Получение уравнения Дирака в спинтензорном представлении

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

На основании спинтензорного представления уравнения Клейна-Гордона получено уравнение Дирака. В уравнение Дирака подставлен спинтензор электромагнитного поля. В спинтензорах уравнения имеют простой вид и их можно решить. Для одинаковых, не взаимодействующих между собой частиц во внешнем поле получены комплексные значения энергии и импульса. Одинаковым образом описываются как бозоны, так и фермионы с другими квантовыми числами. Как бозоны, так и фермионы не могут иметь одинаковые комплексные координаты, поэтому квантовые числа у них разные. Комплексные собственные значения координаты и импульса имеют дисперсию, равную квадрату мнимой части, поэтому могут одновременно быть измерены. Для взаимодействующих частиц получено разное значение энергии, для каждой частицы свое, а импульс у них одинаковый, т.е. они образуют не меняющееся относительное распределение координат. Определены моменты времени, когда энергия меняет свое значение и меняется квантовое число, сохраняя его до следующего изменения. Причем взаимодействующие частицы расположены на равных безразмерных расстояниях. В размерном виде получается разное расстояние с учетом массы частицы. В данной статье описано течение жидкости, которое можно использовать при расчете ядерных реакторов.

Получим связь между импульсом и волновой функцией в спинтензорном представлении. Эта связь имеет вид

$$p_l \psi = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial y_l}; l = 0,...,3 \quad (1)$$

Введем оператор дифференцирования с помощью спинтензора

$$\frac{d}{dX} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial y^0} + \frac{\partial}{\partial y^3} & \frac{\partial}{\partial y^1} + i\frac{\partial}{\partial y^2} \\ \frac{\partial}{\partial y^1} - i\frac{\partial}{\partial y^2} & \frac{\partial}{\partial y^0} - \frac{\partial}{\partial y^3} \end{Vmatrix} / 2 = L_a \frac{\partial}{\partial y^a}.$$

Этот оператор - спинтензор получен путем скалярного произведения матриц Паули на оператор градиента в четырехмерном пространстве. В общем случае надо использовать произведение генераторов группы на частную производную. Этот оператор является обратным по отношению к оператору спинтензорного дифференциала

$$dX = \begin{Vmatrix} dy^0 + dy^3 & dy^1 + idy^2 \\ dy^1 - idy^2 & dy^0 - dy^3 \end{Vmatrix} / 2 = L_a dx_a$$

$$X = \begin{Vmatrix} y^0 + y^3 & y^1 + iy^2 \\ y^1 - iy^2 & y^0 - y^3 \end{Vmatrix} / 2; \frac{d}{dX} dX = L_a L_b \frac{\partial x_b}{\partial x^a} = g_{aa} = E; \frac{d}{dX} = dX^{-1}.$$

Где матрица X называется координатным спинтензором. Этот спинтензор получен путем скалярного произведения матриц Паули на координаты в четырехмерном пространстве. Существует также спинтензор, образуемый четырьмя волновыми функциями, четырехмерным импульсом и четырехмерным потенциалом. Удалость построить решение, зависящее от этих спинтензоров.

Тогда представление (1) можно записать в виде

$$P\psi = -i\hbar \frac{d\psi}{dX}; P = \begin{Vmatrix} p^0 + p^3 & p^1 + ip^2 \\ p^1 - ip^2 & p^0 - p^3 \end{Vmatrix} / mc = L_a p_a.$$

Вводя вместо волновой функции спинтензор волновой функции, получим

$$P\Psi = -i\hbar \frac{d\Psi}{dX}; \Psi = \begin{Vmatrix} \psi^0 + \psi^3 & \psi^1 + i\psi^2 \\ \psi^1 - i\psi^2 & \psi^0 - \psi^3 \end{Vmatrix} = L_a \psi_a.$$

Откуда имеем значение спинтензора импульса

$$P = -i\hbar \frac{d\Psi}{dX} \Psi^{-1} = -i\hbar \frac{d \ln \Psi}{dX}.$$

Получим релятивистское уравнение с использование спинтензоров из уравнения Клейна-Гордона, записанного в безразмерном виде. Уравнение Клейна-Гордона описывает частицы, с целым спином. Обобщим его для описания спинтензоров с произвольным спином

$$-L_a^{-1}L_a\frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial y^a \partial y^a} = -\frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial\overline{X}\ \partial X} = \mathrm{M} =$$

$$= \overline{\Psi}(\overline{X})\Psi(X) = -\frac{\partial^2\overline{\Psi}(\overline{X})\Psi(X)}{\partial\overline{X}\partial X} = i^2\frac{\partial\overline{\Psi}(\overline{X}^*)}{\partial\overline{X}}\frac{\partial\Psi(X)}{\partial X},$$

$$\overline{\Psi}(\overline{X}) = i\frac{\partial\overline{\Psi}(\overline{X})}{\partial\overline{X}};\Psi(X) = i\frac{\partial\Psi(X)}{\partial X}$$

$$E = i\frac{\partial\ln\overline{\Psi}(\overline{X})}{\partial\overline{X}} + \overline{U};E = i\frac{\partial\ln\Psi(X)}{\partial X} + U$$

$$\frac{\partial}{\partial\overline{X}} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial y^0} - \frac{\partial}{\partial y^3} & -(\frac{\partial}{\partial y^1} + i\frac{\partial}{\partial y^2}) \\ -(\frac{\partial}{\partial y^1} - i\frac{\partial}{\partial y^2}) & \frac{\partial}{\partial y^0} + \frac{\partial}{\partial y^3} \end{Vmatrix} / 2 = L_a^{-1}\frac{\partial}{\partial y^a}$$

$$U = \frac{U}{mc^2} = \begin{Vmatrix} U_0 + U_3 & U_1 + iU_2 \\ U_1 - iU_2 & U_0 - U_3 \end{Vmatrix}, y^l = x^l\frac{\hbar}{2mc}$$

Получим эти уравнения из уравнения Клейна-Гордона с электромагнитным потенциалом. При выводе этого уравнения воспользовались перестановочности постоянной матрицы генераторов со скаляром

$$-[L_a^{-1}(\frac{\partial}{\partial y^a} + \overline{U}_a^*)L_a(\frac{\partial}{\partial y^a} + U_a)]\overline{\Psi}\Psi =$$

$$= \overline{\Psi}\Psi = [\overline{\Psi},\Psi] = -(\frac{\partial}{\partial\overline{X}} + \overline{U})(\frac{\partial}{\partial X} + U)[\overline{\Psi},\Psi] = -[(\frac{\partial}{\partial\overline{X}} + \overline{U})\overline{\Psi},(\frac{\partial}{\partial X} + U)\Psi] \quad /$$

Из скалярного произведения с симметричными членами получаем аналог уравнения Дирака.

Это уравнение имеет решение

$$\ln\Psi(X) = -iX + i\int_0^X U(X)dX$$

$$\Psi(X) = \exp[-iX + i\int_0^X U(X)dX]; X_n - \int_0^{X_n} U(X)dX = 2\pi n, \Psi_n(2\pi n) = E$$

Спинтензоры между собой не коммутируют, поэтому необходимо соблюдать порядок произведения, при вычислении экспоненты, особенно при вычислении среднего значения. Получается аналог уравнения Дирака. Потенциалы зависят от координатных спинтензоров. Имеется конечное количество точек массы m, имеющих счетное количество определенных комплексных координат. Собственные значения координат частиц комплексные см. [1], что означает их вращение по эллипсоиду с осями, равными мнимой части координаты см. [2] стр. 53. Это справедливо для классического описания, квантовое описание определяет рассогласование по фазе колебаний по трем осям, и описывает не эллипсоид, а более сложное хаотическое поведение элементарных частиц. Вдоль каждой оси происходит колебание со своей скоростью, причем фаза этих колебаний не когерентна. Амплитуда колебаний равна мнимой части координаты. В остальных точках с не собственным значением координаты спинтензор Ψ имеет переменное значение. Этот непрерывный спинтензор описывает волновую функцию вращающихся частиц. Так как частицы не взаимодействуют между собой, они неразличимы. Их энергия не зависит от спина, энергия и импульс этих не взаимодействующих неразличимых частиц одинаковы. При этом спинтензор собственной энергии и импульса вращающихся частиц переменный, со средним значением, равным значению средней энергии и импульсу частиц. Спинтензор средней энергии и импульса каждой частицы считаются по формуле

$$\mathrm{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(X)[E - U(X)]\Psi(X)dX \ .$$

Причем средние значения энергии и импульса комплексные, где мнимая часть импульса определяет одинаковую скорость вращения частиц.

В случае отсутствия электромагнитного поля имеем значение энергии-импульса

$$\mathrm{E} = \begin{Vmatrix} p^0 + p^3 & p^1 + ip^2 \\ p^1 - ip^2 & p^0 - p^3 \end{Vmatrix} / mc = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

$$p^0 = mc$$

Т.е. частицы расположены в точках с собственным значением $y_n = 2\pi n\hbar / mc$ и не вращаются и не двигаются, так как координата действительная постоянная.

В случае учета влияния частиц друг на друга, имеется N волновых функций, каждая со своим потенциалом и имеется система из N уравнений. Где величина n означает номер частицы, а величина k ее положение в пространстве. Величина k определяет ветвь решения и одинакова для всех частиц. Волновая функция у каждой частицы разная

$$\ln \Psi_n(X) = -i(X - 2\pi n) + i\sum_{m=1}^{N} \int_{2\pi n}^{X} U(X - X_{mk}) dX$$

$$\Psi_n(X) = \exp[-i(X - 2\pi n) + i\sum_{m=1}^{N} \int_{2\pi n}^{X} U(X - X_{mk}) dX]; \qquad (2)$$

$$X_{nk} - 2\pi n - \sum_{m=1}^{N} \int_{2\pi n}^{X_{nk}} U(X - X_{mk}) dX = 2\pi k, \Psi_n(X_{nk}) = E$$

Все частицы соответствующие одной ветви собственной координаты (общее значение k) двигаются с одинаковой поступательной скоростью, определяемой действительной частью импульса. Имеется счетное количество координат, которые эти частицы могут занять хаотическим образом, каждую координату в свой момент времени, и далее частица существует с этими параметрами. При новом моменте времени меняется не предсказуемым образом расположение частиц, до следующего момента времени. Каждая частица занимает свою координату.

Решение с потенциальным электромагнитным полем описывает распределение элементарных частиц одинаковой массы во внешнем электромагнитном поле. В случае не внешнего, а взаимного электромагнитного поля интеграл частиц с постоянными комплексными координатами определяется по формуле

$$\frac{d}{dX}\int_{2\pi n}^{X_{nk}}\sum_{m=1}^{N}U(X-X_{mk})dX=\sum_{m=1}^{N}U(X_{nk}-X_{mk}).$$

так как комплексные скорости частиц одинаковы, аргументы сводятся к разности квантовых чисел. В случае периодичного распределения частиц по пространству получается периодичная электромагнитная энергия $x_{nk}=x_{0k}+2\pi n$. Формула для периодической по пространственным координатам функции имеет вид (по временной координате функция не периодическая)

$$U(x_0,...,x_3)=\sum_{n,m,k=-\infty}^{\infty}\exp(i\psi_{nmk})\begin{Vmatrix}A_{nmk0}\exp(ilx_0)+A_{nmk3} & A_{nmk1}+iA_{nmk2}\\ A_{nmk1}-iA_{nmk2} & A_{nmk0}\exp(ilx_0)-A_{nmk3}\end{Vmatrix},$$
$$\psi_{nmk}=nx_2+mx_2+kx_3,l^2=n^2+m^2+k^2\eta$$

импульс является константой и зависит от двух индексов.

$$\mathrm{E}_{nk}=i\frac{\partial\ln\Psi(X)}{\partial X}=E-\sum_{m=1}^{N}U(X_{nk}-X_{mk}).$$

Энергия у разных частиц разная так как временная зависимость функции потенциала электромагнитного поля не периодическая, а пространственный импульс одинаков, так как пространственные координаты периодичные. Частица меняет свои координаты с изменением квантового числа k в определяемый момент времени.

В случае электромагнитного поля его потенциал считается по формуле Лиенара-Вихерта и равен $U(X_{nk}-X_{mk})=\dfrac{e\mathrm{E}_{nk}}{(X_{nk}-X_{mk},\overline{\mathrm{E}}_{nk})}$ и величина энергии импульса считается из нелинейного уравнения, причем импульс у всех частиц одинаков, а энергия разная. Скалярное произведение двух спинтензоров определяется по формуле перемножения элементов с одинаковым индексом в одной строке или в одном столбце

$$(X,\bar{Y}) = (\begin{Vmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} y_0 - y_3 & -(y_1 - iy_2) \\ -(y_1 + iy_2) & y_0 + y_3 \end{Vmatrix})$$

$$= \begin{Vmatrix} x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 & 0 \\ 0 & x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 \end{Vmatrix} = (x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3) E$$

$$(X,\bar{Y}) = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$$

$$(X,\bar{Y}) = \sum_{a=1}^{3} L_a x_a L_a^{-1} y_a = (x_0 y_0 - \sum_{a=1}^{3} x_a y_a) E$$

В силу постоянства комплексных координат запаздывание учитывать не надо.

Оценим величину энергии частицы. Она состоит из взаимодействия частиц одинакового и разного знака и для четырех частиц разного знака (пара взаимодействий одинакового и разного знака) для большого главного квантового числа равна

$$\mathrm{E}_0 - mc^2 = -\sum_{m=1,3} (\frac{\alpha}{n-m} - \frac{\alpha}{n-m+1}) = -\sum_{m=1,3} \frac{\alpha}{(n-m)(n-m+1)} = -\frac{2\alpha}{n^2}.$$

В случае двух частиц разного знака, близко расположенных они образуют поле диполя во всем пространстве и значит энергия равна $\mathrm{E}_0 - mc^2 \sim -\frac{\alpha}{(n-m)^2}$.

Когда диполь взаимодействует с другой частицей плечо диполя параллельно направлению на частицу. При усреднении такого взаимодействия появляется постоянный множитель $<\cos^2\varphi>=1/2$. Так как диполь состоит из частиц разного знака, его энергия отрицательная.

Причем для каждой частицы безразмерные параметры используют свою массу, при переходе к размерным параметрам это надо учитывать. Размерные параметры для разного сорта частиц определяются по формуле

$$y_{nl} = x_{kl0} + 2\pi n \frac{m_k}{\sum_{k=1}^{N} m_k} \lambda, x_{kl0} = 2\pi \frac{\sum_{k=1}^{l} m_k}{\sum_{k=1}^{N} m_k} \lambda, \lambda = \frac{\hbar}{c\sum_{k=1}^{N} m_k}.$$

Решение задачи определяет комплексное значение импульса и координаты. Для действительных координат это невозможно. Но комплексные координаты определены с точностью до среднеквадратичного отклонения, равного мнимой части, следовательно, могут удовлетворять соотношению неопределенности.

Решение задачи не зависит от спина частицы, а зависит от других квантовых чисел, в которые спин не входит. Для получения зависимости от спина надо использовать уравнение второго порядка, содержащее антисимметричную часть произведения матриц Дирака. Что и сделано в статье [3]. Данное уравнение описывает не только целые или полуцелые спины, а описывает произвольное значение спина. Каждая частица имеет свое собственное значение координаты. Если значения координаты двух частиц совпадают. То этот член образует сингулярность значения потенциала Лиенара-Вихерта в энергии и импульсе частицы и его надо исключить. Частицы с одинаковыми координатами тождественны.

Что произойдет если учитывать внешнее электромагнитное поле и собственное поле элементарных частиц. Тогда переменное значение энергии импульса состоит из переменной скорости частиц вакуума $-U(X)$ и движение с постоянной комплексной скоростью элементарных частиц $-\sum_{m=1}^{N} U(X_{nk} - X_{mk})$

$$P(X) = i\frac{\partial \ln \Psi(X)}{\partial X} = E - U(X) - \sum_{m=1}^{N} U(X_{nk} - X_{mk}) .$$

Причем при усреднении частиц вакуума, имеющих одинаковую массу, возникнет постоянное значение энергии элементарных частиц и постоянная скорость элементарных частиц.

$$< P(X) >= E - U(X_{nk}) - \sum_{m=1}^{N} U(X_{nk} - X_{mk})$$

Можно решить задачу рассеяния. Для этого нужно определить по квантовым числам частиц вступивших в реакцию их энергию и импульс согласно (1), (2), определив координаты каждой частицы X^0_{nk}. Тогда рассеянные частицы будет описывать уравнение (3)

$$\ln \Psi_n(X) = -i(X - X^0_{nk}) + i\sum_{m=1}^{N} \int_{X^0_{nk}}^{X} \mathrm{A}(X - X_{mk})dX$$

$$\Psi_n(X) = \exp[-i(X - X^0_{nk}) + i\sum_{m=1}^{N} \int_{X^0_{nk}}^{X} \mathrm{A}(X - X_{mk})dX]; \qquad (3)$$

$$X_{nk} - X^0_{nk} - \sum_{m=1}^{N} \int_{X^0_{nk}}^{X_{nk}} \mathrm{A}(X - X_{mk})dX = 2\pi k, \Psi_n(X_{nk}) = E$$

Решаем третье уравнение (3), определяя координаты рассеянных частиц в штрихованной системе координат. Определяем энергию импульс по координатам. Эти координаты определят волну с известной скоростью, по вычисленным собственным значениям импульса. При этом безразмерная энергия-импульс тела и электромагнитного поля будет сохраняться, согласно уравнению (2). Если квантовые числа системы останутся не измененными, то получим упругое рассеяние, если они изменятся, то неупругое.

При переходе к классическому описанию потоков заряженных частиц, получим движение с постоянной скоростью как единое целое распределения частиц, моделирующее твердое тело. Плюс движение с переменной скоростью непрерывной среды, определяемое внешним полем, которое в классике соответствует звуковому четырехмерному потенциалу.

Соотношение $y^l = x^l \frac{\hbar}{2mc}$ надо заменить $y^l = ix^l \frac{v}{c}$, так как кинематическая вязкость вакуума равна $v = -i\frac{\hbar}{2m}$ см. [2]. Кроме того, скорость света в вакууме надо заменить на скорость звуковых волн. По поводу преобразований Лоренца для звуковых волн см. [5] глава 4. Изменится значение координат, действительная часть станет мнимой и наоборот $(ix^k mc)/mv = -x^k mc/\hbar$. Но это преобразование необходимо произвести. Но так как действие происходит в комплексном пространстве это не изменит рассуждения. Просто период станет мнимым, а не действительным и координаты будут мнимые. Уравнения будут выглядеть таким образом

$$\ln \Psi_n(X) = X + 2\pi mi - \sum_{m=1}^{N} \int_{2\pi mi}^{X} U(X - X_{mk}) dX$$

$$\Psi_n(X) = \exp[X + 2\pi mi - \sum_{m=1}^{N} \int_{2\pi mi}^{X} U(X - X_{mk}) dX]; \qquad (3)$$

$$X_{nk} + 2\pi mi - \sum_{m=1}^{N} \int_{2\pi mi}^{X_{nk}} U(X - X_{mk}) dX = 2\pi ki, \Psi_n(X_{nk}) = E$$

В частности, получается решение, где среда является абсолютно твердым телом, справедливое для всего пространства.

$$\mathbf{p}^0 = 1, \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + [\mathbf{w}, \mathbf{r}]/c, \mathbf{w} = e\mathbf{H}/2mc^2, \mathbf{H} = const\,.$$

Решение для безразмерной величины энергии импульса среды может иметь вид

$$\mathbf{p}^0 = 1 - \sum_{n=1}^{P} \frac{q_n}{(x_k - b_{nk}, V^k / c)}, \mathbf{p} = -\sum_{n=1}^{P} \frac{q_n \mathbf{V}}{(x_k - b_{nk}, V^k / c)c}\,.$$

Где величина b_{nk} безразмерная координата внешнего источника поля с безразмерным зарядом q_n, величина $\mathbf{V}$ это скорость среды, которая определяется из нелинейного уравнения по известной координате. Определяется по заданному значению заряда поля и его положения скорость среды, которая входит в правую и левую часть уравнения.

В случае отсутствия внешних источников поля, надо использовать собственное поле, задавая комплексный размер тела для отсутствия сингулярности. Комплексный размер тела определен в [4]. При нулевой скорости тела относительно среды, скорость среды равна нулю, она не возмущается $P = P_0 = mc$ и значит скорость среды нулевая $\mathbf{V} = 0$ Если тело имеет скорость относительно неподвижной на бесконечности среды

$$\mathbf{p}_U = \{\exp[\exp(-(x_1 - \mathrm{Re}\, b_1 - U_1 t)^2)] - 1\}\{\exp[\exp(-(x_2 - \mathrm{Re}\, b_2 - U_2 t)^2)] - 1\} \times$$
$$\times \{\exp[\exp(-(x_3 - \mathrm{Re}\, b_3 - U_3 t)^2)] - 1\} / [\exp(1) - 1]^3 (M + \frac{m/c}{\sqrt{1 - U^2/c^2}})\mathbf{U}$$
, причем так как процесс происходит в среде надо ввести присоединенную массу, для которой справедливо преобразование Лоренца со скоростью звука, вместо скорости света в вакууме. В этих уравнениях действительная и мнимая часть координаты и времени поменяли свое значение, координаты x_l действительны, но описывают мнимую часть пространства. В этих решениях свойства мнимой части перешли к действительному решению, описывать дисперсию, а среднее описывается мнимой частью. Действительное и мнимое пространство и время поменялись местами $y_l = i x_l \frac{v}{c}, t = i\tau \frac{v}{c^2}$. Четырехмерные скорости как отношение двух размеров не изменили действительную часть на мнимую.

На самом деле наше декартово пространство действительное и описывается действительной скоростью, как отношением двух действительных величин, и только в редких случаях имеет мнимую часть, характеризующую дисперсию процесса, например, в случае турбулентности. Это пространство микромира является мнимым, так как описывает вероятность событий, т.е. дисперсию. Причем скорость в атоме водорода мнимая и равна $V_l = -i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l}, \psi = R_{nl}(r)P_l(\cos\theta)$. Скорость — это отношение двух параметров и характеризует пространство. Так что уравнение в микромире надо писать в виде (3), рассматривая координату как мнимую, а в действительном пространстве в виде (2). Изменится и уравнение Дирака в микромире, координата и время будет мнимые и тогда исчезнет мнимая единица в аналоге уравнения Дирака. Но зато координаты и время будут мнимые. Безразмерные параметры надо писать в виде $y_l = x_l \frac{v}{c}, t = \tau \frac{v}{c^2}$, а в микромире появляется мнимость.

Имеем из нелинейного уравнения $\mathbf{p}_U = -\frac{q_n \mathbf{V}}{(x_k - b_k, V^k / c)c}$ можно определить скорость среды $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x_1, ..., x_3)$. Тело на бесконечности радиуса имеет нулевую скорость. При этом заряд определится из условия на поверхности тела, скорость среды на поверхности тела равна скорости тела $M + \frac{m}{\sqrt{1 - U^2 / c^2}} = -\frac{q}{(-\operatorname{Im} b_k, U^k / c)c}$. Откуда определится переменный заряд в зависимости от углов сферической системы координат при равенстве скорости среды и тела.

При расчете ядерных реакторов умеют рассчитывать с помощью квантовой механики сечение рассеяния элементарных частиц. Но проникновенные воды в реактор рассчитывать не умеют. В данной статье описано решение гидродинамической задачи с определением скорости взаимодействия и энергии взаимодействия. Для этого необходимо потенциал заменить изменением давления, заменить кинематическую вязкость вакуума $-i\hbar/(2m)$ на кинематическую вязкость жидкости и считая давление внешним воздействием определить скорость течения жидкости. Можно воспользоваться гидродинамическим решением, определяя скорость жидкости.

Литература

1. Якубовский Е.Г. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА В КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ “Международный журнал экспериментального образования”. – 2016. – № 9 (часть 2) – С. 255-268 http://expeducation.ru/pdf/2016/9-2/10491.pdf

2. Якубовский Е.Г. Исследование решения уравнения Навье – Стокса II. «Энциклопедический фонд России», 2016, 61 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1509211918.pdf
3. Якубовский Е.Г. Решение уравнения Клейна-Гордона в спинтензорном представлении для широкого класса потенциалов. «Энциклопедический фонд России», 2017, 11 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1479397178.pdf
4. Якубовский Е.Г. Преобразование произвольного тела в сферу комплексного радиуса. «Энциклопедический фонд России», 2017, 18 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1492726821.pdf
5. Якубовский Е.Г. По поводу преобразований Лоренца. «Энциклопедический фонд России», 2017, 94 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1504051609.pdf