Общее описание звуковой и ударной волны

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Звуковая волна распространяясь, возбуждает множество степеней свободы. От количества степеней свободы зависит скорость частиц в звуковой волны, и, следовательно, давление на фронте звуковой волны. Чем выше частота звуковой волны, тем меньше скорость частиц в звуковой волне. Роль амплитуды звуковой волны выполняет охваченная масса. Устраняется противоречие между ударной волной слабой интенсивности и звуковой волной. Вычислена граница между системами типа ударной волны и звуковой волны. Получены решения систем с постоянной частотой. Зная спектр частот, можно решить задачу о взрыве, выстреле, или ударе, интегрируя произведение спектральной функции на решение для одной частоты. Это можно сделать как для дозвукового течения, так и для сверхзвукового.

Имеем метрический интервал ударной волны. Из фазовой скорости звуковой волны определяем коэффициент, связывающий фазовую скорость и скорость частиц ударной волны. При неподвижном фронте ударной волны наблюдаются такие значения критической скорости. При переходе фронта ударной волны метрический интервал рвется, меняются все параметры. Рассмотрим метрический интервал звуковой волны при неподвижном фронте звуковой волны

$$ds^2 = c_F^2 dt^2 - u_1^2 dt^2 = (\alpha^2 - 1) u_1^2 dt^2, \alpha > 1.$$

Справедливы следующие соотношения.

$$c_{F1} = \alpha u_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} u_1$$
$$u_1 = c_s - V, u_2 = c_* = c_s \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}, \gamma = \frac{c_p}{c_v}, V = c_s (1 - \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}) . \qquad (1)$$

Из этих соотношений определяется фазовая скорость ударной волны, по свойствам звуковой волны и свойствам критической скорости c_*. Скорость частиц V в звуковой волне зависит от отношения теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме. Это отношение определяется количеством степеней свободы.

В единице объема, содержащем N частиц имеется 3N степеней свободы. Их них 3 поступательных и 3 вращательных единицы движения объема как единого целого, остается 3N-6 колебательных степеней свободы. Идеальный газ описывается максимум 9 степенями свободы, как не взаимодействующая между частицами система. Но при распространении колеблющихся звуковых волн резонансно возбуждаются дополнительные степени свободы. В звуковой волне возбуждаются количество степеней свободы N, где используется масса, амплитуда и частота звуковой волны

Количество степеней свободы ударной волны определяется по формуле

$$N = \frac{m}{\mu} \frac{E}{RT/2} + l = \frac{2m^2 \nu \omega}{\mu RT} + l = (\frac{2m^2 \nu \omega}{\mu^2 c_s^2} + \frac{l}{\gamma^2}) \gamma^2 .$$

Отношение теплоемкостей определяется по формуле

$$\gamma = \frac{N+2}{N} .$$

Откуда получаем кубическое уравнение по определению отношения теплоемкостей

$$\begin{gathered}\gamma^3-\gamma^2+\gamma\frac{l\mu^2c_s^2}{2m^2\nu\omega}-\frac{(l+2)\mu^2c_s^2}{2m^2\nu\omega}=0, \gamma=\delta+1/3 \\ \delta^3-\delta(1/3-\frac{l\mu^2c_s^2}{2m^2\nu\omega})-2/27-\frac{(2l/3+2)\mu^2c_s^2}{2m^2\nu\omega}=0\end{gathered}. \qquad (2)$$

При частоте, равной нулю, получаем $\gamma=\frac{l+2}{l}$, т.е. формулу для идеального газа. Фазовая скорость определится по формуле $c_{F1}=\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}u_1$, $c_{F2}=\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}u_2$. При этом имеем связь с фазовыми скоростями и критической скоростью, фазовыми скоростями в двигающихся средах и фазовой скоростью в неподвижной среде $c_{F1}c_{F2}=\frac{\gamma+1}{2}c_*^2=c_s^2$. Эта формула аналогична формуле в волноводе $c_F c_G=c^2/\varepsilon\mu$, т.е. произведение фазовой скорости на групповую в волноводе равно фазовой скорости при неподвижной среде, т.е. групповая скорость меньше фазовой скорости в неподвижной среде, а фазовая скорость больше. В случае ударной волны дозвуковая скорость соответствует групповой скорости, а сверхзвуковая скорость фазовой скорости. В случае звуковой волны групповая и фазовая скорость совпадают с фазовой скоростью в неподвижной среде.

Получаем уравнение

$$\begin{gathered}\gamma=\delta+1/3 \\ \delta^3-\delta(1/3-\frac{l\mu^2c_s^2}{2m^2\nu\omega})-2/27-\frac{(2l/3+2)\mu^2c_s^2}{2m^2\nu\omega}=0. \\ \delta^3+p\delta+q=0\end{gathered}$$

Получение решений взято из [1]. Рассмотрим случай $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0, p<0$. Рассмотрим произвольные частоты. Для выполнения этих условий при высоких частотах необходимо

$$[\frac{1}{27}+\frac{(l/3+1)\mu^2 c_s^2}{m^2\nu\omega}]^2<\frac{1}{27}(\frac{1}{3}-\frac{l\mu^2 c_s^2}{2m^2\nu\omega})^3$$

$$\frac{1}{27^2}+\frac{(l/3+1)\mu^2 c_s^2}{m^2\nu\omega}+\frac{(l/3+1)^2}{4}(\frac{(l/3+1)\mu^2 c_s^2}{m^2\nu\omega})^2<$$

$$<\frac{1}{27^2}-\frac{1}{27\cdot 9}\frac{l\mu^2 c_s^2}{2m^2\nu\omega}+\frac{1}{81}(\frac{l\mu^2 c_s^2}{2m^2\nu\omega})^2-(\frac{l\mu^2 c_s^2}{2m^2\nu\omega})^3 ,$$

$$[\frac{(l/3+1)}{27}+\frac{l}{27\cdot 9}]\frac{\mu^2 c_s^2}{m^2\nu\omega}<[\frac{l^2}{81}-\frac{(l+3)^2}{4\cdot 9}](\frac{l\mu^2 c_s^2}{2m^2\nu\omega})^2-(\frac{l\mu^2 c_s^2}{2m^2\nu\omega})^3$$

что при любых частотах не выполняется.

Граница между разными формулами кубического уравнения $p=0$, при этом имеем $\gamma_{cr}=\delta_{cr}+1/3=1/3+\sqrt[3]{\frac{2l/3+2}{3l}+\frac{4m^2\nu\omega}{81l\mu^2 c_s^2}}$, причем при этих условиях $u_1<c_*, u_2=c_*$. Отсутствию всяких волн соответствует $u_1=u_2=c_*$ При условии $\delta<\delta_{cr}, \omega>\omega_{cr}$ наблюдается система типа звуковая волна $u_1<c_*$, при условии $\delta>\delta_{cr}, \omega<\omega_{cr}$ наблюдается система типа ударная волна, причем ударная волна образуется при малых частотах. Область $\gamma\in[1/3+\sqrt[3]{\frac{2l/3+2}{3l}+\frac{4m^2\nu\omega}{81l\mu^2 c_s^2}},1+2/l]$ является областью ударных волн при условии $u_2>c_*$. При больших частотах эта область не заполнена. При максимальной частоте, удовлетворяющей условию $(2/3+2/l)^3-2/9-2/(3l)=\frac{4m^2\nu\omega_{cr}}{81l\mu^2 c_s^2}>\frac{4m^2\nu\omega}{81l\mu^2 c_s^2}$ образуются ударные волны. Причем как звуковые волны колеблются с амплитудой $V\exp(i\omega t)=(u_1-u_2)\exp(i\omega t)$ на фронте звуковой волны ударные волны в объеме, ограниченном расстоянием ν/c_s от фронта, меняют свою скорость по аналогичному закону. Но частота этих колебаний мала, зато амплитуда значительная, хлопок при прохождении ударной волны мы слышим. Ударная волна из-за большой амплитуды скачка может разбить окна, чего не может сделать звуковая волна.

При скорости тела в неподвижной среде меньше скорости звука работают формулы (1), так как ударная волна не образуется. Отношение $\gamma = c_p / c_V$ вычисляется из уравнения (2). Как только скорость тела в неподвижной среде превышает скорость звука, начинают работать формулы ударной волны, как для звуковой части, так и для ударной части системы.

Вычислим корни этого уравнения при условии $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0, p < 0$, т.е. для звуковых волн. При этом справедливо $\frac{q^2}{4} > -\frac{p^3}{27}$. Введем $\sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2}\sin\alpha, \tan\beta = \sqrt[3]{\tan(\alpha/2)}$, причем $\alpha \sim -\pi/2, \beta \sim -\pi/4$ тогда имеем для корней выражения

$$\delta_1 = \frac{-2\sqrt{1/9 - \frac{l\mu^2 c_s^2}{18m^2 v\omega}}}{\sin 2\beta}, \delta_2 = \delta_3^* = \frac{-2\sqrt{1/3} \pm i\cos 2\beta}{\sin 2\beta}\sqrt{1/3 - \frac{l\mu^2 c_s^2}{2m^2 v\omega}} \sim 2\sqrt{1/9 - \frac{l\mu^2 c_s^2}{6m^2 v\omega}}$$

, см. [1], но эти действительные корни отличаются и имеют малую мнимую часть, какой из них реализуется это загадка. Где имеем значение коэффициентов $p = -(1/3 - \frac{l\mu^2 c_s^2}{2m^2 v\omega})$, $q = -2/27 - \frac{(2l/3 + 2)\mu^2 c_s^2}{2m^2 v\omega}$.

Для ударной волны справедливо $\frac{q^2}{4} > -\frac{p^3}{27}, p > 0$. Введем коэффициенты $\sqrt{\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2}\tan\alpha, \tan\beta = \sqrt[3]{\tan(\alpha/2)}$, причем $\alpha \sim -\pi/2, \beta \sim -\pi/4, \omega = 0$, тогда имеем для корней выражения см. [1]

$$\delta_1 = -2\sqrt{p/3}\cot 2\beta, \delta_2 = \delta_3^* = \frac{2\sqrt{p/3}\cos 2\beta \pm i\sqrt{p}}{\sin 2\beta}$$
$$\delta_1 = -2\sqrt{\frac{l\mu^2 c_s^2}{6m^2 v\omega} - \frac{1}{9}}\cot 2\beta, \delta_2 = \delta_3^* = \frac{2\sqrt{1/3}\cos 2\beta \pm i}{\sin 2\beta}\sqrt{\frac{l\mu^2 c_s^2}{2m^2 v\omega} - \frac{1}{3}}.$$

При следующем определении коэффициентов $p = \frac{l\mu^2 c_s^2}{2m^2 v\omega} - 1/3$, $q = -2/27 - \frac{(2l/3+2)\mu^2 c_s^2}{2m^2 v\omega}$

Но уравнения при амплитуде волны, равной нулю, т.е. при бесконечно большой охватываемой области, удовлетворяет условию $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$ и уравнение при малой амплитуде, или большой охватываемой массы, имеет кратный корень $\delta = 2/3$, а для отклонения получим уравнение

$$\xi^3 + 2\xi^2 + \xi(1 + \frac{l\mu^2 c_s^2}{2m^2 v\omega}) - \frac{\mu^2 c_s^2}{m^2 v\omega} = 0, \gamma = \delta + 1/3 = \xi + 1$$

получаем асимптотику решения этого уравнения при частоте, стремящейся к бесконечности

$$\gamma = 1 + \frac{\mu^2 c_s^2}{m^2 v\omega} / (1 + \frac{l\mu^2 c_s^2}{2m^2 v\omega})..$$

Скорость частиц в звуковой волне определяется по формуле

$$V = c_s(1 - \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}) = c_s(1 - \frac{\sqrt{m^2 v\omega}}{\sqrt{m^2 v\omega + \mu^2 c_s m^2 v\omega / (m^2 v\omega + l\mu^2 c_s^2 / 2)}}) = \\ = \frac{\mu^2 c_s^3}{2m^2 v\omega} / (1 + \frac{l\mu^2 c_s^2}{2m^2 v\omega}).$$

Получается звуковая волна из соотношения для ударных волн см. [2] формула (89.5)

$$u_1 - u_2 = \frac{\sqrt{2V_1}(p_2 - p_1)}{[(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2]^{1/2}} = \frac{\sqrt{V_1 p_1}(p_2 - p_1)}{p_2}; V_1 = 1/\rho_1.$$

При условии $u_1 \sim u_2 = c_s, p_2 \sim p_1, \gamma \sim 1$, получим $\Delta p = p_2 - p_1 = p(u_1 - u_2)/c_s = \rho c_s(u_1 - u_2) = \rho c_s V$ формулу для звуковой волны из соотношений для ударной волны.

Величина массы выступает в виде амплитуды звуковой волны. Амплитуда звуковой волны уменьшается с расстоянием как величина $A \sim 1/r$. Если охватываемую массу увеличить, пропорциональную $m \sim r^3 \sim 1/A^3$, амплитуда волны меньше. При постоянной энергии звуковой волны, пропорциональной частоте, чем больше охватываемый объем, тем амплитуда меньше.

Кроме того, имеется два комплексных корня при высоких частотах

$$\frac{2m^2 v\omega}{(l+2)\mu^2 c_s^2}(1-\frac{1}{\gamma})+\frac{l}{(l+2)\gamma^2}-\frac{1}{\gamma^3}=0$$

$\frac{1}{\gamma}=\frac{l}{2(l+2)}\pm i\sqrt{\frac{2m^2 v\omega}{(l+2)\mu^2 c_s^2}-\frac{l^2}{4(l+2)^2}}$ или вычисляя малый параметр, получим $\gamma=\exp(i\alpha)\sqrt{\frac{(l+2)\mu^2 c_s^2}{2m^2 v\omega}}, \exp(i\alpha)=\frac{2\sqrt{1/3}\cos 2\beta \pm i}{\sin 2\beta}$. Эти корни определяют комплексную скорость частиц $c_{F1}=\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}u_1=\sqrt{\frac{1+\exp(i\alpha)\sqrt{\frac{(l+2)\mu^2 c_s^2}{2m^2 v\omega}}}{2}}u_1;$. Что определяет малую комплексную скорости частиц при неподвижном фронте ударной волны

$$u_1^2=\frac{c_s^2}{2\gamma}[\gamma-1+(\gamma+1)\frac{p_2}{p_1}]=\exp(i\alpha)\frac{c_s^2}{2}\frac{p_2-p_1}{p_1}\sqrt{\frac{2m^2 v\omega}{(l+2)\mu^2 c_s^2}}$$

$$u_2^2=\frac{c_s^2}{2\gamma}[\gamma-1+(\gamma+1)\frac{p_1}{p_2}]=\exp[i(\alpha-\pi)]\frac{c_s^2}{2}\frac{p_2-p_1}{p_2}\sqrt{\frac{2m^2 v\omega}{(l+2)\mu^2 c_s^2}}$$

$$\frac{c_s^4}{4}\frac{(p_2-p_1)^2}{p_1 p_2}\frac{2m^2 v\omega}{(l+2)\mu^2 c_s^2}\exp[i(2\alpha-\pi)]=a_{\&}^4=4c_s^4;$$

$$\frac{p_2-p_1}{p_1}=\exp[i(\pi-2\alpha)]\sqrt{\frac{8(l+2)\mu^2 c_s^2}{m^2 v\omega}}=\sqrt{\frac{8(l+2)\mu^2 c_s^2}{m^2 v\omega}}(\frac{\sin 2\beta}{2i\sqrt{1/3}\cos 2\beta \mp 1})^2$$

Другая ветвь скорости частиц в ударной волне $v=\frac{\mu^2 c_s^3}{2m^2 v\omega}/(1+\frac{l\mu^2 c_s^2}{2m^2 v\omega})$.

Найдем комплексное решение на низких частотах

$$\gamma^3-\gamma^2+\gamma\frac{l\mu^2c_s^2}{2m^2\nu\omega}-\frac{(l+2)\mu^2c_s^2}{2m^2\nu\omega}=0$$

$\gamma=\frac{1}{2}\pm i\sqrt{\frac{l\mu^2c_s^2}{2m^2\nu\omega}-\frac{1}{4}}$. Или вычисляя малый параметр, получим $\frac{1}{\gamma}=\exp(i\alpha)\sqrt{\frac{2m^2\nu\omega}{l\mu^2c_s^2}},\exp(i\alpha)=\frac{-2\sqrt{1/3}\pm i\cos2\beta}{\sin2\beta}i$ Вычислим скорость частиц в ударной волне при неподвижном фронте

$$u_1^2=\frac{c_s^2}{2\gamma}[\gamma-1+(\gamma+1)\frac{p_2}{p_1}]=\frac{c_s^2}{2}[1+\frac{p_2}{p_1}]$$
$$u_2^2=\frac{c_s^2}{2\gamma}[\gamma-1+(\gamma+1)\frac{p_1}{p_2}]=\frac{c_s^2}{2}[1+\frac{p_1}{p_2}].$$
$$\frac{c_s^4}{2}\frac{(p_1+p_2)^2}{p_1p_2}=c_*^4=c_s^4\frac{4}{(\gamma+1)^2}$$

Получаем

$$\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}+\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}-\frac{\sqrt{\frac{2m^2\nu\omega}{l\mu^2c_s^2}}\exp(i\alpha)}{[\mp i+(1+1/l)\exp(i\alpha)\sqrt{\frac{2m^2\nu\omega}{l\mu^2c_s^2}}]}=0$$
$$\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}=\exp(\pm i\alpha)[\sqrt{\frac{2m^2\nu\omega}{l\mu^2c_s^2}}/2\pm\sqrt{\frac{2m^2\nu\omega}{l\mu^2c_s^2}-\exp(\mp2i\alpha)}]$$
$$\frac{p_1}{p_2}=\exp(\pm2i\alpha)[\sqrt{\frac{2m^2\nu\omega}{l\mu^2c_s^2}}/2-\sqrt{\frac{2m^2\nu\omega}{l\mu^2c_s^2}-\exp(\mp2i\alpha)}]^2.$$
$$\frac{p_2}{p_1}=\exp(\pm2i\alpha)[\sqrt{\frac{2m^2\nu\omega}{l\mu^2c_s^2}}/2-\sqrt{\frac{2m^2\nu\omega}{l\mu^2c_s^2}-\exp(\mp2i\alpha)}]^2$$
$$p_1=-p_2,\omega=0$$

Скорость частиц в ударной волне определяется по формуле

$$u_1^2=\frac{c_s^2}{2}(1+\frac{p_2}{p_1})=0$$
$$u_2^2=\frac{c_s^2}{2}(1+\frac{p_1}{p_2})=0.$$

Формулы асимптотические, правильный результат $u_1 u_2 = 0 = c_s^2 \dfrac{2}{\gamma+1} = 0$ получается при условии $\omega = 0, p_1 = -p_2$ Решение при нулевой частоте определяет нулевую скорость частиц в случае если фронт неподвижен. В случае малой частоты получим малые значения скорости частиц при нулевой скорости фронта.

$$u_1^2 = \frac{c_s^2}{2\gamma}[\gamma - 1 + (\gamma+1)\frac{p_2}{p_1}] = \frac{c_s^2}{2}[1 + \frac{p_2}{p_1} + (\frac{p_2}{p_1} - 1)/\gamma]$$

$$u_2^2 = \frac{c_s^2}{2\gamma}[\gamma - 1 + (\gamma+1)\frac{p_1}{p_2}] = \frac{c_s^2}{2}[1 + \frac{p_1}{p_2} + (\frac{p_1}{p_2} - 1)/\gamma]$$

$$\frac{c_s^4}{2}[1 + \lambda + \ (\lambda - 1)/\gamma][1 + \frac{1}{\lambda} + (\frac{1}{\lambda} - 1)/\gamma] = c_*^4 = c_s^4 \frac{4}{(\gamma+1)^2} \quad .$$

$$[1 + \lambda + (\lambda - 1)/\gamma][1 + \lambda + (1-\lambda)/\gamma] = (1+\lambda)^2 - (1-\lambda)^2/\gamma^2] =$$

$$= (1+\lambda^2)(1 - 1/\gamma^2) + 2\lambda(1 + 1/\gamma^2) = \frac{4\lambda}{(\gamma+1)^2}$$

$$\lambda^2 (1 - 1/\gamma^2) + 2\lambda(1 + 1/\gamma^2 - \frac{2}{(\gamma+1)^2}) + (1 - 1/\gamma^2) = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 - 1/\gamma^2 + \dfrac{2}{(\gamma+1)^2} \pm \sqrt{(1 + 1/\gamma^2 - \dfrac{2}{(\gamma+1)^2})^2 - (1 - 1/\gamma^2)^2}}{1 - 1/\gamma^2}$$

$$\lambda = \frac{p_2}{p_1} = -1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{\gamma^{3/2}}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{p_1}{p_2} = -1 \mp \frac{2\sqrt{2}}{\gamma^{3/2}}$$

Скорость частиц в ударной волне равна

$$u_1 = ic_s \sqrt{\frac{1}{\gamma} \pm \frac{\sqrt{2}}{\gamma^{3/2}}}; u_2 = ic_s \sqrt{\frac{1}{\gamma} \mp \frac{\sqrt{2}}{\gamma^{3/2}}}$$

$$\frac{1}{\gamma} = \exp[\pm i(\alpha - \pi/2)]\sqrt{\frac{2m^2 \nu\omega}{l\mu^2 c_s^2}} = \sqrt{\frac{2m^2\nu\omega}{l\mu^2 c_s^2}} \frac{\sin 2\beta}{\mp 2i\sqrt{1/3} + \cos 2\beta}$$

Но как описать единичный фронт ударной волны. Для этого необходимо знать частотную зависимость перепада фронта волны, получим переменную скорость частиц волны

$$U_1(t) = \int_0^{\infty} f_1(\omega)[u_1(\omega) - u_2(\omega)]\exp[i\omega(t+\tau_0)] + f_1(\omega)u_1(\omega)]d\omega$$

$$U_2^*(t) = \int_0^{\infty} f_2^*(\omega)[u_1(\omega) - u_2(\omega)]\exp[-i\omega(t+\tau_0)] + f_2^*(\omega)u_2(\omega)]d\omega$$

Скорость $u_l(\omega)$ на промежуточных частотах является действительной, причем спектр должен удовлетворять условию $U_1(t) = U_2^*(t)$ т.е. спектр одной волны произволен, а другой определяется. Но даже если скорость у данной волны действительная, так как частота положительна получается комплексно сопряженная скорость. Условие (3) накладывает ограничение на возможный спектр частот

$$\begin{gathered}
\operatorname{Im}\int_0^{\infty} f_1(\omega)[u_1(\omega) - u_2(\omega)]\exp(i\omega t)d\omega = \\
= \operatorname{Im}\int_0^{t} F(\tau)[U_1(t-\tau) - U_2(t-\tau)]d\tau = 0 \\
\int_0^{t} \operatorname{Re}F(\tau)\operatorname{Im}[U_1(t-\tau) - U_2(t-\tau)]d\tau = -\int_0^{t} \operatorname{Im}F(\tau)\operatorname{Re}[U_1(t-\tau) - U_2(t-\tau)]d\tau \\
F(t) = \int_0^{\infty} f_1(\omega)\exp(i\omega t)d\omega, U_l(t) = \int_0^{\infty} u_l(\omega)\exp(i\omega t)d\omega
\end{gathered} \tag{3}$$

Это накладывает условие на действительную и мнимую часть $F(t)$ $\frac{\operatorname{Im}F(\tau-\tau_0)}{\operatorname{Re}F(\tau-\tau_0)} = -\frac{\operatorname{Im}[U_1(\tau_0) - U_2(\tau_0)]}{\operatorname{Re}[U_1(\tau_0) - U_2(\tau_0)]}$, получается, что величина $F(t)$ должна быть комплексной при условии $\tau_0 \neq 0$. На каждом шаге добавляется нулевая скорость, с самого начала. Это запаздывание в случае ударных волн равно $\tau_0 = 1/\omega_{cr}$, поэтому спектр в случае сверхзвуковой скорости комплексный. В случае дозвукового течения запаздывания нет, так как система считается без учета сверхзвуковой части.

Покажем, что использование комплексного спектра в случае дозвукового течения приведет к действительному спектру. Свертка при учете запаздывания частоты запишется в виде

$$\operatorname{Im}\int_0^t F(\tau)[U_1(t-\tau)-U_2(t-\tau)]d\tau\exp(i\omega_{cr}t)=0$$

$$\operatorname{Re}[\exp(i\omega_{cr}t)F(t)]\operatorname{Im}[U_1(0)-U_2(0)]d\tau=0=-\operatorname{Im}[\exp(i\omega_{cr}t)F(t)]\operatorname{Re}[U_1(0)-U_2(0)].$$

$$\cos(\omega_{cr}t)\operatorname{Re}F(t)+\sin(\omega_{cr}t)\operatorname{Im}F(t)=0$$

Для дозвукового течения получен действительный отклик.

$$\operatorname{Im}\int_0^\infty f_1(\omega)[u_1(\omega)-u_2(\omega)]\exp(i\omega t)d\omega=$$

$$=\operatorname{Im}\int_0^t F(\tau)[U_1(t-\tau)-U_2(t-\tau)]d\tau\exp(i\omega_{cr}t)=$$

$$=\operatorname{Im}\int_0^t \frac{2\operatorname{Re}F(\tau)\operatorname{Im}F(\tau)}{\sqrt{[\operatorname{Re}F(\tau)]^2+[\operatorname{Im}F(\tau)]^2}}[U_1(t-\tau)-U_2(t-\tau)]\exp[i\omega_{cr}(t-\tau)]d\tau=0$$

$$F(t)=\frac{2\operatorname{Re}F(t)\operatorname{Im}F(t)}{\sqrt{[\operatorname{Re}F(t)]^2+[\operatorname{Im}F(t)]^2}}\exp(-i\omega_{cr}t)$$

Значит справедливо действительное значение зависящей от времени скорости, течение ламинарное, действительное. Постоянная составляющая может быть комплексной, что означает дисперсию, которая сводится к скорости вращения по эллипсу см. [3] стр.53 или колебанию источника, которое передается с помощью звуковой волны.

$$U_1(t)=\int_0^\infty f_1(\omega-\omega_{cr})[u_1(\omega)-u_2(\omega)]\exp(i\omega t)+f_1(\omega-\omega_{cr})u_1(\omega)]d\omega$$

Возможно существуют процессы, для которых $f_1(\omega)=f_2^*(\omega)$, тогда спектр этих процессов определяется разной массой охваченного вещества по две стороны ударной волны. Так как отклик $F(\tau-\tau_0)$ комплексный, этот процесс турбулентный, где мнимая часть определяет дисперсию процесса. Взрыв, удар и выстрел содержит вынуждающий процесс со сверхзвуковой скоростью, поэтому комплексный отклик $F(\tau-\tau_0)$ по разную сторону фронта разный. Колебание мембраны до звуковое и содержит заданный спектр частот, и значит отклик $F(\tau)$ действительный. Движение тела с постоянной сверхзвуковой скоростью не задает спектр, и его отклик

$F(\tau-\tau_0)$ комплексный и он определяется, как комплексно сопряженный в случае сверхзвуковых частот. Для дозвуковых частот отклик $F(\tau)$ движения тела определится как действительный. Причем движение тела с дозвуковой скоростью не возбуждает ударную волну и интегрировать надо по области $\omega > \omega_{cr}$ область $\omega < \omega_{cr}$ соответствует течению со скоростью больше критической скорости звука. Причем если дозвуковое течение определится по формулам (1) с действительным откликом $F(\tau)$, то сверхзвуковое определяется по формулам ударной волны с комплексным откликом $F(\tau-\tau_0)$ в случае политропного газа.

Выводы

Такое непрерывное описание звуковых и ударных волн позволяет при промежуточной частоте описать гидродинамическую систему. Вычислена граница между гидродинамическими системами типа ударных волн и типа звуковых волн. Кроме того, устраняется противоречии между ударной волной слабой интенсивности и звуковыми волнами. Они описываются разными коэффициентами в формуле $p' = \rho c V', p' = \dfrac{4}{\gamma+1}\rho c V'$. Предлагаемые формулы дают однозначный ответ на эти две разные формулы. Решение задачи об ударных волнах имеет три корня, один действительный, описывающий ударную и звуковую волну на низких и высоких частотах соответственно. Решение содержит комплексные корни, которые в случае высоких частот (звуковые волны) содержат мнимые скорости частиц, равные $u_k = \sqrt{2i} c_s = (1 \pm i) c_s$ скорости звука, умноженной на корень из двух, при неподвижном фронте, и действительный малый перепад давления при движущемся фронте со скоростью звука. Какой корень реализуется, действительный или мнимый неизвестно. В случае низких частот, описывающих ударные волны, имеется действительный корень, описывающий стандартную ударную волну и комплексный корень описывающий ударную волну с малой мнимой скоростью частиц при неподвижном фронте ударной волны. При низкой частоте ударной волны не понятно какой корень реализуется, действительный или комплексный. Если имеется тело с большой скоростью, то реализуется действительный корень. Если скорость тела мала и тело колеблется с низкой частотой, практически неподвижно, то реализуется комплексный корень с давлением разных знаков, одно положительное внешнее и другое отрицательное внутреннее. Этот тип ударных волн охватывает тело со всех сторон, тело имеет действительную нулевую скорость, и мнимое колебание границы.

Литература

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики том I, М.: Наука. 1974г., 480 стр.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Том VI, М.: Наука, 1989, 736 стр.
3. Якубовский Е.Г. Исследование решения уравнения Навье – Стокса II. «Энциклопедический фонд России», 2016, 61 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1509211918.pdf