умноженным на коэффициент, описывающий давление, определяет ограниченное число Рейнольдса. Это накладывает ограничение на использование течения Пуазейля и постоянного градиента давления на всех сечениях трубопровода для несжимаемой жидкости.

Энергии потока $E_z = -c_0 + \frac{c_1^2}{4c_2} + \sqrt{c_2}$. Получив решение для трех направлений числа Рейнольдса потока нужно использовать уравнение неразрывности для вычисления связи между тремя решениями $\mathrm{div}\mathbf{V} = 0$. Будем для решения уравнения Навье-Стокса рассматривать мнимые параметры $c_2 < 0$. Тогда в точке $z = -c_1 L / 2c_2 + \mathrm{Re}\, L\sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{c_0}{c_2} + 1/(\sqrt{c_2})} > 0$ число Рейнольдса потока будет почти равна нулю, сила становится отрицательной, что соответствует стенке в потоке. Жидкость будет продолжать двигаться до значения координаты $z = -c_1 L / 2c_2 + L\sqrt{E_z / c_2} > 0$. Уравнение движения частиц жидкости, имеющих начальную координату z_0 определяется из уравнения

$$\frac{dz}{z(t) + \frac{c_1 L}{2c_2} - L\sqrt{\frac{E_z}{c_2}}} = \sqrt{c_2}\, dt / L \ .$$

Откуда определятся траектории частиц

$$z(t) + \frac{c_1 L}{2c_2} - L\sqrt{\frac{E_z}{c_2}} = (z_0 + \frac{c_1 L}{2c_2} - L\sqrt{\frac{E_z}{c_2}}) \exp[\sqrt{c_2}(t - t_0)/L].$$

Так как фаза в экспоненте в этом режиме мнимая, это приведет к колебанию с большой амплитудой. Этот турбулентный, комплексный режим будет нарушен, жидкость остановится, либо трубу разорвет. В случае положительных значений коэффициентов c_1, c_2 труба будет работать в нормальном режиме, переходя в турбулентный режим в случае отрицательной энергии, но без разрушительных последствий.

В случае цунами при действительных положительных коэффициентах c_1, c_2 наблюдается медленное нарастание координаты волны. Причем для образования цунами, ветер должен создать плавный перепад давления $P(z) = c_0 + c_1 z / L + c_2 z^2 / L^2, c_1 > 0, c_2 > 0.$ на большом протяжении. Землетрясение только инициирует цунами, для его распространения необходимы условие положительности коэффициентов $c_0 > 0, c_1 > 0, c_2 > 0$ и наличия квадратичного перепада давления. Если ветер создаст квадратичный потенциал с отрицательным значением c_2, то возникнут колебания морской среды и разразится буря.

Радиальное и угловое распределение не представляют интереса, можно только сказать, что они обеспечивают равенство нулю дивергенции числа Рейнольдса потока, т.е. непрерывность среды.

В случае $n_r = 1$ получаем систему уравнений

$$[2\sqrt{E_m}\alpha_m(x_m) + \alpha_m^2(x_m)](x_m - \beta_1) + 2(\sqrt{E_m} + 1)\alpha_m(x_m) + [\alpha_m'(x_m) - U(x_m)](x_m - \beta_1) = 0 .$$

Которая в случае $U(x_m)$ полинома $2N$ степени содержит $2N+2$ уравнения, так как образуется полином $2N+1$ степени. Функцию $\alpha_m(x_m)$ возводится в квадрат и умножается на линейную функцию и является полиномом степени N содержит $\mathrm{N}+1$ неизвестных коэффициентов. Плюс два неизвестных коэффициента β_1, E_m. Из равенства количества неизвестных количеству уравнений имеем $N = 1$. Задача имеет не единственное решение, так как надо решать квадратное уравнение. При другом радиальном числе прибавится степень уравнения и на столько же прибавится количество неизвестных коэффициентов β_k. Среди коэффициентов потенциала $U(x_m)$ степени $2N$ могут быть $p \le N-1$ неизвестных коэффициента, остальные коэффициенты надо задавать. Тогда степень полинома равна $N = p+1$. Это решение описывает бассейн в виде прямоугольного параллелепипеда с особенностями при определенных значениях возможно комплексной координаты, т.е. пульсации мнимой части координаты с амплитудой, равной мнимой части. В случае числа Рейнольдса , изменяющейся по закону $V_k(x_k) = \frac{1}{x_k - \beta_{1k}}$ в точке с координатой $x_k = \mathrm{Re}\,\beta_{1k}$ наблюдается колебание с амплитудой $-1/\mathrm{Im}\,\beta_{1k}$ с амплитудой, меньшей, чем больше мнимая часть $\mathrm{Im}\,\beta_{1k}$. Энергия вихря пропорциональна квадрату числа Рейнольдса потока, так как она мнимая, то энергия вихря отрицательная. Поэтому получается, чем больше мнимая часть знаменателя, тем энергия вихря больше $E = -1/(\mathrm{Im}\,\beta_{1k})^2$. При встрече двух вихрей наблюдается не синхронное вращение потока, а не колебание, т.е. бурление потока.

Но при некоторых значениях потенциала получатся потенциальное комплексное турбулентное решение уравнения Навье-Стокса с учетом нелинейности, так как коэффициенты полинома $\alpha_m(x_m)$ возводятся в квадрат. Это произойдет при отрицательном потенциале. При условии, что член потенциала с наибольшей степенью отрицателен гарантированно получится комплексное решение. В частности в случае положительности члена с потенциальной энергии и с наибольшим индексом, для решенной задачи требуется отрицательность собственной энергии для получения комплексного решения. Проблеме турбулентных комплексных решений уравнения Навье-Стокса посвящены статьи [1], [2], [3]. Но проблемы комплексного турбулентного решения уравнения Навье-Стокса на этом не кончаются. Надо пересчитывать мнимую часть числа Рейнольдса потока в действительную часть. Мнимая часть числа Рейнольдса потока существенным образом зависит от степени шероховатости. Необходимо усреднить по степени шероховатости, причем усреднение по средней высоте шероховатости зависит от тангенса наклона шероховатости и безразмерного давления или числа Рейнольдса см. [2] стр. 71.

Таким образом можно решить уравнение Шредингера и получить потенциальное решение уравнения Навье-Стокса с учетом нелинейности и комплексной числа Рейнольдса потока.

Литература

1. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION I. THE GENERAL SOLUTION OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 60-66. https://world-science.ru/pdf/2016/3/14.pdf
2. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION II. THE USE OF LAMINAR SOLUTIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 67-83.https://world-science.ru/pdf/2016/3/15.pdf
3. YAKUBOVSKIY, E. G. "STUDY OF NAVIER–STOKES EQUATION SOLUTION III. THE PHYSICAL SENSE OF THE COMPLEX VELOCITY AND CONCLUSIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 84-87. https://www.world-science.ru/pdf/2016/3/16.pdf