Распространение переменных действие-угол на N мерное пространство или свойства Солнечной системы

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Переменные действие-угол определяют интегрируемые системы в одномерном случае см. [1]. Построим переменные действие-угол в многомерном случае, тем самым определяя широкий класс интегрируемых систем в многомерном случае. Стоит задача определение формулы решения. Для этого используется частный интегрируемый Гамильтониан плюс общая малая добавка. Но интегрируемый Гамильтониан существует только приближенный, а добавка может иметь малые знаменатели, которые определяют не оправданный рост решения. В данной статье определяется алгоритм, позволяющий описать точное решение задачи взаимодействия тел по законам гравитации Ньютона. Таким образом удается построить алгоритм, определяющий движение планет и их спутников в Солнечной системе. Выяснилась особенность решения. В случае равенства нулю определителя системы уравнений, возможны скачки фазы угловой координаты, что приведет к скачкообразному перемещению тела. Как докажем в тексте статьи солнечная система образовалась из минимума суммарной кинетической и потенциальной энергии системы и имеет несколько наборов значений параметров, минимизирующих суммарную энергию. Имеются малые колебания вокруг точки минимума суммарной потенциальной и кинетической энергии.

Перейти от формализма Лагранжа, основанного на переменных $q_k, \dot{q}_k$, к формализму Гамильтона можно с помощью преобразования Лежандра. С его помощью функция Лагранжа $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ преобразуется к новой функции Гамильтона $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ по формуле см. [1]

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{p}_k \dot{\mathbf{q}}_k - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

Все выделенные жирным шрифтом переменные N мерные. Где величина импульса определяется по формуле см. [1]

$$\mathbf{p}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_k}.$$

Скорость может быть выражена через импульс при условии, если определитель матрицы $\dfrac{\partial^2 L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_n}$ отличен от нуля. При этом уравнения Гамильтона сводятся к виду см. [1]

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

В данном подходе координаты предлагается заменить углами тора $q_k = \varphi_k$ и действие соответствует импульсу. Тогда величина импульса равна действию $p_k = I_k$, а координата углу $q_k = \varphi_k$. Уравнения Гамильтона, при функции Гамильтона, зависящей от действия (вывод этой зависимости в тексте статьи) запишутся в виде

$$\begin{gathered} \dot{I}_k = -\frac{\partial H(\mathbf{I})}{\partial \varphi_k} = 0 \\ .\dot{\varphi}_k = \frac{\partial H(\mathbf{I})}{\partial I_k} = w_k, \varphi_k(t) = w_k(t - t_0) + \varphi_{k0} \end{gathered}.$$

Задача решается с помощью итераций, так как сразу невозможно решить систему нелинейных уравнений, заданных в виде алгоритма. Задача малой размерности с простыми формулами обращения переменных допускает аналитическое решение. Определив зависимость углов от времени, можно определить зависимость декартовых координат от времени по формуле (1).

Определим углы в случае N мерного пространства по формуле (при этом условно говоря $N-1$ угол определяет поверхность тела, а один угол определяет радиус).

$$x_l = a_l(\varphi_1,...,\varphi_N)\frac{\sin\varphi_l/2}{\sqrt{\cos^2\varphi_l/2\sum_{k=1}^{N}\tan^2\varphi_k/2}}. \qquad (1)$$

$$\dot{x}_l = \sum_{k=1}^{N}\Omega_{lk}(\varphi_1,...,\varphi_N)\dot{\varphi}_k$$

Определяется объем в N мерном пространстве, являющейся поверхностью в N+1 мерном пространстве $\sum_{l=1}^{N}\frac{x_l^2}{a_l^2(\varphi_1,...,\varphi_N)} = x_{N+1} = 1$ см. [2]. На этой поверхности углы зависимы. Эта система координат определяет поверхность N мерного тора с криволинейными координатами $u_l, l = 1,...,N$, расположенными в не круговом сечении тора и описывающие его поверхность. Одна из этих криволинейных координат описывает длину вдоль большой образующей тора, а остальные вращение вокруг этой образующей в ортогональной к образующей не плоской однозначно заданной поверхности

$$u_l = a_l(\varphi_1,...,\varphi_N)\frac{\sin\varphi_l/2}{\sqrt{\cos^2\varphi_l/2\sum_{k=1}^{N}\tan^2\varphi_k/2}}, l = 1,...,N.$$

Для этих криволинейных координат, тоже выполняется $\sum_{l=1}^{N}\frac{u_l^2}{a_l^2(\varphi_1,...,\varphi_N)} = 1$.

Причем для заданной точки пространства углы зависимы, и образующий угол определяет сечение пространства, в котором координаты пространства определяются $N-1$ углом. Однозначным образом перевели конечный объем в тор. Для этого объем растянули и замкнули в виде тора, при этом диаметр тела растянули в образующую тора, которая совпала с углом, соответствующим радиусу. Рассматривается пространство внутри объема или внутри тора. Описан физический смысл построенной системы координат, так как интегрируемый случай системы Гамильтона соответствует тору, но можно обойтись одними формулами, описывающими решение.

Допустим, имеется Лагранжиан $L(x_1,...,x_N,\dot{x}_1,...,\dot{x}_N) = L(\varphi_1,...,\varphi_N,\dot{\varphi}_1,...,\dot{\varphi}_N)$. Определим канонические переменные угол-момент импульса или угол-действие см. [1]

$$M_l = \frac{a_l \partial L}{\partial \dot{x}_l}, l = 1,...,N \;. \qquad (2)$$

Выразим частоту через переменные угол, момент импульса

$$w_l = \dot{x}_l = w_l(x_1,...,x_N,M_1,...,M_N), l = 1,...,N \;. \qquad (3)$$

Это можно сделать, если определитель матрицы $\frac{a_l a_k \partial^2 L}{\partial \dot{x}_l \partial \dot{x}_k}$ отличен от нуля. Построим Гамильтониан по формуле

$$H(\mathbf{M},\mathbf{x}) = H(\mathbf{M},\varphi_1,...,\varphi_N) = \sum_{l=1}^{N} M_l \dot{x}_l / a_l - L(\dot{\mathbf{x}},\mathbf{x}) \;. \qquad (4)$$

Введем переменные действия по формуле

$$I_k = \frac{1}{2\pi}\oint \sum_{k=1}^{N} M_k(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) dx_k / a_k =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{N} M_k(\varphi_1,...,\varphi_N,\mathbf{w}) \frac{\partial x_k(\varphi_1,...,\varphi_N,\mathbf{w})}{a_l \partial \varphi_l} \frac{w_l}{w_k} d\varphi_k, k = 1,...,N \;. \qquad (5)$$
$$\varphi_l = \frac{w_l}{w_k}(\varphi_k - \varphi_{k0}) + \varphi_{l0}$$

Получим зависимость действия от частоты $\mathbf{I} = \mathbf{I}(\mathbf{w})$. Обратим эту зависимость, получим $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{I})$.

Определим производящую функцию. Для вычисления производящей функции важно заранее знать решение. Так как у нас используется в качестве независимой переменной угол с известным решением, можно построить производящую функцию.

$$S(\mathbf{x},\mathbf{w}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{N} M_k(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})dx_k / a_k =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \sum_{k=1}^{N} M_k(\varphi_1,...,\varphi_N,\mathbf{w})\frac{\partial x_k(\varphi_1,...,\varphi_N,\mathbf{w})}{a_l\partial\varphi_l}\frac{w_l}{w_k}d\varphi_k, k=1,...,N.$$

Зная производящую функцию можно определить угловые переменные

$$\varphi_l = \frac{\partial S[\mathbf{x}(\varphi_1,...,\varphi_N),\mathbf{I}]}{\partial I_l}, l=1,...,N. \qquad (6)$$

Это уравнение можно разрешить относительно угла, считая действие переменным $\varphi_k = \varphi_k(\mathbf{I}), k=1,...,N$. Причем определитель $|\frac{\partial \varphi_k(\mathbf{I})}{\partial I_n}| = 0$, так как углы в этой формуле переменные, т.е. получим $\varphi_k = \varphi_k(t,\mathbf{I}), k=1,...,N$. Зависимость этой формулы от времени связано с тем, что система колеблется с частотой порядка года вокруг минимума потенциальной энергии системы. Система остается замкнутой, с сохраняющейся суммарной энергией системы, просто преобразование координат вырожденное. Значение суммарной энергии сохраняется. Подставляем значение угла из (6) в построенный Гамильтониан (4) и используя $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\varphi_1,...,\varphi_N,\mathbf{w})$, получим сохраняющийся Гамильтониан в переменных действие $H = H(\mathbf{I})$.

Составляем уравнение Гамильтона для данного Гамильтониана см. [1]

$$\begin{aligned} \dot{I}_k &= -\frac{\partial H(\mathbf{I})}{\partial \varphi_k} = 0 \\ .\dot{\varphi}_k &= \frac{\partial H(\mathbf{I})}{\partial I_k} = w_k, \varphi_k(t) = w_k(t-t_0) + \varphi_{k0} \end{aligned} \qquad (7)$$

Таким образом для произвольного объема и Гамильтониана получаем переменные действие-угол и система интегрируется. Но существуют точки, в которых система уравнений не разрешима, это точки равенства нулю определителей матриц $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_l \partial \dot{x}_k}$. Это особые точки системы уравнений, в которых переменные действие-угол не существуют, и система не интегрируется. Причем это свойство системы уравнений, а не построенной системы координат. Для непосредственного интегрирования в других координатах должна существовать особенность в виде нулевой действующей на все тела силы, при параллельной и равной скорости тел. Т.е. определятся координаты положения равновесия. При этом в дальнейшем движении системы может быть будет реализован скачок на другую координату положения равновесия с другой скоростью, и движение будет с разной скоростью тел по другим траекториям. В переменных действие-угол она носит устранимый характер, дискретно изменится нулевая фаза угла φ_{k0} в формуле (6) в точке особенности. Дискретное изменение фазы угла соответствует бесконечной частоте в особенности системы уравнений. Или дельта функции в решении, которое устраняется путем интегрирования, и нахождения скачка параметров см. (9) и определения скачка фазы.

Рассмотрим скачок решения при равенстве нулю определителя

$$
\begin{gathered}
M_l - M_{l1} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_l \partial \dot{x}_k}(\dot{x}_k - \dot{x}_{k1}) \\
\dot{x}_k - \dot{x}_{k1} = L_{kl}[\frac{i}{t - t_1 + i0} - \frac{i}{t - t_1 - i0})(M_l - M_{l1}) = L_{kl} 2\pi\delta(t - t_1)(M_l - M_{l1})\,. \qquad (9) \\
x_k - x_{k1} = 2L_{kl}\pi(M_l - M_{l1})
\end{gathered}
$$

Формулы Сохоцкого для скачка угла см. [3] формулы (1.2.45), (1.2.46). Но при нулевом определителе происходит может быть как нулевой, так и конечный скачок фазы и момента импульса. Чтобы произошел скачок, надо изменить энергию системы. Частота не может испытывать скачок, так как определяется из решения уравнения.

Для применения данного алгоритма к планетам Солнечной системы нужно ввести отдельную систему координат для каждого тела

$$z_{lp}-z_{lp0}=a_{lp}\frac{\sin\varphi_{lp}/2}{\sqrt{\cos^2\varphi_{lp}/2(1+\sum_{k=1}^{2}\tan^2\varphi_{kp}/2)}},l=1,2$$

$$z_{3p}-z_{3p0}=a_{3p}\frac{\cos\varphi_{lp}/2}{\sqrt{\cos^2\varphi_{lp}/2(1+\sum_{k=1}^{2}\tan^2\varphi_{kp}/2)}} \quad . \qquad (10)$$

$$\varphi_{lp}=\arg[(z_{3p}-z_{3p0})/a_{3p}+i(z_{lp}-z_{lp0})/a_{lp}];x_{lp}=\alpha_{lkp}(z_{kp}-z_{kp0})$$

$$\dot{x}_{lp}=\sum_{k=1}^{3}\Omega_{lkp}(\varphi_{1p},\varphi_{2p})\dot{\varphi}_{kp}$$

Орбиты планет Солнечной системы расположены не в одной плоскости, поэтому нужно осуществить поворот системы координат $x_{lp}=\alpha_{lkp}(z_{kp}-z_{kp0})$, описывающей эллипсоид. Определяется поверхность эллипсоида в 3 мерном пространстве $\sum_{l=1}^{3}\frac{x_{lp}^2}{a_{lp}^2}=1$. Для спутников планет надо ввести систему координат

$$u_{lpq}-u_{lpq0}-z_{lp}=a_{lpq}\frac{\sin\varphi_{lpq}./2}{\sqrt{\cos^2\varphi_{lpq}/2(1+\sum_{k=1}^{2}\tan^2\varphi_{kpq}/2)}},l=1,2$$

$$u_{3pq}-u_{3pq0}-z_{3p}=a_{3pq}\frac{\cos\varphi_{lpq}./2}{\sqrt{\cos^2\varphi_{lpq}/2(1+\sum_{k=1}^{2}\tan^2\varphi_{kpq}/2)}} \quad . \qquad (11)$$

$$y_{lpq}=\alpha_{lkpq}(u_{kpq}-u_{kpq0}-z_{kp})$$

$$\dot{y}_{lpq}=\sum_{k=1}^{3}\Omega_{lkp}(\varphi_{1p},\varphi_{2p})\dot{\varphi}_{kp}+\Omega_{lkpq}(\varphi_{1p},\varphi_{2p},\varphi_{1pq},\varphi_{2pq})\dot{\varphi}_{kpq}$$

Лагранжиан надо строить в виде суммы кинетической энергии планет и спутников, минус их потенциальная энергия.

$$L=\sum_{p}\sum_{k=1}^{3}(\frac{m_p\dot{z}_{kp}^2}{2}+\sum_{q}\frac{m_{pq}\dot{z}_{kpq}^2}{2})+\sum_{l,k}\frac{Gm_lm_k}{|\mathbf{r}_l-\mathbf{r}_k|}=T-V\,.$$

Кинетическая энергия от направления плоскости орбиты не зависит. Потенциальная энергия зависит от расположения осей эллипсоида тел $|A\mathbf{r}_l-B\mathbf{r}_k|=|\mathbf{r}_l-\mathbf{r}_k|+2(\delta_{lk}-\cos\psi_{lk})x_lx_k$ причем $\delta_{lk}=\cos\psi_{lk}$ если оси, описывающие траектории $\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_k$ эллипсоидов параллельны. Частота вращения зависит от величины смещения центра орбиты z_{lp0}, z_{lpq0}.

В остальном решение задачи не изменится. В результате решения образуется зависимость угла от времени, которую нужно подставить в формулы (10) и (11) и получить эллиптические траектории. Имеется две частоты вращения у каждой планеты, определяющие движение по эллипсоиду. Так как одна из частот определяется малой полуосью, и движение происходит почти в одной плоскости, существенна только одна частота. Одна из полуосей эллипсоида должна быть мала, определяя почти эллиптическое движение. Но существуют особые точки Солнечной системы, где эллиптическая траектория существует только по непрерывности, и где можно ожидать сюрпризов в гравитационном движении планет.

Чтобы изменить траекторию небесного тела надо приложить большую силу, сравнимую с гравитационным притяжением Солнца. Но в точках особенности достаточно малой силы, чтобы изменить траекторию путем смещения фазы небесного тела на не минимизирующие суммарную энергию параметр. Изменятся все траектории небесных тел при изменении фазы одного тела. При воздействии на одно небесное тело в точке особенности изменятся фазы у всех небесных тел, плоскость траектории изменится, что приведет к увеличению малой полуоси эллипсоида. Небесные тела перестанут двигаться в одной плоскости, а будут хаотически вращаться по эллипсоидам. На земле хаотически будет изменяться зима, весна, лето и осень, что приведет к умиранию растений и, следовательно, животных. Так малое воздействие может привести к большим последствиям, если его применят в определенном месте и в определенное время. Но по истечении времени система вернется к минимуму потенциальной и кинетической энергии.

Солнечная система, это тщательно выверенный механизм с движением планет по эллипсам в одной плоскости, а не по эллипсоиду. Имеется совокупность дискретных значений параметров орбиты, минимизирующих суммарную энергию. В каждой из этих совокупностей параметров происходит периодическая смена времен года, что способствовало зарождению жизни на Земле. Каждая фаза φ_{k0} в формуле (6) соответствует точке минимума суммарной кинетической и потенциальной энергии и имеет несколько значений. По-видимому, такие значения фазы φ_{k0} сложились в результате длительного развития Солнечной системы, как определяющие минимум ее суммарной кинетической и потенциальной энергии. Это можно проверить, определив траектории всех тел с точностью до фазы $\varphi_{kp0}, \varphi_{kpq0}$ в соответствующей линейной зависимости угла от времени, где фаза $\varphi_{kp0}, \varphi_{kpq0}$ является аддитивным членом, и минимизировать значение Гамильтониана по значению фазы $\varphi_{kp0}, \varphi_{kpq0}$.

Если суммарная кинетическая и потенциальная энергия имеют несколько постоянных минимальных значений $H = H(\mathbf{I})$, причем при этих возмущениях происходит переход с одного уровня энергии на другой сопровождается излучением или поглощением энергии. Суммарная энергия замкнутой даже вырожденной системы равна константе и сохраняется. Все как в квантовой механике в случае вращения электронов в атоме, имеются уровни энергии и между ними возможен переход с излучением, или поглощением энергии. только энергия излучения не электромагнитная, а гравитационная. Это внешнее воздействие на систему. Так как для тел большой массы справедливо уравнение Навье-Стокса, значит для них справедливо и уравнение Шредингера, но с другой постоянной Планка см. [4] стр. 2-5.

Для орбитального квантового числа получим формулу $\frac{L^2}{m\alpha} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{me^2} = p, l = n - n_r - 1$ см. [4], где величина p радиус вращения вокруг Солнца $r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$. Подставляя $\alpha = e^2 = GmM, \hbar_{eff} = \frac{137Gm^2}{c}$ см. [4], получим для орбитального квантового числа l формулу $l = \sqrt{\frac{2pM}{mr_{ge}}}/137 = 10^7, r_{ge} = \frac{2Gm}{c^2}$.

Большое квантовое число соответствует квазиклассическому описанию, и можно применять формулы закона движения Ньютона. Величина энергии определится из формулы $e = \sqrt{1 + \frac{2EL}{m\alpha^2}}$ см. [5] §15, Но какова энергия перехода между разными уровнями энергии $E_l = \frac{(e^2-1)m\alpha^2}{2L^2} = \frac{(e^2-1)me^4}{2\hbar_{eff}^2 l(l+1)} = \frac{(e^2-1)M^2}{2\cdot 137^2 ml^2}, l >> 1$ откуда имеем минимальное воздействие на Землю, способное изменить ее орбиту $E_{l+1} - E_l = \frac{(1-e^2)M^2c^2}{137^2 ml^3} \sim 10^{34} erg$, где используется масса Солнца и Земли. Причем удары метеоритов массой меньше $10^{13} g = 10^7 t$ со скоростью сближения с Землей много меньше скорости света, не могут изменить орбиту Земли.

Обеспечили минимум суммарной потенциальной и кинетической энергии и значения угловой зависимости плоскости вращения небесных тел α_{lkp}, α_{lkpq} и смещения положения центра орбиты z_{kp0}, u_{kpq0} в формулах (10) и (11). Все эти параметры имеют значения, минимизирующее усредненную потенциальную и кинетическую энергию и их имеется несколько совокупностей. Размер полуосей эллипсоида определится из минимума суммарной кинетической и потенциальной энергии, что следует из существования точки минимума потенциальной энергии системы. Найдя минимум суммарной потенциальной энергии, надо определить, как меняется малое отклонение этих параметров. Это приведет к Лапласиану

$$L = m_{lk}\dot{q}_l\dot{q}_k - c_{lk}q_l q_k,$$

Который сводится к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с положительно определенной квадратичной формой $m_{lk}\ddot{q}_k + c_{lk}q_k = 0$. Эта система с положительно определенными матрицами c_{lk}, m_{lk}, определяет колеблющееся решение с действительной малой частотой, определяемой из уравнения

$$| -m_{lk}\omega^2 + c_{lk} | = 0$$
$$m\omega^2 \Delta r = \frac{GMm}{R^3}\Delta r \cdot$$

Из второго уравнения оцениваем частоту колебаний. Период колебаний параметров, связанных с действием Солнца, порядка одного года

$$\omega^2 \sim \frac{GM}{R^3}, \qquad (12)$$

а связанных с другими планетами период еще больше.

Зависимость формировалась в результате столкновения планет, спутников планет, метеоров и комет. Способствовало минимуму суммарной кинетической и потенциальной энергии и процесс образования небесных тел из первичного материала.

Литература.

1. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. Перевод с английского. - М.: Эдиториал УРСС, 2001. - 320стр.
2. В. И. Арнольд. Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной динамике. УМН, 1963, том 18, выпуск 6(112), 91-192.
3. В.Кеч, П.Теодореску Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. Перевод с румынского О.Е. Булгару, «Мир», М.: 1978 г. 520стр.
4. Якубовский Е.Г. Квантовая механика для тел большой массы. «Энциклопедический фонд России», 2016г., 9 стр., http://russika.ru/userfiles/390_1508480729.pdf
5. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Механика. М.: «Наука». 1965г., 204стр.