Вычисление присоединенной массы

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

В гидродинамике вводится понятие присоединенная масса. Алгоритм ее вычисления в книге [1] не изложен. Зная, что процессы в жидкости подчиняются преобразованию Лоренца с фазовой скоростью звука, вместо скорости света, эту присоединенную массу можно вычислить в зависимости от скорости тела. Учтена форма и ориентация тела с помощью комплексного радиуса тела.

При ускоренном движении тела в жидкости, на него будет оказывать влияние сила, равная массе жидкости в объеме тела, умноженная на величину ускорения с обратным знаком. Это аналог выталкивающей силы для статического случая, которая не зависит от формы тела, а определяется ее объемом. Но как показал эксперимент и вычисления, приведенная масса для двигающегося тела зависит от формы тела. Для статической отрицательной силы Архимеда движение жидкости не учитывается, учет движения жидкости увеличивает эту отрицательную силу. Максимум этой силы равен нулю, а минимум не ограничен при движении со скоростью меньше фазовой скорости звука. Это значит, что добавка к массе тела положительная и не ограничена.

Для сферы приведенная масса равна $m = \rho V_0 / 2$, где V_0 объем сферы. Для произвольного тела масса комплексная и равна $m = \rho | V_0 | \exp(i \arg V_0) / 2$ (сведение произвольного тела к сфере см. [3]), где модуль этой величины определяет средний радиус тела, а фаза зависит от ориентации. Произвольное тело сводится к сфере одинакового радиуса, но фаза объема зависит от ориентации. Действительная масса определяется по формуле $m = \rho | V_0 | \sqrt{\cos^2(\arg V_0) + |\sin \arg V_0| \frac{R_{cr} \tan \delta + 1}{2}} / 2$ вычисление действительной вели по комплексной см. [4], где $\tan\delta$ среднеквадратичный тангенс угла наклона поверхности. Так как критическое число Рейнольдса определяется молекулярными шероховатостями имеем $R_{cr}\tan\delta \geq 1$ см. [4]. Граничные условия удовлетворяются так как при умножении комплексно сопряженных величина, фаза экспоненты сокращается в формуле (2). Формула определяется через средний радиус и без учета коэффициента Ламе равна $\pi R_0^2 = bl = S$. Приведенная масса равна $m = \frac{2}{3}\pi\rho R_0^3 = \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\rho S^{3/2} = \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\rho (bl)^{3/2}$.

Так формула для прямоугольной пластинки $m = \frac{\pi\rho b^2 l^2}{4\sqrt{b^2+l^2}}(1-0.425\frac{bl}{b^2+l^2})$. В случае квадрата формулы совпадают с точностью до коэффициента $0.437 \approx 0.376$. В случае круглого диска формула определяет приведенную массу с точностью $8 \approx 2\pi$ по формуле $m = \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\rho S^{3/2} = \frac{2\pi}{3}\rho a^3$. Значения присоединенной массы занижены, использование коэффициента $\sqrt{\cos^2(\arg V_0) + |\sin\arg V_0|\frac{R_{cr}\tan\delta + 1}{2}} > 1$ увеличивает значение присоединенной массы, причем она зависит от степени шероховатости. Для кругового цилиндра с отличной геометрии от сферы, имеем $m = \rho\pi a^2 L$, что соответствует статической выталкивающей силе Архимеда. Формула для среднего радиуса работает $m = \rho\int_0^L S(z)dz = \rho SL = \rho\pi a^2 L$ и соответствует массе объема тела.

Для объемного тела средний радиус определяется по формуле $\frac{4\pi}{3}R_0^3 = V_0$ Получаем формулу для приведенной массы $m = \rho V_0 / 2$. Для сферы получаем точное значение присоединенной массы.

Зависимость присоединенной массы от направления при потенциальном течении в основном определяется по формуле $\frac{a^2(\theta_1-\theta_0,\varphi_1-\varphi_0)a(\theta_{av}-\theta_0,\varphi_{av}-\varphi_0)}{\max\limits_{\theta,\varphi} a^3(\theta,\varphi)}$, где величина $r = a(\theta,\varphi)$ определяет уравнение границы тела при постоянном модуле (2). Используется теорема о среднем значении интеграла $\theta_{av} \approx \theta_1, \varphi_{av} \approx \varphi_1$.

Формула для кинетической энергии изменится $2T = -\rho \int\int \varphi^* \frac{\partial \varphi}{h_r \partial r} dS$, где h_r коэффициент Ламе, который вне переходной зоны равен единице см. [3].

Формула для потенциала гидродинамической задачи для идеальной жидкости для тела, имеющего уравнение границы $r = a(\theta, \varphi)$ имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{2} U \frac{a^2(\theta - \theta_0, \varphi - \varphi_0) a(\theta_1 - \theta_0, \varphi_1 - \varphi_0)}{r^2} \cos\theta. \qquad (1)$$

Распределение потенциала при удовлетворении граничным условиям под углами $\theta = \theta_1, \varphi = \varphi_1$ имеет такой вид. При удовлетворении граничным условиям во всех точках тела имеем потенциал $\varphi = \frac{1}{2} U \frac{a^2(\theta - \theta_0, \varphi - \varphi_0) a(\theta_1 - \theta_0, \varphi_1 - \varphi_0)}{r^2} \cos\theta$ и линии одинакового потенциала надо строить для этого потенциала. Формула справедлива для углов $\theta = \theta_1, \varphi = \varphi_1$, поэтому перепишем ее в виде $\varphi = \frac{1}{2} U \frac{a^{3/2}(\theta - \theta_0, \varphi - \varphi_0) a^{3/2}(\theta_1 - \theta_0, \varphi_1 - \varphi_0)}{r^2} \cos\theta$, используя все граничные условия. Линии тока надо строить, продифференцировав потенциал (1). Кинетическая энергия определяется при удовлетворении граничным условиям в направлении углов $\theta = \theta_1, \varphi = \varphi_1$ считается по формуле, откуда получаем зависимость приведенной массы от углов

$$\begin{gathered} 2T = -\rho \int\int \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = \frac{\rho U^2 a^2(\theta_1 - \theta_0, \varphi_1 - \varphi_0)}{2} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a(\theta - \theta_0, \varphi - \varphi_0) \cos^2\theta \sin\theta d\theta d\varphi \end{gathered}. \qquad (2)$$

Формулу можно приближенно записать в виде

$$\begin{gathered} 2T = -\rho \int\int \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = \frac{\rho U^2 a^3(\theta_1 - \theta_0, \varphi_1 - \varphi_0)}{2} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{2\pi\rho U^2 a^3(\theta_1 - \theta_0, \varphi_1 - \varphi_0)}{3} \end{gathered}.$$

Причем для плоской фигуры данная формула не приспособлена.

Для сферы эта величина равна $2T=\frac{2\pi}{3}\rho a^3U^2, m=\frac{2\pi}{3}\rho a^3$ в произвольном направлении. Для цилиндра эта формула выглядит таким образом $\varphi=U\frac{a(\varphi-\varphi_0,z-z_0)a(\varphi_1-\varphi_0,z_1-z_0)}{r}\exp(i\varphi)$, где используются проекции на оси x_1,x_2. Решение получено в плоскости, ортогональной оси z. Формула для кинетической энергии имеет вид

$$2T=-\rho\int\int\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial r}dS=\rho U^2a^2(\varphi_1-\varphi_0,z_1-z_0)\int_0^{2\pi}\int_0^L\exp(-i\varphi+i\varphi)dzd\varphi/2$$

Делим на 2, так как определяются две проекции, на оси x_1,x_2. Для кругового цилиндра приведенная масса равна $2T=\pi\rho a^2LU^2, m=\pi\rho a^2L$ и одинакова в разных направлениях, при удовлетворении граничным условиям в любой точке. Вычисленное значение коэффициента пропорциональности для приведенной массы зависит от направления.

Справедлива закономерность между критическим числом Рейнольдса и максимальным значением присоединенной массы, как для сферы, так и для произвольного тела

$$m=\frac{m_l}{\sqrt{1-\frac{\mu^2R_{cr}^2}{(\rho ac_F)^2}}}=\frac{m_l}{\sqrt{1-\frac{V_{cr}^2}{c_F^2}}}.$$

Где величина c_F это фазовая скорость жидкости, величина a, это характерный размер тела, который определяется по объему тела $4\pi a^3/3=V$. величина μ динамическая вязкость жидкости, ρ плотность жидкости, R_{cr} - критическое число Рейнольдса. Если выполняется условие $V_{cr}>c_F$, то преодолеть непрерывным образом звуковой барьер не удастся, присоединенная масса будет стремиться к бесконечности и действительная скорость перестанет расти, а значит не будет образовываться и мнимая часть. Существуют тела, для которых нельзя преодолеть звуковой барьер, а для некоторых тел это возможно. Критерием является отношение $V_{cr}>c_F$

или $\frac{\mu^2 R_{cr}^2}{(\rho a c_F)^2} > 1$. При выполнении этих условий звуковой барьер не преодолим.

Это связано с определением критического числа Рейнольдса. Оно определяется средним тангенсом наклона шероховатости $\frac{1}{R_{cr}} = \frac{da}{ds} = \frac{dl_{eff}}{ds} \cdot \frac{a}{l_{eff}} = \frac{1}{2300} \cdot \frac{a}{l_{eff}}$, где величина l_{eff} эффективный, гидродинамический размер тела, включая среду, a истинный геометрический размер тела, причем $\frac{dl_{eff}}{ds} = |\tan\varphi| = \frac{1}{2300}$ молекулярный тангенс наклона шероховатости. Причем отношение $\frac{a}{l_{eff}}$ может иметь значение $\frac{a}{l_{eff}} = 0.01$. Если за телом тянется длинный шлейф застойной зоны размером l_{eff}, то преодоление звукового барьера невозможно, так как критическое число Рейнольдса велико.

Дальнейшее изменение присоединенной массы происходит за счет роста мнимой части скорости по формуле

$$m = \frac{m_l}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2 (R_{cr} + i \operatorname{Im} R)^2}{(\rho a c_F)^2}}}.$$

Формула $R = R_{cr} + i \operatorname{Im} R$, определяет турбулентное течение как комплексное, начиная с критического числа Рейнольдса. Критическое число Рейнольдса определяет максимальную действительную часть скорости потока. Мнимая часть скорости означает среднеквадратичное отклонение скорости. Причем мнимая часть скорости дает вклад в поступательную часть скорости см. [4] стр. 8-13. Этот коэффициент присоединенной массы надо умножить на угловую зависимость коэффициента в зависимости от размера тела. Причем использование комплексной скорости приведет к преодолению звукового барьера, так как комплексный знаменатель в ноль не обращается, а скорость растет за счет роста мнимой части. Значение знаменателя растет с ростом мнимой части, так как квадрат мнимой растущей части положителен.

Поэтому уравнение движения тела в жидкости имеет вид

$$M\frac{du_k}{dt}+\frac{dP_k}{dt}=f_k.$$

Где первый член описывает движение тела, а второй член импульс жидкости. Импульс жидкости считается по формуле $P_k=\frac{mu_k}{\sqrt{1-u^2/c_F^2}}$, где используется масса жидкости в объеме тела, скорость жидкости равна скорости тела и вместо скорости света в вакууме в релятивистском знаменателе стоит фазовая скорость звука. Данная формула определяет приведенную массу вне зависимости от формы тела. для цилиндрического тела она справедлива, для сферы приведенная масса вдвое больше.

Но почему релятивистский знаменатель надо применять к жидкости и нельзя применять к движущемуся телу. В вакууме для движущегося тела необходимо использовать релятивистский знаменатель со скоростью света в вакууме. Движущееся тело состоит из частиц вакуума, которые группируясь подчиняются преобразованию Лоренца, но релятивистский знаменатель появился из-за того, что тело помещено в среду, состоящую из частиц вакуума, причем масса тела определяется массой частиц вакуума. Для жидкой среды, состоящей из элементарных частиц, справедливо преобразование Лоренца с фазовой скоростью звука. Твердое тело состоит из элементарных частиц, двигающихся в среднем со звуковой скоростью, плюс колеблющиеся частицы, причем в твердом теле несколько значений скорости звука. Осуществляя линейное преобразование пространства анизотропного тела, удается построить изотропное пространство и преобразование Лоренца см. [2] стр. 59, но это свойства описания внутренней части тела. В несжимаемой жидкости, состоящей из элементарных частиц, звуковые волны описываются волновым уравнением, причем можно ввести уравнение Максвелла для жидкости см. [2] стр. 34-37 и, следовательно, для них справедливо преобразование Лоренца. Но справедливо ли преобразование Лоренца с фазовой скоростью звука в жидкости для тела, находящегося в жидкости, т.е. имеется ли у макротел релятивистский знаменатель со скоростью звука? Нет не имеется. Количество частиц вакуума в единице частиц вакуума, одном кванте, не равно числу Авогадро и не является константой, поэтому зависимость импульса от скорости является нелинейной в уравнении 2 закона Ньютона и является функцией от средней скорости частиц вакуума, или скорости элементарной частицы. Количество элементарных частиц в одном моле равно числу Авогадро, значит нелинейный множитель равен постоянной константе - массе частицы, и импульс линейно зависит от скорости, т.е. у макротел релятивистского знаменателя с фазовой скоростью звука нет. Так как макротела состоят из частиц вакуума релятивистский знаменатель с фазовой скоростью света во 2 втором законе Ньютона есть. Скорость макротел не складывается по релятивистской формуле с фазовой скоростью звука вместо скорости света, а справедлив закон сложения скоростей с фазовой скоростью света. Для среды справедливо преобразование Лоренца с фазовой скоростью звука проявляющееся в присоединенной массе.

Подставляя значение импульса жидкости в объеме тела, получим

$$M\frac{du_k}{dt}+\frac{d}{dt}\frac{mu_k}{\sqrt{1-u^2/c_F^2}}=f_k$$

$$M\frac{du_k}{dt}+\left(\frac{m\delta_{kn}}{\sqrt{1-u^2/c_F^2}}+\frac{mu_k u_n/c_F^2}{(1-u^2/c_F^2)^{3/2}}\right)\frac{du_n}{dt}=f_k.$$

Формула для релятивистского знаменателя в случае анизотропного тела сложна см. [2] стр. 59 и ее не выписываем. Присоединенная масса в изотропной жидкости равна $m_{kn}=\frac{m\delta_{kn}}{\sqrt{1-u^2/c_F^2}}+\frac{mu_k u_n/c_F^2}{(1-u^2/c_F^2)^{3/2}}$, где присоединенная масса m считается из формулы (2). Уравнение движения тела в жидкости имеет вид

$$(M\delta_{kn} + m_{kn})\frac{du_n}{dt} = f_k .$$

В книге [1] выведена формула, определяющая скорость движения в идеальной жидкости

$$\frac{dMu_k}{dt} = \rho V_0 \frac{dv_k}{dt} - m_{kn}\frac{d}{dt}(u_n - v_n) .$$

Где u_k скорость тела в потоке жидкости, v_k скорость жидкости в объеме тела, если бы тела не было. Интегрируя это выражение, получим скорость тела в потоке, если бы тело не нарушало поток жидкости

$$(M\delta_{kn} + m_{kn})u_n = (m_{kn} + \rho V_0 \delta_{kn})v_n .$$

При плотности тела, равной плотности жидкости $M = \rho V_0$ тело движется со скоростью жидкости. При этом тело не возмущает жидкость и тело не создает тягу. Если бы тело возмущало жидкость, со стороны жидкости действовали бы дополнительные силы.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: «Наука», 1983г., 735 стр.
2. Якубовский Е.Г. По поводу преобразований Лоренца. «Энциклопедический фонд России», 2017, 94 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1504051609.pdf
3. Якубовский Е.Г. Преобразование произвольного тела в сферу комплексного радиуса. «Энциклопедический фонд России», 2017, 18 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1492726821.pdf
4. Якубовский Е.Г. Исследование решения уравнения Навье – Стокса II «Энциклопедический фонд России», 2017, 61 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1509211918.pdf