Учет параболического профиля давления

в случае течения в трубопроводах

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Уравнение Шредингера связано с уравнением Навье-Стокса. Получим из уравнения Шредингера уравнение Навье-Стокса в цилиндрической системе координат. Получается первый интеграл трех уравнений Навье-Стокса для потенциального течения. Если воспользоваться разделением переменных, то этот первый интеграл распадается на три интеграла, каждый из которых является одномерным. Определяются разделяющие константы каждого из интегралов в случае декартовой системы координат по потенциальной энергии и определяется решение уравнений Навье-Стокса и Шредингера в новых условиях. В данной статье получено решение уравнения Навье-Стокса для цилиндрической системы координат. Описано комплексное, турбулентное течение и ламинарное действительное течение в трубопроводах. Комплексный, турбулентный режим в трубах может быть разрушительным, а может и безопасным. Найдены условия разрушительного режима. Найдены ограничения на течение с постоянным градиентом во всех сечениях. При больших числах Рейнольдса это приближение не справедливо. Правильным является профиль давления в виде полинома четной степени. Но описание профиля в виде полинома давления имеет свои проблемы. Надо вычислить коэффициенты у формулы, описывающей давления. Для течения в трубопроводах они вычисляются из предельных случаев течения с постоянным градиентом давления во всех сечениях.

Уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi$$

Если взять волновую функцию в виде

$$\psi(r,\theta,\varphi)\exp(-iEt/\hbar) = \exp[iEt/\hbar + \int_0^r \frac{\partial \ln\psi}{\partial r}dr + \int_0^\theta \frac{\partial \ln\psi}{\partial z}dz + \int_0^\varphi \frac{\partial \ln\psi}{\partial \varphi}d\varphi],$$

то получим дифференциальное уравнение относительно логарифма волновой функции. Если представить волновую функцию с разделяющимися переменными, то получим три уравнения, каждое относительно одной неизвестной, при этом потенциал надо представить в виде суммы трех потенциалов $U(r,\theta,\varphi) = U(r) + \frac{\hbar^2}{m}[U(z) + \frac{U(\varphi)}{r^2}]$. Продифференцировав эти уравнения по независимой переменной, получим уравнения, являющиеся уравнением Навье-Стокса.

$$\begin{gathered}
E = -i\hbar\frac{\partial \ln\psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}[(\frac{\partial \ln\psi}{\partial r})^2 + \frac{d^2\ln\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \ln\psi}{\partial r}] - U + \\
+\frac{\hbar^2}{2m}[\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial z^2} + (\frac{\partial \ln\psi}{\partial z})^2] + \\
+\frac{\hbar^2}{2mr^2}[\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial \varphi^2} + (\frac{\partial \ln\psi}{\partial \varphi})^2]
\end{gathered} \quad . \qquad (1)$$

В случае разделения переменных у волновой функции они допускают три первых интеграла

$$\begin{gathered}
E = \frac{\hbar^2}{2m}[V_r^2(r) + \frac{dV_r(r)}{dr} + \frac{V_r(r)}{r}] - U(r) + E_z \\
\frac{\partial V_z(z)}{\partial z}/2 + V_z^2(z)/2 - U(z) = E_z \\
V_\varphi^2(\varphi)/2 + \frac{\partial V_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi}/2 - U(\varphi) = 0 \\
V_r(r) = \frac{\partial \ln\psi}{\partial r}, V_\theta(\theta) = \frac{\partial \ln\psi}{\partial \theta}, V_\varphi(\varphi) = \frac{\partial \ln\psi}{\partial \varphi}
\end{gathered} \quad . \qquad (2)$$

Для контроля вычислений проведем вывод уравнения Навье-Стокса в декартовой системе координат. Волновая функция равна

$$\psi(t,r,\theta,\varphi) = \exp[iEt/\hbar + \int_0^{x_k} \frac{\partial \ln\psi}{\partial x_k} dx_k]$$

Тогда уравнение Шредингера запишется в виде

$$-i\hbar\frac{\partial \ln\psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3}\ [(\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_k})^2 + \frac{d^2 \ln\psi}{dx_k^2}] - U \tag{3}$$

Продифференцируем уравнение по координате, получим

$$m\frac{\partial V_n}{\partial t} = \sum_{k=1}^{3}[-mV_k\frac{\partial V_n}{\partial x_k} - \frac{i\hbar}{2}\frac{d^2V_n}{dx_k^2}] - \frac{\partial U}{\partial x_n}$$

$$V_n = \frac{-i\hbar}{m}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_n}$$

Разделим это уравнение на массу, получим

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\ V_k\frac{\partial V_n}{\partial x_k} = -\frac{i\hbar}{2m}\sum_{k=1}^{3}\ \frac{d^2V_n}{dx_k^2} - \frac{\partial U}{m\partial x_n}.$$

Получим уравнение Навье-Стокса с кинематической вязкостью $\nu = -\frac{i\hbar}{2m}$.

Приведем его к безразмерному виду относительно числа Рейнольдса потока.

Решим второе безразмерное уравнение (2). При условии $V_z\ (x_z) = u_z(x_z)\sqrt{T_0}\ = [\sqrt{E_z} + \alpha_z(z) + \sum_{k=1}^{n_r}\ \frac{1}{z-\beta_k}]$. Тогда получим уравнение

$$2\sqrt{E_z}[\alpha_z(z) + \sum_{k=1}^{n_r}\ \frac{1}{z-\beta_k}] + \alpha_z^2(z) + 2\alpha_z(z)\sum_{k=1}^{n_r}\ \frac{1}{z-\beta_k} + \alpha_z'(z) - U(z) = 0.$$

Тогда в случае радиального квантового числа $n_r = 0$, получаем уравнение

$$2\sqrt{E_z}\alpha_z(z) + \alpha_z^2(z) + \alpha_z'(z) - U(z) = 0.$$

Это уравнение в случае $U(z)$ полинома $2N$ степени содержит $2N+1$ уравнения, так как образуется полином $2N$ степени. Функция $\alpha_z(z)$ является полиномом степени N содержит $\mathrm{N}+1$ неизвестных коэффициентов. Плюс один неизвестных коэффициента E_z. Из равенства количества неизвестных количеству уравнений имеем $N=1$. Задача имеет не единственное решение, так как необходимо решать квадратное уравнение. При другом радиальном числе прибавится степень уравнения и на столько же прибавится количество неизвестных коэффициентов β_k. Среди коэффициентов потенциала $U(x_m)$ степени $2N$ могут быть $p \le N-1$ неизвестных коэффициента, остальные коэффициенты надо задавать. Тогда степень полинома равна $N = p+1$.

Решим задачу в случае $p=0$, $n_r=0$. Имеем уравнение

$$2\sqrt{E_z}(az+b)+a^2z^2+2abz+b^2+a-T_0(c_0+c_1z+c_2z^2)=0.$$

Величина $\frac{dp}{\rho dz}$ в одномерном случае интегрируется с интегралом, равным полиному. При этом также как нормированное давление умножено на нормировочный множитель, нормированная скорость также умножена на нормировочный множитель $V_z(x_z)=u_z(x_z)\sqrt{T_0}$. Нормированное значение собственной энергии также имеет нормировочный множитель $E_z=T_0\varepsilon_z$. Универсальный смысл имеют нормированные значения параметров, но меряем мы не нормированные значения параметров, причем при бесконечности коэффициента пропорциональности они могут стремиться к бесконечности. Нормированные значения всегда конечны. Эта система уравнений имеет два решения $a=\pm\sqrt{T_0c_2}, E_z=T_0(-c_0+\frac{c_1^2}{4c_2}\pm\sqrt{c_2/T_0})$, $b=(\pm\frac{c_1}{2\sqrt{c_2}}-\sqrt{E_z})\sqrt{T_0}$. При величине $c_2<0$, решение будет комплексным, турбулентным, причем потенциальная энергия имеет максимум. При условии $c_2>0$ минимума потенциальной энергии решение будет комплексным, турбулентным, если $E_z=T_0(-c_0+\frac{c_1^2}{4c_2}\pm\sqrt{c_2/T_0})<0$ собственная энергия отрицательна. При использовании действительной кинематической вязкости это соответствует отрицательной энергии $E_z=-\frac{me^2}{2\hbar^2n^2}=\frac{e^2}{8\nu^2mn^2}$, т.е.

турбулентный комплексный режим связан с отрицательной энергией. Волновая функция равна $\psi = \exp\{[\pm\sqrt{c_2} z^2 / 2 \pm (\frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{E_z})z]\sqrt{T_0}\}$ в случае $c_2 < 0$ имеет комплексную фазу и на конечном отрезке реализуется. При условии положительного $c_2 > 0$ надо выбрать отрицательное значение $a = -\sqrt{T_0 c_2} < 0$, тогда волновая функция имеет максимум, и на бесконечности координаты стремится к нулю.

Решение уравнения Навье-Стокса имеет вид $V_z(z) = u_z(z)\sqrt{T_0} = (\sqrt{c_2} z / L + \frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{E_z})\sqrt{T_0}$ и справедливо для ограниченной области и при изменении давления $U(z) = p(z) = (c_0 + c_1 z / L + c_2 z^2 / L^2)T_0$. В уравнение Навье-Стокса входит градиент давления $\frac{dp(z)}{dz} = (c_1 / L + 2c_2 z / L^2)T_0$. Он равен нулю при условии $z = -c_1 L/(2c_2)$, Такое же условие для нулевого числа Рейнольдса потока с возможно мнимой добавкой $z = -c_1 L/(2c_2) + L\sqrt{E_z / c_2}$. Нулевой градиент давления соответствует нулевой силе, действующей на поток частиц жидкости, при дальнейшем увеличении координаты длины трубы эта сила становится отрицательной, что соответствует стенке в потоке. Это резкое изменение свойств потока, из положительного градиента давления, он меняет знак и становится отрицательным. Это соответствует появлению сильного торможения жидкости, переходу через отрицательное давление $p(L) = (c_0 - \frac{c_1^2}{4c_2})T_0$ при изменении знака c_2, и значит эта задача эквивалентна наличию стенки в трубопроводе. Если параметры давления таковы, что они связаны условием $1 + \frac{c_1}{2c_2} - \mathrm{Re}\sqrt{E_z / c_2} \le 0$ происходит гидравлический удар. Условие реализуемости давления, положительность значения $p(L) = (c_0 - \frac{c_1^2}{4c_2})T_0$, т.е. отрицательный дискриминант давления при положительном c_2 при сохранении положительности давления, т.е. давление имеет положительный минимум. В случае c_2 меньше нуля, положительное давление имеет максимум и положительно при положительном дискриминанте на отрезке $\frac{z}{L} \in [\frac{-c_1}{2c_2} - \sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{c_0}{c_2}}, \frac{-c_1}{2c_2} + \sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{c_0}{c_2}}]$. Условие реализуемости положительного давления на всей длине трубопровода $\frac{-c_1}{2c_2} + \sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{c_0}{c_2}} \ge 1$, что не совместимо с условием $1 + \frac{c_1}{2c_2} - \mathrm{Re}\sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{c_0}{c_2} + 1/(\sqrt{c_2 T_0})} \le 0$ всегда имеется действительная часть, где давление отрицательно согласно формуле $\sqrt{a+bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$ Причем при переходе коэффициента c_2 через ноль положительность давления нарушается при любой длине трубопровода.

Профиль давления всегда устанавливается квадратичным, где коэффициенты давления переменные. При малом, положительном значении коэффициента $1 >> c_2 > 0$ устанавливается комплексный, турбулентный режим течения, аналог течения Пуазейля. При условии положительного значения $\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{c_0}{c_2} + 1/(\sqrt{c_2 T_0})$ устанавливается ламинарный режим с меньшим числом Рейнольдса потока. Но с ростом координаты, описывающей длину трубопровода растет безразмерная скорость потока на величину $\sqrt{c_2}$. Это связано с ростом давления по мере увеличения координаты. Но возможно это эффект потенциального значения скорости потока. В случае уравнения неразрывности с переменной плотностью потока этот эффект объясняется. В случае несжимаемой жидкости эффект тоже объясним. Причем чем меньше коэффициент $\sqrt{c_2}$, тем скорость больше и сжимаемость увеличивается, должна расти добавка к скорости, и суммарная добавка к скорости растет.

Если же жидкость не сжимаема, то квадратичный профиль давления не устанавливается, $c_2 \to 0$, $\frac{c_1^2}{2c_2} = const$ и имеем малый постоянный по потоку градиент давления, причем у течения Пуазейля $V = kc_1, c_1 \sim c_2$ и числа Рейнольса малы. При развитой турбулентности $V \sim \sqrt{c_1}$ см. [2] $c_1 \sim c_2^{2/3}, V \sim c_2^{1/3}, c_2 << 1$ и числа Рейнольса гораздо выше при одинаковом c_2. Значит потенциальный режим течения жидкости качественно описывает и решение для несжимаемой жидкости. Зависимость от коэффициентов значения давления универсальна, и потенциальное решение для скорости универсально. На самом деле у безразмерного давления имеется большой коэффициент и число Рейнольдса пропорционально корню из этого коэффициента без малой поправки. В случае течения Пуазейля с точностью коэффициента порядка единицы имеем для числа Рейнольдса $V = \sqrt{T_0} Tc_2$, а в случае развитой турбулентности $V = \sqrt{T_0}(Tc_2)^{1/3}$, где используется коэффициент пропорциональности у давления T_0. Приближение течения Пуазейля и несжимаемой жидкости справедливо при условии $0 < c_2 << 1$ и будучи умноженным на коэффициент, описывающий давление, определяет ограниченное число Рейнольдса. Это накладывает ограничение на использование течения Пуазейля и постоянного градиента давления на всех сечениях трубопровода для несжимаемой жидкости.

Для удовлетворения этих условий необходимо выполнение

$$
\begin{aligned}
c_0 &= Tc_0^0 \exp(-T^2/T_{cr}^2) + \frac{d_0^0}{T^{3/8}}[1 - \exp(-T^2/T_{cr}^2)] \\
c_1 &= Tc_1^0 \exp(-T^2/T_{cr}^2) + \frac{d_1^0}{T^{3/8}}[1 - \exp(-T^2/T_{cr}^2)] \; . \\
c_2 &= Tc_2^0 \exp(-T^2/T_{cr}^2) + \frac{d_2^0}{T^{1/4}}[1 - \exp(-T^2/T_{cr}^2)]
\end{aligned}
$$

Причем связь между константами определятся из условия, что при нулевом и бесконечном давлении энергия системы равна нулю, т.е. они функции T_0. Но выполнение этих условий определит решение в случае постоянного градиента давления во всех сечениях в двух предельных случаях. Определит ли оно решение вне этой области? Решение построено таким образом, что на бесконечности давления коэффициент сопротивления равен константе. Переход к комплексному решению реализуется через нулевое значение энергии. Т.е. из значение безразмерного давления, удовлетворяющего $\frac{c_1^2}{4c_2} + \sqrt{c_2 / T_0} = c_0$. При этом коэффициент у безразмерного давления равен

$$T_0 = \frac{16c_2^3}{(4c_2c_0 - c_1^2)^2}. \qquad (4)$$

Подставляя коэффициенты при критическом значении безразмерного давления, получаем связь между $T_0 = f(T_{cr})$. Из гидродинамического решения [2] имеем $T_{cr} = 8R_{cr}^2$ для трубопровода с круглым сечением. Подставляя критическое значение давления в (4), получим близкое к нулю значение дискриминанта, значит большое значение $T_0 = \frac{16c_2^3}{(4c_2c_0 - c_1^2)^2}$. Также справедливо $T_{10} = \frac{16c_{20}^3}{(4c_{20}c_0^0 - c_{10}^2)^2} \to \infty$, $T_{20} = \frac{16d_{20}^3}{(4d_{20}d_0^0 - d_{10}^2)^2}$. В самом деле при бесконечном критическом давлении получим решение в виде коэффициентов $c_{k0}, k = 0,1,2$, которым удовлетворяет бесконечное значение T_{10}. При большом значении критического давления, получаем смесь не одинаковых коэффициентов $c_{k0}, d_{k0}, k = 0,1,2$ и получим большое значение коэффицента пропорциональности $T_{10} > T_0 = T_{20}$. Но она ограничена асимптотикой турбулентного решения см. [2] $\sqrt{T_0}\frac{c_1^2}{4c_2} = \sqrt{T_0 T}\frac{d_{10}^2}{4d_{20}} = \sqrt{T_0 T} d_{10}^{1/3} = \sqrt{T/\alpha}, T \to \infty$, откуда имеем ограничения на значение T_0 и коэффициенты $\frac{d_{10}^2}{4d_{20}}$. Полагая $T_0 = T_{20}$ определим коэффициент d_0^0. Нужно выявить свойства ламинарного решения см. [2] $\sqrt{T_0}\frac{c_1^2}{4c_2} = \sqrt{T_0}T\frac{c_{10}^2}{4c_{20}} = \frac{T}{16R_{cr}}, T \to 0$, откуда имеем ограничения на коэффициенты $\frac{c_{10}^2}{4c_{20}}$ и значит известен коэффициент c_0^0. Эти уравнения надо решать совместно с уравнением $T_0 = \frac{16c_2^3(T_0, T_{cr})}{[4c_2(T_0, T_{cr})c_0(T_0, T_{cr}) - c_1^2(T_0, T_{cr})]^2}$. Полагая $c_{10} = c_{20}, d_{10} = d_{20}^{2/3}$ определим все коэффициенты давления.

$$d_{10} = 1/(T_0\alpha)^{3/2}, d_{20} = 1/(T_0\alpha)^{9/4}; d_0^0 = \frac{1}{\sqrt{T_0\alpha}} + \sqrt{\frac{1}{T_0\ (T_0\alpha)^{9/4}}}, c_{10} = c_{20} = \frac{!}{4R_{cr}\sqrt{T_0}}, c_0^0 = \frac{!}{16R_{cr}\sqrt{T_0}}$$

Решение справедливо до условия максимального давления T, когда $V_{\max} = \sqrt{T_0T(d_{10})^{1/3}/4} = T; T_0d_{10}^{1/3} = \sqrt{T_0/(4\alpha)} = T$. Но каково решение вне этой области? Аналитически продолжая это решение на всю область изменения безразмерного давления T, получим решение до бесконечности давления.

В случае плавного увеличения потенциала трубопровода коэффициенты нормированного числа Рейнольдса будут меняться непрерывно, и стремиться к нулю, при бесконечном коэффициенте T_0 и трубопровод остановится. При резком перекрытии трубопровода, коэффициенты скорости не стремятся к нулю. Дискриминант всех трех совокупностей коэффициентов c_k, c_{k0}, d_{ko} будет равен нулю, значит корни равенства нулю давления кратные и знак давления определяется знаком коэффициента c_2. Так как давление положительно и $T_0 > 0$ все коэффициенты c_2, c_{20}, d_{20} положительны. Следовательно, в случае отрицательности коэффициента c_2 система стационарного решения не образует, и не устойчива и возможны разрушительные колебания. Число Рейнольдса потока не нулевое и в силу отрицательности коэффициента c_2, сложатся условия для гидродинамического удара.

Но проблемы на этом не кончаются. Надо пересчитать мнимую скорость часть скорости в действительную часть с учетом шероховатости, как с постоянным тангенсом наклона, так и с постоянной высотой шероховатости.

Для этого надо использовать методы, разработанные в [2]. В [2] удалось добиться совпадения экспериментальных графиков Никурадзе для коэффициента сопротивления трубопровода с круглым сечением при всех числах Рейнольдса и степени шероховатости с точностью 10%.

Решение полученные в [2] справедливы для постоянного градиента давления в каждом сечении трубопровода. Эти решения надо уточнить для параболического профиля давления, используя решение для постоянного градиента давления.

Энергии потока $E_z = (-c_0 + \frac{c_1^2}{4c_2} + \sqrt{c_2 / T_0})T_0$. Получив решение для трех направлений числа Рейнольдса потока нужно использовать уравнение неразрывности для вычисления связи между тремя решениями $\mathrm{div}\mathbf{V} = 0$. Будем для решения уравнения Навье-Стокса рассматривать мнимые параметры $c_2 < 0$. Тогда в точке $z = -c_1 L / 2c_2 + \mathrm{Re}\, L\sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{c_0}{c_2} + 1/(\sqrt{c_2 T_0})} > 0$ число Рейнольдса потока будет почти равно нулю, сила становится отрицательной, что соответствует стенке в потоке. Жидкость будет продолжать двигаться до значения координаты $z = -c_1 L / 2c_2 + L\sqrt{E_z / c_2} > 0$. Уравнение движения частиц жидкости, имеющих начальную координату z_0 определяется из уравнения

$$\frac{dz}{z(t) + \frac{c_1 L}{2c_2} - L\sqrt{\frac{E_z}{c_2}}} = \sqrt{c_2 / T_0}\, dt / L \ .$$

Откуда определятся траектории частиц

$$z(t) + \frac{c_1 L}{2c_2} - L\sqrt{\frac{E_z}{c_2}} = (z_0 + \frac{c_1 L}{2c_2} - L\sqrt{\frac{E_z}{c_2}})\exp[\sqrt{c_2 / T_0}(t - t_0) / L].$$

Так как фаза в экспоненте в этом режиме мнимая, это приведет к колебанию с большой амплитудой. Этот турбулентный, комплексный режим будет нарушен, жидкость остановится, либо трубу разорвет. В случае положительных значений коэффициентов c_1, c_2 труба будет работать в нормальном режиме, переходя в турбулентный режим в случае отрицательной энергии, но без разрушительных последствий.

Радиальное и угловое распределение не представляют интереса, можно только сказать, что они обеспечивают равенство нулю дивергенции числа Рейнольдса потока, т.е. непрерывность среды.

В случае $n_r = 1$ получаем систему уравнений

$$[2\sqrt{E_m}\alpha_m(x_m) + \alpha_m^2(x_m)](x_m - \beta_1) + 2(\sqrt{E_m} + 1)\alpha_m(x_m) + [\alpha_m'(x_m) - U(x_m)](x_m - \beta_1) = 0 .$$

Которая в случае $U(x_m)$ полинома $2N$ степени содержит $2N+2$ уравнения, так как образуется полином $2N+1$ степени. Функцию $\alpha_m(x_m)$ возводится в квадрат и умножается на линейную функцию и является полиномом степени N содержит $\mathrm{N}+1$ неизвестных коэффициентов. Плюс два неизвестных коэффициента β_1, E_m. Из равенства количества неизвестных количеству уравнений имеем $N = 1$. Задача имеет не единственное решение, так как надо решать квадратное уравнение. При другом радиальном числе прибавится степень уравнения и на столько же прибавится количество неизвестных коэффициентов β_k. Среди коэффициентов потенциала $U(x_m)$ степени $2N$ могут быть $p \le N-1$ неизвестных коэффициента, остальные коэффициенты надо задавать. Тогда степень полинома равна $N = p+1$. Это решение описывает бассейн в виде прямоугольного параллелепипеда с особенностями при определенных значениях возможно комплексной координаты, т.е. пульсации мнимой части координаты с амплитудой, равной мнимой части. В случае числа Рейнольдса , изменяющейся по закону $V_k(x_k) = \dfrac{1}{x_k - \beta_{1k}}$ в точке с координатой $x_k = \operatorname{Re}\beta_{1k}$ наблюдается колебание с амплитудой $-1/\operatorname{Im}\beta_{1k}$ с амплитудой, меньшей, чем больше мнимая часть $\operatorname{Im}\beta_{1k}$. Энергия вихря пропорциональна квадрату числа Рейнольдса потока, так как оно мнимое, то энергия вихря отрицательная. Поэтому получается, чем больше мнимая часть знаменателя, тем энергия вихря больше $E = -1/(\mathrm{Im}\,\beta_{1k})^2$. При встрече двух вихрей наблюдается не синхронное вращение потока, а не колебание, т.е. бурление потока.

Но при некоторых значениях потенциала получатся потенциальное комплексное турбулентное решение уравнения Навье-Стокса с учетом нелинейности, так как коэффициенты полинома $\alpha_m(x_m)$ возводятся в квадрат. Это произойдет при отрицательном потенциале. При условии, что член потенциала с наибольшей степенью отрицателен гарантированно получится комплексное решение. В частности в случае положительности члена с потенциальной энергии и с наибольшим индексом, для решенной задачи требуется отрицательность собственной энергии для получения комплексного решения. Проблеме турбулентных комплексных решений уравнения Навье-Стокса посвящены статьи [1], [2], [3]. Но проблемы комплексного турбулентного решения уравнения Навье-Стокса на этом не кончаются. Надо пересчитывать мнимую часть числа Рейнольдса потока в действительную часть. Мнимая часть числа Рейнольдса потока существенным образом зависит от степени шероховатости. Необходимо усреднить по степени шероховатости, причем усреднение по средней высоте шероховатости зависит от тангенса наклона шероховатости и безразмерного давления или числа Рейнольдса см. [2] стр. 71.

Таким образом можно решить уравнение Шредингера и получить потенциальное решение уравнения Навье-Стокса с учетом нелинейности и комплексной числа Рейнольдса потока.

Литература

1. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION I. THE GENERAL SOLUTION OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION." *EUROPEAN JOURNAL OF*

NATURAL HISTORY 3 (2016): 60-66. https://world-science.ru/pdf/2016/3/14.pdf

2. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION II. THE USE OF LAMINAR SOLUTIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 67-83.https://world-science.ru/pdf/2016/3/15.pdf
3. YAKUBOVSKIY, E. G. "STUDY OF NAVIER–STOKES EQUATION SOLUTION III. THE PHYSICAL SENSE OF THE COMPLEX VELOCITY AND CONCLUSIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 84-87. https://www.world-science.ru/pdf/2016/3/16.pdf