Получение уравнения Дирака в спинорном представлении

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

На основании спинорного представления уравнения Клейна-Гордона получено уравнение Дирака. В уравнение Дирака подставлен спинор электромагнитного поля. В спинорах уравнения имеют простой вид и их можно решить. Для одинаковых, не взаимодействующих между собой частиц во внешнем поле получены комплексные значения энергии и импульса. Одинаковым образом описываются как бозоны, так и фермионы с другими квантовыми числами. Как бозоны, так и фермионы не могут иметь одинаковые комплексные координаты, поэтому квантовые числа у них разные. Комплексные собственные значения координаты и импульса имеют дисперсию, равную квадрату мнимой части, поэтому могут одновременно быть измерены. Для взаимодействующих частиц получено разное значение энергии, для каждой частицы свое, а импульс у них одинаковый, т.е. они образуют не меняющееся относительное распределение координат. Определены моменты времени, когда энергия меняет свое значение и меняется квантовое число, сохраняя его до следующего изменения. Причем взаимодействующие частицы расположены на равных безразмерных расстояниях. В размерном виде получается разное расстояние с учетом массы частицы.

Получим связь между импульсом и волновой функцией в спинорном представлении. Эта связь имеет вид

$$p_l \psi = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial y_l}; l = 0,\dots,3 \qquad (1)$$

Введем оператор дифференцирования с помощью спинора

$$\frac{d}{dX}=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial}{\partial y^0}+\frac{\partial}{\partial y^3} & \frac{\partial}{\partial y^1}+i\frac{\partial}{\partial y^2}\\ \frac{\partial}{\partial y^1}-i\frac{\partial}{\partial y^2} & \frac{\partial}{\partial y^0}-\frac{\partial}{\partial y^3}\end{matrix}\right\|/2.$$

Этот оператор - спинор получен путем скалярного произведения матриц Паули на оператор градиента в четырехмерном пространстве. Этот оператор является обратным по отношению к оператору спинорного дифференциала

$$dX=\left\|\begin{matrix}dy^0+dy^3 & dy^1+idy^2\\ dy^1-idy^2 & dy^0-dy^3\end{matrix}\right\|/2$$

$$X=\left\|\begin{matrix}y^0+y^3 & y^1+iy^2\\ y^1-iy^2 & y^0-y^3\end{matrix}\right\|/2;\frac{d}{dX}dX=E;\frac{d}{dX}=dX^{-1}.$$

Где матрица X называется координатным спинором. Этот спинор получен путем скалярного произведения матриц Паули на координаты в четырехмерном пространстве. Существует также спинор, образуемый четырьмя волновыми функциями, четырехмерным импульсом и четырехмерным потенциалом. Удалость построить решение, зависящее от этих спиноров.

Тогда представление (1) можно записать в виде

$$P\psi=-i\hbar\frac{d\psi}{dX};P=\left\|\begin{matrix}p^0+p^3 & p^1+ip^2\\ p^1-ip^2 & p^0-p^3\end{matrix}\right\|/mc.$$

Вводя вместо волновой функции спинор волновой функции, получим

$$P\Psi=-i\hbar\frac{d\Psi}{dX};\Psi=\left\|\begin{matrix}\psi^0+\psi^3 & \psi^1+i\psi^2\\ \psi^1-i\psi^2 & \psi^0-\psi^3\end{matrix}\right\|.$$

Откуда имеем значение спинора импульса

$$P=-i\hbar\frac{d\Psi}{dX}\Psi^{-1}=-i\hbar\frac{d\ln\Psi}{dX}.$$

Получим релятивистское уравнение с использование спиноров из уравнения Клейна-Гордона, записанного в безразмерном виде. Уравнение Клейна-

Гордона описывает частицы, с целым спином. Обобщим его для описания спиноров с произвольным спином

$$-[\frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial (y^0)^2} - \frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial (y^l)^2}] = -\frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial \overline{X} \partial X} = \mathrm{M} =$$

$$= \overline{\Psi}(\overline{X})\Psi(X) = -\frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\overline{X})\Psi(X)}{\partial \overline{X} \partial X} = i^2 \frac{\partial \overline{\Psi}(\overline{X})}{\partial \overline{X}} \frac{\partial \Psi(X)}{\partial X},$$

$$\overline{\Psi}(\overline{X}) = i\frac{\partial \overline{\Psi}(\overline{X})}{\partial \overline{X}}; \Psi(X) = i\frac{\partial \Psi(X)}{\partial X}$$

$$E = i\frac{\partial \ln \overline{\Psi}(\overline{X})}{\partial \overline{X}} + \overline{U}; E = i\frac{\partial \ln \Psi(X)}{\partial X} + U$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{X}} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial y^0} - \frac{\partial}{\partial y^3} & -(\frac{\partial}{\partial y^1} + i\frac{\partial}{\partial y^2}) \\ -(\frac{\partial}{\partial y^1} - i\frac{\partial}{\partial y^2}) & \frac{\partial}{\partial y^0} + \frac{\partial}{\partial y^3} \end{Vmatrix} / 2;$$

$$U = \frac{U}{mc^2} = \begin{Vmatrix} U_0 + U_3 & U_1 + iU_2 \\ U_1 - iU_2 & U_0 - U_3 \end{Vmatrix}, y^l = x^l \frac{\hbar}{2mc}$$

Это уравнение имеет решение

$$\ln \Psi(X) = -iX + i\int_0^X U(X)dX$$

$$\Psi(X) = \exp[-iX + i\int_0^X U(X)dX]; X_n - \int_0^{X_n} U(X)dX = 2\pi n, \Psi_n(2\pi n) = E$$

Спиноры между собой не коммутируют, поэтому необходимо соблюдать порядок произведения, при вычислении экспоненты, особенно при вычислении среднего значения. Получается аналог уравнения Дирака. Потенциалы зависят от координатных спиноров. Имеется конечное количество точек массы m, имеющих счетное количество определенных комплексных координат. Собственные значения координат частиц комплексные см. [1], что означает их вращение по эллипсоиду с осями, равными мнимой части координаты см. [2] стр. 53. Это справедливо для классического описания, квантовое описание определяет рассогласование по фазе колебаний по трем осям, и описывает не эллипсоид, а более сложное хаотическое поведение элементарных частиц. Вдоль каждой оси происходит колебание со своей скоростью, причем фаза этих колебаний не когерентна. Амплитуда колебаний равна мнимой части координаты. В остальных точках с не собственным значением координаты спинор Ψ имеет переменное значение. Этот непрерывный спинор описывает волновую функцию вращающихся частиц. Так как частицы не взаимодействуют между собой, они неразличимы. Их энергия не зависит от спина, энергия и импульс этих не взаимодействующих неразличимых частиц одинаковы. При этом спинор собственной энергии и импульса вращающихся частиц переменный, со средним значением, равным значению средней энергии и импульсу частиц. Спинор средней энергии и импульса каждой частицы считаются по формуле

$$\mathrm{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(X)[E - U(X)]\Psi(X)dX \ .$$

Причем средние значения энергии и импульса комплексные, где мнимая часть импульса определяет одинаковую скорость вращения частиц.

В случае отсутствия электромагнитного поля имеем значение энергии-импульса

$$\mathrm{E} = \begin{Vmatrix} p^0 + p^3 & p^1 + ip^2 \\ p^1 - ip^2 & p^0 - p^3 \end{Vmatrix} / mc = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$
$$p^0 = mc$$

Т.е. частицы расположены в точках с собственным значением $y_n = 2\pi n\hbar / mc$ и не вращаются и не двигаются, так как координата действительная постоянная.

В случае учета влияния частиц друг на друга, имеется N волновых функций, каждая со своим потенциалом и имеется система из N уравнений. Где величина n означает номер частицы, а величина k ее положение в пространстве. Величина k определяет ветвь решения и одинакова для всех частиц. Волновая функция у каждой частицы разная

$$\ln \Psi_n(X) = -i(X - 2\pi n) + i\sum_{m=1}^{N} \int_{2\pi n}^{X} U(X - X_{mk})dX$$

$$\Psi_n(X) = \exp[-i(X - 2\pi n) + i\sum_{m=1}^{N} \int_{2\pi n}^{X} U(X - X_{mk})dX];$$

$$X_{nk} - 2\pi n - \sum_{m=1}^{N} \int_{2\pi n}^{X_{nk}} U(X - X_{mk})dX = 2\pi k, \Psi_n(X_{nk}) = E$$

Все частицы соответствующие одной ветви собственной координаты (общее значение k) двигаются с одинаковой поступательной скоростью, определяемой действительной частью импульса. Имеется счетное количество координат, которые эти частицы могут занять хаотическим образом, каждую координату в свой момент времени, и далее частица существует с этими параметрами. При новом моменте времени меняется не предсказуемым образом расположение частиц, до следующего момента времени. Каждая частица занимает свою координату.

Решение с потенциальным электромагнитным полем описывает распределение элементарных частиц одинаковой массы во внешнем электромагнитном поле. В случае не внешнего, а взаимного электромагнитного поля интеграл частиц с постоянными комплексными координатами определяется по формуле

$$\frac{d}{dX}\int_{2\pi n}^{X_{nk}} \sum_{m=1}^{N} U(X - X_{mk})dX = \sum_{m=1}^{N} U(X_{nk} - X_{mk}).$$

так как комплексные скорости частиц одинаковы, аргументы сводятся к разности квантовых чисел. В случае периодичного распределения частиц по пространству получается периодичная электромагнитная энергия $x_{nk} = x_{0k} + 2\pi n$. Формула для периодической по пространственным координатам функции имеет вид (по временной координате функция не периодическая)

$$U(x_0,...,x_3) = \sum_{n,m,k=-\infty}^{\infty} A_{nmk} \exp(ilx_0 + inx_2 + imx_2 + ikx_3), l^2 = n^2 + m^2 + k^2$$

Причем в случае не внешнего, а собственного поля собственная энергия и импульс является константой и зависит от двух индексов.

$$\mathrm{E}_{nk} = i\frac{\partial \ln \Psi(X)}{\partial X} = E - \sum_{m=1}^{N} U(X_{nk} - X_{mk}).$$

Энергия у разных частиц разная так как временная зависимость функции потенциала электромагнитного поля не периодическая, а пространственный импульс одинаков, так как пространственные координаты периодичные. Частица меняет свои координаты с изменением квантового числа k в определяемый момент времени.

В случае электромагнитного поля его потенциал считается по формуле Лиенара-Вихерта и равен $U_q(X_{nk} - X_{mk}) = \dfrac{e\mathrm{E}_{nkq}}{(X_{nkp} - X_{mkp}, \mathrm{E}_{nk}^{p})}$ и величина энергии импульса считается из нелинейного уравнения, причем импульс у всех частиц одинаков, а энергия разная. В силу постоянства комплексных координат запаздывание учитывать не надо.

Оценим величину энергии частицы. Она состоит из взаимодействия частиц одинакового и разного знака и для четырех частиц разного знака (пара взаимодействий одинакового и разного знака) для большого главного квантового числа равна

$$\mathrm{E}_0 - mc^2 = -\sum_{m=1,3}\left(\frac{\alpha}{n-m} - \frac{\alpha}{n-m+1}\right) = -\sum_{m=1,3}\frac{\alpha}{(n-m)(n-m+1)} = -\frac{2\alpha}{n^2}.$$

В случае двух частиц разного знака, близко расположенных они образуют поле диполя во всем пространстве и значит энергия равна $\mathrm{E}_0 - mc^2 \sim -\dfrac{\alpha}{(n-m)^2}$.

Когда диполь взаимодействует с другой частицей плечо диполя параллельно направлению на частицу. При усреднении такого взаимодействия появляется постоянный множитель $<\cos^2\varphi>=1/2$. Так как диполь состоит из частиц разного знака, его энергия отрицательная.

Причем для каждой частицы безразмерные параметры используют свою массу, при переходе к размерным параметрам это надо учитывать.

Решение задачи определяет комплексное значение импульса и координаты. Для действительных координат это невозможно. Но комплексные координаты определены с точностью до среднеквадратичного отклонения, равного мнимой части, следовательно, могут удовлетворять соотношению неопределенности.

Решение задачи не зависит от спина частицы, а зависит от других квантовых чисел, в которые спин не входит. Для получения зависимости от спина надо использовать уравнение второго порядка. Что и сделано в статье [3].

Что произойдет если учитывать внешнее электромагнитное поле и собственное поле элементарных частиц. Тогда переменное значение энергии импульса состоит из переменной скорости частиц вакуума $-U(X)$ и движение с постоянной комплексной скоростью элементарных частиц $-\sum_{m=1}^{N} U(X_{nk} - X_{mk})$

$$P(X) = i\frac{\partial \ln \Psi(X)}{\partial X} = E - U(X) - \sum_{m=1}^{N} U(X_{nk} - X_{mk}) .$$

Причем при усреднении частиц вакуума, имеющих одинаковую массу, возникнет постоянное значение энергии элементарных частиц и постоянная скорость элементарных частиц.

$$< P(X) >= E - < U(X) > - \sum_{m=1}^{N} U(X_{nk} - X_{mk})$$

При переходе к классическому описанию потоков заряженных частиц, получим движение с постоянной скоростью как единое целое распределения частиц, моделирующее твердое тело. Плюс движение с переменной скоростью непрерывной среды, определяемое внешним полем, которое в классике соответствует звуковому четырехмерному потенциалу.

Соотношение $y^l = x^l \frac{\hbar}{2mc}$ надо заменить $y^l = ix^l \frac{v}{c}$, так как кинематическая вязкость вакуума равна $v = -i\frac{\hbar}{2m}$ см. [2]. Кроме того, скорость света в вакууме надо заменить на скорость звуковых волн. По поводу преобразований Лоренца для звуковых волн см. [5] глава 4. Но умножение координаты на мнимую единицу не изменит решение уравнения Дирака, так как квадрат мнимой координаты тоже инвариантен. Не изменится и квадрат четырехмерной скорости. следовательно действие $p_x(ix^k)/mv = -p_x x^k/\hbar$ при переходе к действительной вязкости изменит свой знак. Значит, комплексное действие, в фазе экспоненты изменит свой знак. Рассуждения не изменятся при этой инверсии, так как мнимая часть фазы только изменит знак, а знак действительной фазы изменится на противоположный. Но эту инверсию необходимо произвести.

В частности, получается решение, где среда является абсолютно твердым телом, справедливое для всего пространства.

$$\mathbf{p}^0 = 1, \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + [\mathbf{w}, \mathbf{r}]/c, \mathbf{w} = e\mathbf{H}/2mc^2, \mathbf{H} = const\,.$$

Решение для безразмерной величины энергии импульса среды может иметь вид

$$\mathbf{p}^0 = 1 - \sum_{n=1}^{P} \frac{q_n}{(x_k - b_{nk}, V^k/c)}, \mathbf{p} = -\sum_{n=1}^{P} \frac{q_n \mathbf{V}}{(x_k - b_{nk}, V^k/c)c}\,.$$

Где величина b_{nk} безразмерная координата внешнего источника поля с безразмерным зарядом q_n, величина $\mathbf{V}$ это скорость среды, которая определяется из нелинейного уравнения по известной координате.

В случае отсутствия внешних источников поля, надо использовать собственное поле, задавая комплексный размер тела для отсутствия сингулярности. Комплексный размер тела определен в [4]. При нулевой скорости тела относительно среды, скорость среды равна нулю, она не возмущается $P = P_0 = mc$ и значит скорость среды нулевая $\mathbf{V} = 0$ Если тело имеет скорость относительно неподвижной на бесконечности среды

$$\mathbf{p}_U = \{\exp[\exp(-(x_1 - \mathrm{Re}\, b_1 - U_1 t)^2)] - 1\}\{\exp[\exp(-(x_2 - \mathrm{Re}\, b_2 - U_2 t)^2)] - 1\} \times$$
$$\times \{\exp[\exp(-(x_3 - \mathrm{Re}\, b_3 - U_3 t)^2)] - 1\} / [\exp(1) - 1]^3 \frac{m\mathbf{U}/c}{\sqrt{1 - U^2/c^2}}$$

, имеем и из нелинейного уравнения $\mathbf{p}_U = -\frac{q_n \mathbf{V}}{(x_k - b_k, V^k / c)c}$ можно определить скорость среды $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x_1, ..., x_3)$. Тело на бесконечности радиуса имеет нулевую скорость. При этом заряд определится из условия на поверхности тела, скорость среды на поверхности тела равна скорости тела $\frac{m}{\sqrt{1 - U^2/c^2}} = -\frac{q}{(-\mathrm{Im}\, b_k, U^k / c)c}$. Откуда определится переменный заряд в зависимости от углов сферической системы координат при равенстве скорости среды и тела.

Литература

1. Якубовский Е.Г. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА В КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ "Международный журнал экспериментального образования". – 2016. – № 9 (часть 2) – С. 255-268 http://expeducation.ru/pdf/2016/9-2/10491.pdf

2. Якубовский Е.Г. Исследование решения уравнения Навье – Стокса II. «Энциклопедический фонд России», 2016, 61 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1509211918.pdf

3. Якубовский Е.Г. Решение уравнения Клейна-Гордона в спинорном представлении для широкого класса потенциалов. «Энциклопедический фонд России», 2017, 11 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1479397178.pdf

4. Якубовский Е.Г. Преобразование произвольного тела в сферу комплексного радиуса. «Энциклопедический фонд России», 2017, 18 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1492726821.pdf
5. Якубовский Е.Г. По поводу преобразований Лоренца. «Энциклопедический фонд России», 2017, 94 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1504051609.pdf