Приведение произвольного линейного уравнения в частных производных второго порядка к виду оператора Лапласа в декартовой форме

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Для упрощения оператора Лапласа произвольного вида к виду декартова оператора Лапласа нужно решить нелинейное уравнение в частных производных при зафиксированных переменных, кроме одной, которая и определяет вид преобразования и сводит задачу к обыкновенному дифференциальному уравнению. Получается сумма 3 функций в случае трехмерного пространства, причем каждая функция зависит от одного аргумента и определяющая угол, равный сумме интегралов от трех одинаковых определяемых функций, в которых два аргумента зафиксированы, а от третьего аргумента берется интеграл. В результате частная производная от суммы трех функций определяет одинаковую определяемую из обыкновенного дифференциального уравнения функцию, в которой два аргумента зафиксированы, а третий свободен. Это решение не периодическое, хотя представлено с помощью действительной экспоненты. Но если аргументы этих определяемых функций периодические, то получим периодическую по этим аргументам функцию. Если использовать мнимый период, то получатся комплексные аргументы, нелинейно зависящие от коэффициентов мнимого периода. Это решение описывает две проекции спина частицы, но в силу сложной зависимости от коэффициентов мнимого периода описывает получающийся фон. Первоначально идея работы изложена в [1].

Рассмотрим уравнение в частных производных вида

$$\sum_{l,k=1}^{3} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q_l} (\sqrt{g} g^{lk} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k}) = 0 .$$

Приведем его к виду

$$\sum_{l=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_l^2} = 0$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q_l} (\sqrt{g} g^{lk} \frac{\partial}{\partial q_k} \exp[\sqrt{\alpha_{1l} + \alpha_{2l} + \alpha_{3l}} (\lambda_{1l} + \lambda_{2l} + \lambda_{3l})] =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial y_l^2} \exp[\sqrt{\alpha_{1l} + \alpha_{2l} + \alpha_{3l}}\, y_l]; y_l = \lambda_{1l} + \lambda_{2l} + \lambda_{3l}$$

Преобразуем это уравнение относительно λ_{sl}.

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q_l} \{(\sqrt{g} g^{lk} \frac{\partial \lambda_{sl}}{\partial q_k}) \sqrt{\alpha_{1l} + \alpha_{2l} + \alpha_{3l}} \exp[\sqrt{\alpha_{1l} + \alpha_{2l} + \alpha_{3l}} (\lambda_{1l} + \lambda_{2l} + \lambda_{3l})]\} =$$
$$= \alpha_{sl} \exp[\sqrt{\alpha_{1l} + \alpha_{2l} + \alpha_{3l}}\, y_l]; y_l = \lambda_{1l} + \lambda_{2l} + \lambda_{3l}$$

Продифференцируем по остальной переменной, получим

$$\frac{\partial}{\partial q_l} (\sqrt{g} g^{lk}) \frac{\partial \lambda_{sl}}{\partial q_k} + \sqrt{g} g^{lk} \frac{\partial^2 \lambda_{sl}}{\partial q_l \partial q_k} \sqrt{\alpha_{1l} + \alpha_{2l} + \alpha_{3l}} +$$
$$+ \sqrt{g} g^{lk} \frac{\partial \lambda_{sl}}{\partial q_k} (\alpha_{1l} + \alpha_{2l} + \alpha_{3l}) \frac{\partial (\lambda_{1l} + \lambda_{2l} + \lambda_{3l})}{\partial q_l} = \alpha_{sl} \sqrt{g} .$$

Получили систему девяти уравнений относительно λ_{sl}. Просуммируем это уравнение по s, получим уравнение относительно $\lambda_{1l} + \lambda_{2l} + \lambda_{3l} = y_l$

$$\frac{\partial}{\partial q_l} (\sqrt{g} g^{lk}) \frac{\partial y_l}{\partial q_k} + \sqrt{g} g^{lk} \frac{\partial^2 y_l}{\partial q_l \partial q_k} \sqrt{\alpha_{1l} + \alpha_{2l} + \alpha_{3l}} +$$
$$+ \sqrt{g} g^{lk} \frac{\partial y_l}{\partial q_k} (\alpha_{1l} + \alpha_{2l} + \alpha_{3l}) \frac{\partial y_l}{\partial q_l} = \sum_{s=1}^{3} \alpha_{sl} \sqrt{g} .$$

Получаем дифференциальное уравнение первого порядка относительно равных значений

$$\frac{\partial y_l(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} = \frac{\partial y_l(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} = \frac{\partial y_l(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} = \frac{\partial y_l(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_l} \qquad (1)$$

Тогда имеем нелинейное уравнение

$$\sum_{k=1}^{3}[\frac{\partial}{\partial q_l}(\sqrt{g}g^{lk})x_l+\sqrt{g}g^{lk}\frac{\partial x_l}{\partial q_l}\sqrt{\alpha_{1l}+\alpha_{2l}+\alpha_{3l}}+$$

$$+\sqrt{g}g^{lk}(x_l)^2(\alpha_{1l}+\alpha_{2l}+\alpha_{3l})]=\sum_{s=1}^{3}\alpha_{sl}\sqrt{g};x_l=\frac{\partial y_l}{\partial q_l};l=1;y_1=\int_{q_l^0}^{q_l}x_1(q_1,q_2,q_3)dq_1+y_1^0(q_2,q_3).$$

Из этого дифференциального уравнения определится $x_l=x_l(q_1,q_2,q_3)$, и значит переменная y_l.

Для выполнения равенства (1) надо определить величину $y_1^0(q_2,q_3)$, подставляя найденное решение в (1).

$$y_1^0(q_2,q_3)=\int_{q_0^0}^{q_2}[x_1(q_1,q_2,q_3)-\int_{q_l^0}^{q_l}\frac{\partial x_1(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_2}dq_1]dq_2+y_1^0(x_3)=$$

$$=\int_{q_0^0}^{q_2}x_1(q_1^0,q_2,q_3)dq_2-\int_{q_l^0}^{q_l}[x_1(q_1,q_2,q_3)-x_1(q_1,q_2^0,q_3)dq_1+y_1^0(x_3)$$

$$y_l(q_1,q_2,q_3)=\int_{q_0^0}^{q_2}x_1(q_1^0,q_2,q_3)dq_2+\int_{q_l^0}^{q_l}x_1(q_1,q_2^0,q_3)dq_1+y_1^0(x_3)$$

$$y_l(q_1,q_2,q_3)=\int_{q_3^0}^{q_3}x_1(q_1^0,q_2^0,q_3)dq_3+\int_{q_2^0}^{q_2}x_1(q_1^0,q_2,q_3^0)dq_2+\int_{q_l^0}^{q_l}x_1(q_1,q_2^0,q_3^0)dq_1$$

Если за основу взять мнимую экспоненту, то получим комплексную функцию $x_l=x_l(q_1,q_2,q_3)$

$$y_l(q_1,q_2,q_3)-2\pi n_l=\int_{q_3^0+2\pi k_3}^{q_3+2\pi k_3}x_l(q_1^0,q_2^0,q_3)dq_3+\int_{q_2^0+2\pi k_2}^{q_2+2\pi k_2}x_l(q_1^0,q_2,q_3^0)dq_2+\int_{q_l^0+2\pi k_1}^{q_l+2\pi k_1}x_l(q_1,q_2^0,q_3^0)dq_1$$

В результате получим сложную комплексную зависимость углов $y_l,l=1,...,3$ от координат $y_l=y_l[q_1+2\pi k_1,q_1^0+2\pi k_1,q_2+2\pi k_2,q_2^0+2\pi k_2 q_3+2\pi k_3,q_3^0+2\pi k_3]+2\pi n_l$

Со сложной зависимостью от комплексной величины $y_l,l=1,...,3$ $q_l=q_l(y_1-2\pi n_1,y_2-2\pi n_2,y_3-2\pi n_3)+2\pi k_l$, определяющей не периодическую зависимость. Рассматривать надо эти зависимости в комплексной плоскости, так как функция $y_l,l=1,...,3$ комплексная.

Периодические углы задаются в виде формулы

$$\begin{gathered}x_l=R(q_1,q_2,q_3)\sin q_l/\sqrt{\cos^2 q_l(\tan^2 q_1+\tan^2 q_2+\tan^2 q_3)}\\ q_l=\arg[R(q_1,q_2,q_3)+ix_l],\sqrt{\tan^2 q_1+\tan^2 q_2+\tan^2 q_3}=1\end{gathered}.$$

В случае рассмотрения в комплексной плоскости имеем

$$\begin{gathered} x_l = R(q_1, q_2, q_3)\exp(iq_l) / \sqrt{\exp(2iq_1) + \exp(2iq_2) + \exp(2iq_3)} \\ q_l = \arg x_l - \arg\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \arg\sqrt{\exp(2iq_1) + \exp(2iq_2) + \exp(2iq_3)} \end{gathered}.$$

В случае комплексного угла формула имеет вид

$$\begin{gathered} x_l = R(q_1, q_2, q_3)\exp(q_l) / \sqrt{\exp(2q_1) + \exp(2q_2) + \exp(2q_3)} \\ q_l = \ln x_l - \ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + 2\pi ni; \sqrt{\exp(2q_1) + \exp(2q_2) + \exp(2q_3)} = 1 \end{gathered}.$$

Причем угол определяется с помощью метода итераций во второй формуле.

Список литературы

1. Якубовский Е.Г. Упрощение оператора Лапласа сферической системы координат. «Энциклопедический фонд России», 2017, 2 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1519179738.pdf