Формула учета шероховатости в задачах гидродинамики

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Коэффициент отражения звуковой волны от шероховатой поверхности, вычисленный в [1] можно применить для расчета потока в трубопроводе. Для этого надо вычислить коэффициент отражения слоя шероховатости. Отражение можно заменить эффективным отражением от внешней границы и от внутренней. Нужно учесть проходящую через шероховатость звуковую волну. Но шероховатость — это тонкий слой с распределенным коэффициентом отражения и учитывать запаздывание звуковой волны, прошедшей через шероховатость не надо.

Уравнение Навье-Стокса для продольной волны в трубопроводе с круглым сечением сводится к уравнению (1) см. [2]

$$\frac{dR_0}{d\tau} = R_0^2 - 2R_0 R_{cr} + \frac{T}{8}; T = \frac{(P_2 - P_1)d^3 R_{cr}}{\rho v^2 L} \qquad .(1)$$

$$\tau = 24t \cdot v/(R_{cr} d^2), R_0 = V_0 d/v, 1/R_{cr} = <|da/dz|>/12 = k/l = <|\tan\varphi|>$$

Если же использовать другую ветвь квадратного корня из дисперсии, то получим не устойчивое решение и уравнение

$$\frac{dR_0}{d\tau} = -R_0^2 - 2R_0 R_{cr} + \frac{T}{8}.$$

Тогда стационарное решение при большом перепаде давления имеет вид

$$R_0 = -R_{cr} + \sqrt{R_{cr}^2 + T/8}.$$

Ламинарное решение этих двух уравнений общее. В турбулентном режиме при больших давлениях имеет линейную зависимость числа Рейнольдса от корня из давления. По мере увеличения давления растет и значение числа Рейнольдса, что увеличивает давление. Т.е. решение не устойчиво. В случае комплексного решения оно равно

$$R_0 = R_{cr} - i\sqrt{T/8 - R_{cr}^2}\ .$$

При этом с ростом давления растет мнимая часть скорости, что не приводит к росту действительного давления.

Если микро-шероховатости $<|\tan\varphi|>$ распределены по всей поверхности трубопровода, они находятся и на макро-шероховатостях и определяют критическое число Рейнольдса и коэффициент сопротивления при числе Рейнольдса, равном 2300. Микро-шероховатости имеют молекулярную природу и определяются средним размером атома, равным среднему геометрическому между размером ядра r_A, и размером орбиты Бора $\sigma = \sqrt{r_A a_0}$ при расстоянии между атомами $a = 3.043A$, равному некоторой величине, определяемой свойствами границы трубопровода, железом, титаном и углеродом. Расстояние между атомами железа $a_{Fe} = 2.87A$, между атомами титана $a_{Ti} = 3.46A$, между атомами углерода $a_C = 3.567A$ см. [7]. При этом абсолютная величина тангенса наклона высоты микро-шероховатости поверхности металла в трубопроводе определяется по формуле $h(z) = <|\tan\varphi|> = \sum_{n=-N}^{N} \exp[-(z-na)^2/2\sigma^2]/(2N\sqrt{2\pi})$. Средний тангенс наклона равен

$$\frac{1}{R_{cr}} = \int_{-\infty}^{\infty} h(z)\frac{dz}{2Na} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(z-na)^2/2\sigma^2]dz}{2\sqrt{2\pi}a} = \frac{\sigma}{2a} = .$$

$$= \frac{1}{2\cdot 6.086}\sqrt{\frac{r_A}{a_0}} = \frac{1}{2\cdot 6.086}\sqrt{\frac{1.4\cdot 10^{-13}}{0.5\cdot 10^{-8}}} = \frac{1}{2300}$$

Величина критического числа Рейнольдса относительно диаметра равна $R_{cr} = 2300$. Но почему критическое число Рейнольдса для сферы равно $3\cdot 10^5$ Это связано с разным определением критического числа Рейнольдса. Оно равно $\frac{1}{R_{cr}} = \frac{da}{ds} = \frac{dl_{eff}}{ds}\cdot\frac{a}{l_{eff}} = \frac{1}{2300}\cdot\frac{a}{l_{eff}}$, где величина l_{eff} эффективный, гидродинамический размер тела, включая среду, a истинный геометрический размер тела, причем $\frac{dl_{eff}}{ds} = |\tan\varphi| = \frac{1}{2300}$ молекулярный тангенс наклона шероховатости. Причем отношение $\frac{a}{l_{eff}}$ может иметь значение $\frac{a}{l_{eff}} = 0.01$.

Необходимо отметить, что к микро-шероховатостям относятся и ступенчатое изменение высоты поверхности. Его тангенс наклона образует дельта функцию и при усреднении дает вклад в критическое число Рейнольдсца в данном сечении $\frac{2}{R_{cr}} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{P} \frac{|\Delta a_k|}{Pa} \delta(z - z_k) dz = \sum_{k=1}^{P} \frac{|\Delta a_k|}{Pa}$, где скачок высоты произошел на разных углах данного сечения.

Величина критического числа Рейнольдсца равна $R_{cr} = 2300$. Макро-шероховатости $<|da/dz|>$ более редкие и определяют коэффициент сопротивления на числах Рейнольдсца в 12 и более раз больше.

Критерий между двумя предельными случаями рассеяния соответствует числу Рейнольдсца $\frac{Va}{\nu} = ka; k = \frac{V}{\nu}$. Число Рейнольдсца имеет критическое значение между ламинарным режимом и турбулентным режимом. При ламинарном режиме шероховатость поверхности не влияет на свойство потока, а при турбулентном режиме шероховатость сказывается на мнимую часть скорости потока и турбулентный режим зависит от шероховатости.

Имеется ли критическое значение между когерентным и диффузным рассеянием? Поверхности, на которой рассеивается волна может иметь большой радиус кривизны и малую высоту шероховатости, т.е. оба режима могут существовать одновременно, имеется когерентная и диффузная компонента. Пограничный слой тела в потоке может быть турбулентным, а вдали от тела поток может быть ламинарным. Значит можно высказать предположение, что диффузное, турбулентное рассеяние волны существует вблизи тела, а когерентное ламинарное рассеяние волны вдали от тела. Но рассеяние волны в произвольном случае не разделяется на ламинарное и турбулентное. Такое разделение соответствует действительному и комплексному течению. Причем мнимая часть комплексного течения пересчитывается в действительную часть. В случае рассеяния волны такой пересчет произведен и сложно выделить мнимую часть рассеяния.

Мнимая часть соответствует среднеквадратичному отклонению потока, а действительная часть его среднему значению. Среднеквадратичное значение поверхности при когерентном рассеянии и при рассеянии на синусоидальной поверхности равно нулю и значит поверхность действительная. В случае диффузного рассеяния или рассеяния при постоянном среднеквадратичном тангенсе угла шероховатости поверхность имеет дисперсию и, следовательно, ее размер имеет мнимую часть. Какова поверхность рассеяния, таковы и могут быть свойства потока. Если поверхность действительная (критерий шероховатости безразмерная кривизна поверхности $1/\mathrm{ka}$ меньше критического, то рассеяние ламинарное, если комплексная (критерий шероховатости – безразмерная кривизна поверхности $1/\mathrm{ka}$ велик), то рассеяние турбулентное. Если поверхность смешанного типа, то вблизи она турбулентная, а вдали ламинарная. Причем между комплексной и ламинарной волной имеется граница. Граница соответствует $ka = \frac{\sigma}{l} = \frac{1}{R_{cr}} = 1/2300$, т.е. критерий шероховатости отношение помехи к сигналу $ka = \frac{\sigma}{l}$.

Получаем условие стационарности для уравнения Навье – Стокса с учетом одного члена ряда-решения в одномерном случае

$$R_0^2 - 2R_0 R_{cr} + T/8 = 0,$$

В одномерном случае при постоянстве сечения трубопровода уравнение неразрывности выполняется тождественно. Ламинарное решение этого уравнения равно

$$R_0 = R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8} = [R_{cr}/\sqrt{T} - \sqrt{R_{cr}^2/T - 1/8}]\sqrt{T}\ .$$

При внешнем давлении, равном $T = 8R_{cr}^2$ начинается комплексное решение и турбулентный режим, так как число Рейнольдса в этой точке равно критическому значению. Из эксперимента и путем проделанного вычисления имеем значение критического числа Рейнольдса для круглого трубопровода $R_{cr} = \frac{l}{k} = \frac{1}{<|\tan\varphi|>} = 2300$. Коэффициент сопротивления трубопровода с круглым сечением определяется по формуле (в формулу подставляем перепад давления, выраженный через безразмерное давление)

$$\lambda = \frac{2\Delta P_L d}{\rho V_a^2 L} = \frac{2Tv^2 k}{V_a^2 d^2 l} = \frac{2T}{R_{cr} \mid R_a^2 \mid},$$

Средняя скорость, входящая в число Рейнольдса, равна

$$V_a = \int_0^a rV_0(1 - \frac{r^2}{a^2})dr / \int_0^a rdr = V_0/2, R_a = \frac{V_a d}{\nu} = \frac{R_0}{2}.$$

Асимптотика коэффициента сопротивления трубопровода λ_{lam} с круговым сечением для ламинарного режима вычислена верно.

$$R_a = R_0/2 = (R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8})/2 \cong \frac{T}{32R_{cr}}, \frac{T}{8R_{cr}^2} << 1, \lambda_{lam} = \frac{2T}{R_{cr} \mid R_a^2 \mid} = \frac{64}{\mid R_a \mid}$$

Асимптотика получена при малом числе Рейнольдса, когда конвективный член мал.

Но если усреднять мнимую безразмерную часть, получим квадратное уравнение

$$(\mathrm{Re}\, x_\alpha)^2 + (\mathrm{Im}\, x_\alpha)^2 \alpha^2 = (\mathrm{Re}\, x_\alpha)^2 \{1 + (\mathrm{Im}\, x_\alpha)^2 / [(\mathrm{Re}\, x_\alpha)^2 + (\mathrm{Im}\, x_\alpha)^2 \alpha^2]\}$$

Получаем квадратное уравнение $\alpha^4 (\frac{\mathrm{Im}\, x_\alpha}{\mathrm{Re}\, x_\alpha})^2 + \alpha^2 - 1 = 0$.

Решение этого уравнения

$$\alpha^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(\mathrm{Im}\, x_\alpha / \mathrm{Re}\, x_\alpha)^2}}{2(\mathrm{Im}\, x_\alpha / \mathrm{Re}\, x_\alpha)^2} = \begin{cases} 1 - (\mathrm{Im}\, x_\alpha / \mathrm{Re}\, x_\alpha)^2, (\mathrm{Im}\, x_\alpha / \mathrm{Re}\, x_\alpha)^2 << 1 \\ \mid \mathrm{Re}\, x_\alpha / \mathrm{Im}\, x_\alpha \mid, (\mathrm{Im}\, x_\alpha / \mathrm{Re}\, x_\alpha)^2 >> 1 \end{cases}$$

Значение числа Рейнольдса в действительной плоскости равно

$$R^2=(\operatorname{Re}x_\alpha)^2/2+\sqrt{(\operatorname{Re}x_\alpha)^4/4+(\operatorname{Re}x_\alpha)^2(\operatorname{Im}x_\alpha)^2}=$$
$$=\begin{cases}(\operatorname{Re}x_\alpha)^2+(\operatorname{Im}x_\alpha)^2, (\operatorname{Im}x_\alpha)^2<(\operatorname{Re}x_\alpha)^2\\ (\operatorname{Re}x_\alpha)^2+\operatorname{Re}x_\alpha\operatorname{Im}x_\alpha, (\operatorname{Im}x_\alpha)^2>(\operatorname{Re}x_\alpha)^2\end{cases}$$

Подставим значение параметров в это решение

$$R^2=(\operatorname{Re}x_\alpha)^2/2+\sqrt{(\operatorname{Re}x_\alpha)^4/4+(\operatorname{Re}x_\alpha)^2(\operatorname{Im}x_\alpha)^2}$$
$$=R_{cr}^2/2+\sqrt{(R_{cr})^4/4+R_{cr}^2\beta^2(T^2/8-R_{cr}^2T)}$$
$$\beta=\{2/[kR_{cr}/d+1]\}^{3/8}$$

Коэффициент сопротивления при этом определяется по формуле

$$\lambda=\frac{2T}{R_{cr}\,|R_a^2|}=\frac{8T_0}{|R_0^2|}=\frac{8}{[R_{cr}^2/2T_0+\sqrt{R_{cr}^4/4T_0^2+R_{cr}^2\beta^2(1/8-R_{cr}/T_0)}]}, T_0=\frac{(P_2-P_1)d^3}{\rho v^2L},$$
$$\lim_{T_0\to\infty}\lambda=\frac{16\cdot 2^{1/2}}{R_{cr}\beta}$$

При малой мнимой части для коэффициента сопротивления имеем рост решения

$$\lambda=\frac{2T}{R_{cr}\,|R_a^2|}=\frac{8T_0}{|R_0^2|}=\frac{8T_0}{R_{cr}[R_{cr}/2+\sqrt{R_{cr}^2/4+\beta^2(T_0^2/8-R_{cr}T_0)}]}=$$
$$=\frac{8}{x}[4+\sqrt{16+8(x^2-R_{cr}x)/R_{cr}^2\beta^2}], x=R_{cr}/2+\sqrt{R_{cr}^2/4+\beta^2(T_0^2/8-R_{cr}T_0)}\ge R_{cr}$$
$$\beta=g[2/(kR_{cr}/d+1)], \ln x\to\begin{cases}\ln R_{cr}, T_0\sim 8R_{cr}\\ \ln\beta+\ln T_0-(\ln 8)/2, T_0>>8R_{cr}\end{cases}$$
$$\ln\lambda=\ln 8[4+\sqrt{16+8(x^2-R_{cr}x)/R_{cr}^2\beta^2}]-\ln x\to\begin{cases}\ln 64-\ln x, x\sim R_{cr}\\ \ln 16\sqrt{2}-\ln R_{cr}-\ln\beta, x>>R_{cr}\end{cases}$$

В ламинарном режиме имеем формулу

$$\lambda = \frac{2T}{R_{cr}\,|R_a^2|} = \frac{8T_0}{|R_0^2|} = \frac{2T_0}{(R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T_0\,R_{cr}/8})^2/4} = \frac{64}{R_a}$$

$$\lambda = \frac{2T_0}{[R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T_0\,R_{cr}/8})]^2/4} = \frac{64(xR_{cr} - x^2)}{R_{cr}x^2} \to \frac{64}{x}, x \le R_{cr}$$

$$x = (R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T_0\,R_{cr}/8})/2, T_0 = 32(xR_{cr} - x^2)/R_{cr} \to 32x$$

Коэффициент сопротивления определяется по формуле

$$\lambda = \frac{8}{x}[4 + \sqrt{16 + 8(x^2 - R_{cr}x)/(R_{cr}^2\beta^2)}] \qquad \lambda = \frac{64}{x}$$

Число Рейнольдса потока пропорционально на бесконечности давления $R \sim \sqrt{T} \sim d_{eff}^{3/2}$. При этом самая гладкая поверхность соответствует среднему модулю тангенса наклона, равному обратной величине критического числа Рейнольдса. При решении в виде ряда получится вычисляемое другое значение α. Самая гладкая поверхность соответствует среднему модулю тангенса наклона, равного обратному значению критического числа Рейнольдса, так как самые малые модули тангенса наклона соответствуют молекулярному уровню шероховатости. При этом эффективный диаметр меньше истинного диаметра. Причем отношение эффективного диаметра к истинному пропорционально $\alpha^{1/4}$. Средний модуль тангенса угла наклона не может быть меньше молекулярных шероховатостей и минимальное его значение равно $\tan\varphi = 1/R_{cr}$. Т.е. величина 1 это максимальное отношение эффективного диаметра к истинному диаметру. При этом коэффициент β пропорционален

$$\sqrt{T} = \frac{<d_{eff}^{3/2}>}{d^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{2}{\frac{2hR_{cr}}{d}+1}\right)^{\sigma}, \sigma = \frac{1}{4}\frac{3}{2} = \frac{3}{8},$$

который при нулевой макро-шероховатости остается микро-шероховатость и эффективный диаметр равен 1, т.е. при увеличении степени шероховатости эффективный диаметр уменьшается. При нулевой макро-шероховатости имеется микро-шероховатость. При этом отношение тангенса наклона макро-шероховатостей к микро-шероховатостям больше чем величина $\frac{h}{d<|tan\alpha|>} > 1$.

Рассеяние звуковой или электромагнитной волны на шероховатой поверхности имеет границу между когерентным рассеянием и диффузным рассеянием. При условии $kasin^3\varphi \gg 1$ см [1], где используется волновое число волны k и радиус кривизны поверхности a и угол скольжения φ наблюдается когерентное рассеяние, или ламинарное. При противоположном условии наблюдается диффузное рассеяние или турбулентное рассеяние и коэффициент отражения определяется по формуле $V_\varphi = \exp(-k\sigma sin\varphi)$, где величина σ среднеквадратичное отклонение высоты поверхности или малый радиус кривизны поверхности. Формула получается путем замены величины высоты шероховатости ζ в формуле $\exp(ik\zeta sin\varphi)$ на мнимое среднеквадратичное отклонение. Угол скольжения изменяется на отрезке $[0, \pi]$. Данная формула справедлива для любого среднеквадратичного отклонения.

Возникает вопрос, можно ли коэффициент отражения, вычисленный в [1] для волны применить к гидродинамическому потоку? Для трубопровода это проблематично, так как для его расчета используется только продольная скорость волн, одинаковая по всей длине потока в случае несжимаемой жидкости. Но мнимая часть скорости, это среднеквадратичное отклонение и на него сказывается шероховатость поверхности. Поэтому мнимую часть для внутренней задачи нужно умножить на величину $\beta = \frac{R_{cr}^{0.05}-1}{R_{cr}^{0.05}+1}\exp(-\frac{R}{20R_{cr}^{1.05}}) + [1-\exp(-\frac{R}{20R_{cr}^{1.05}})] \times (\frac{2}{\frac{2hR_{cr}}{d}+1})^{3/8}$. Где d диаметр трубопровода, h среднеквадратичная высота шероховатостей, и переменное число Рейнольдса потока. Первый и второй член определяют поле внутри шероховатости. Первый член определяет поле, отраженное от внешней границы шероховатости, второй преломленный член определяет поле, прошедшее шероховатость, и отраженное от гладкой поверхности с коэффициентом отражения равным единице. Отношение для внешней границы $\frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} = R_{cr}^{0.05}$ для слоя шероховатости зависит от критического числа Рейнольдса.

Используются коэффициенты 0.05=1/20. Приведем график коэффициента сопротивления круглого трубопровода в зависимости от числа Рейнольдса и степени шероховатости. Коэффициент сопротивления определяется по формуле

$$\lambda = \frac{8}{x}[4 + \sqrt{16 + 8(x^2 - R_{cr}x)/(R_{cr}^2\beta^2)}]$$

$$\lambda = \frac{64}{x}$$

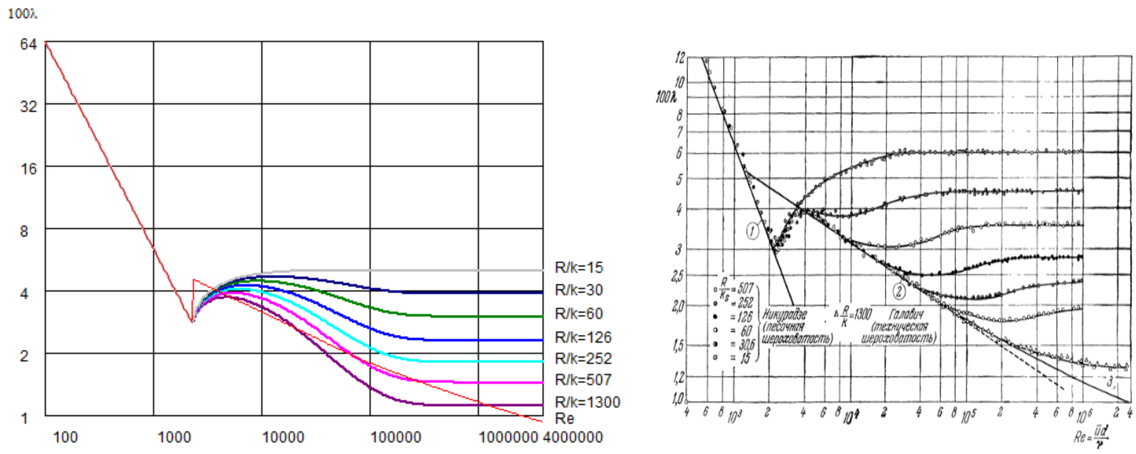

Рис.1 Слева находится график, построенный на основании теоретического подсчета, а справа график на основе эксперимента

Отметим, что экспериментальный график содержит противоречия. Так при степени шероховатости, большей 15 имеется излом поверхности, которого нет при степени шероховатости, равной 15. Кроме того, имеется общая огибающая у степени шероховатости, большей 15, причем график при степени шероховатости, равной 15 не входит в эту огибающую. Не понятно, какая должна быть непрерывная формула, описывающая этот излом и огибающую. Отсюда вывод, графики должны описываться функцией, имеющей разрыв производной, т.е. должны состоять из разных функций при разном числе Рейнольдса. Эти функции можно получить только используя точно решеную задачу об определении коэффициента отражения от шероховатости, должны возникнуть числа Рейнольдса в зависимости от степени шероховатости, при которых происходит излом и общая огибающая у графика коэффициента сопротивления.

Литература

1. Басс Ф.Г., Фукс И.М. Рассеяние волн на шероховатой поверхности. М.: «Наука». 1972г, 424стр.
2. Якубовский Е.Г. Исследование решения уравнения Навье-Стокса II. «Энциклопедический фонд России», 2017, 61стр. http://russika.ru/userfiles/390_1514275116.pdf