Определение траектории черных дыр с комплексной массой

Якубовский Е.Г.

Траектория черных дыр с комплексной массой отличается от траектории небесных тел, которые двигаются по эллипсу, дополнительным членом. Этот член при действительной массе равен нулю.

Для вычисления траектории двух массивных дыр с комплексным радиусом нужно определить силу взаимодействия между ними. Она определяется законом притяжения Ньютона и равна

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{G[\operatorname{Re} M \operatorname{Re} m - \operatorname{Im} M \operatorname{Im} m + i(\operatorname{Re} M \operatorname{Im} m + \operatorname{Im} M \operatorname{Re} m)]}{r^2}$$

Приведенная масса является комплексной и равна $\mu = \frac{Mm}{M+m}$. Тогда параметры эллипса p, e являются комплексными. Угол φ является действительным. При работе с комплексными параметрами надо знать два пункта. Существуют комплексные макропараметры и микропараметры. Комплексные макропараметры получаются из решения нелинейного уравнений. Микропараметры, это шероховатость поверхности. Под комплексными значениями макропараметров понимается колебание с постоянной амплитудой и частотой, определяемой мнимой скоростью. Под комплексными микропараметрами понимается влияние шероховатости, имеющее случайное значение, и проявляющееся в виде коэффициентов при мнимых макропараметрах. На действительные макропараметры микропараметры не действуют, действительное ламинарное решение не зависит от микропараметров. Усреднять микропараметры надо в действительной плоскости, так как для действительных макропараметров линейные микропараметры являются мнимыми и ламинарное решение усреднять не надо. Для мнимых макропараметров линейные мнимые микропараметры являются действительными и их модули надо усреднять, что проявляется в образовании коэффициентов при мнимой части макропараметров. Комплексная масса является макропараметром и означает колебание массы вокруг среднего действительного значения с амплитудой равной мнимому значению и частотой, определяемой мнимой скоростью.

Так средняя действительная координата определяется как величина действительной части радиуса, определяющее движение за счет действительной скорости. Мнимая часть координаты определяется как. вращение с частотой, равной мнимой скорости, деленной на мнимую координату. Этот вектор частоты умножается векторно на вектор мнимой координаты. Векторное произведение описывает мнимую часть скорости. Причем мнимая скорость определяется по формуле $u_{x\,\mathrm{Im}} = -\omega_z \operatorname{Im} y; u_{y\,\mathrm{Im}} = \omega_z \operatorname{Im} x$

$$
\begin{gathered}
u_{x\,\mathrm{Re}} = V_x^0; u_{x\,\mathrm{Im}} = -\omega_z \operatorname{Im} y = -\operatorname{Im} y \operatorname{Im} V_z / \operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} y \operatorname{Im} V / \operatorname{Im} r = -\sin\varphi \operatorname{Im} V \\
u_{y\,\mathrm{Re}} = V_y^0; u_{y\,\mathrm{Im}} = \omega_z \operatorname{Im} x = \operatorname{Im} x \operatorname{Im} V_z / \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} x \operatorname{Im} V / \operatorname{Im} r = \cos\varphi \operatorname{Im} V; \\
\omega_z = \omega = \operatorname{Im} V / \operatorname{Im} r
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Зная модуль частоты вращения, можно вычислить его проекции. Имеем следующие формулы

$$
\begin{gathered}
\operatorname{Im} V = \operatorname{Im} \sqrt{(\frac{dr}{dt})^2 + r^2 (\frac{d\varphi}{dt})^2} \\
\omega = \omega_z = \frac{\operatorname{Im} V}{\operatorname{Im} r}; \omega_x = \frac{\operatorname{Im} V_x}{\operatorname{Im} x}; \omega_y = \frac{\operatorname{Im} V_y}{\operatorname{Im} y}; \\
\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} \frac{p}{1 + e\cos\varphi}
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Действительные координаты траектории определятся по формуле

$$X_{\mathrm{Re}} = \mathrm{Re}\frac{p}{1+e\cos\varphi}\cos\varphi;$$

$$X_{\mathrm{Im}} = -\int_0^t \mathrm{Im}\,y(u)\frac{\mathrm{Im}\,V(u)}{\mathrm{Im}\,r(u)}du = -\int_0^t \sin\varphi\,\mathrm{Im}\,V(u)du = -\int_0^{\varphi} \sin\varphi\,\mathrm{Im}\sqrt{(\frac{dr}{d\varphi})^3 + r^2}\,du$$

$$Y_{\mathrm{Re}} = \mathrm{Re}\frac{p}{1+e\cos\varphi}\sin\varphi;$$

$$Y_{\mathrm{Im}} = \int_0^t \mathrm{Im}\,x(u)\frac{\mathrm{Im}\,V(u)}{\mathrm{Im}\,r(u)}du = \int_0^t \cos\varphi\,\mathrm{Im}\,V(u)du = \int_0^{\varphi} \cos\varphi\,\mathrm{Im}\sqrt{(\frac{dr}{d\varphi})^3 + r^2}\,du$$

В случае действительных масс радиус является действительный, добавки к движению по эллипсу равны нулю и получаем обычную траекторию вращения по эллипсу.

$$X_{\mathrm{Im}} = \int_0^{\varphi} \sin\varphi\,\mathrm{Im}\sqrt{(\frac{dr}{d\varphi})^2 + r^2}\,du = -\mathrm{Im}\int_0^{\varphi} \sqrt{\frac{e^2p^2\sin^2\varphi}{(1+e\cos\varphi)^4} + \frac{p^2}{(1+e\cos\varphi)^2}}\,d\cos\varphi =$$

$$= -p\,\mathrm{Im}\int_1^{\cos\varphi} \frac{\sqrt{1+e^2+2ex}}{(1+ex)^2}dx = -8p\sqrt{1+e^2}\int_{\sqrt{1+e}}^{\sqrt{1+\frac{2e}{1+e^2}\cos\varphi}} \frac{y^2dz}{[1-e^2+(1+e^2)y^2]^2}$$

$$= -\frac{8p(1-e^2)^{3/2}}{1+e^2}\int_{\sqrt{(1+e)\frac{1+e^2}{1-e^2}}}^{\sqrt{[1+\frac{2e}{1+e^2}\cos\varphi]\frac{1+e^2}{1-e^2}}} \frac{z^2dz}{(1+z^2)^2} =$$

$$= -\frac{8p(1-e^2)^{3/2}}{1+e^2}[\frac{1}{2}\arctan z - \frac{\sin(2\arctan z)}{4}] =$$

$$= -\frac{8p(1-e^2)^{3/2}}{1+e^2}[\frac{1}{2}\arctan\sqrt{[1+\frac{2e}{1+e^2}\cos\varphi]\frac{1+e^2}{1-e^2}} - \frac{\sin(2\arctan\sqrt{[1+\frac{2e}{1+e^2}\cos\varphi]\frac{1+e^2}{1-e^2}})}{4}]|_0^{\varphi}$$

Этот интеграл не равен нулю при условии $e \neq 0$. При условии $e = 0$, интеграл действительный и, значит мнимая часть равна нулю, т.е. имеем $X_{\mathrm{Im}} = 0$, что и получается при вычислении интеграла.

Вычислим следующий интеграл

$$Y_{\mathrm{Im}} = \int \cos\varphi\,\mathrm{Im}\sqrt{(\frac{dr}{d\varphi})^2 + r^2}\,du = \mathrm{Im}\,p\int \frac{\cos\varphi\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi}}{(1+e\cos\varphi)^2}d\varphi$$

Координата $X.Y$ меняются по закону

$$X^2=[\mathrm{Re}\frac{p}{1+e\cos\varphi}\cos\varphi]^2+\{\mathrm{Im}-\frac{8p(1-e^2)^{3/2}}{1+e^2}[\frac{1}{2}\arctan\sqrt{[1+\frac{2e}{1+e^2}\cos\varphi]\frac{1+e^2}{1-e^2}}-$$
$$-\frac{\sqrt{[1+\frac{2e}{1+e^2}\cos\varphi]\frac{1+e^2}{1-e^2}}}{4(1+e\cos\varphi)}]|_0^{\varphi}\}^2$$

$$Y^2=\{\mathrm{Re}\frac{p}{1+e\cos\varphi}\sin\varphi\}^2+\{\mathrm{Im}\,p\int_0^{\varphi}\frac{\cos\varphi\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi}}{(1+e\cos\varphi)^2}d\varphi\}^2$$

В случае эксцентриситета равного нулю, имеем движение не по окружности и радиус окружности равен сумме квадратов действительной и мнимой части

$$X^2=(\mathrm{Re}\,p\cos\varphi)^2+(\mathrm{Im}\,p)^2 0$$
$$Y^2=(\mathrm{Re}\,p\sin\varphi)^2+(\mathrm{Im}\,p)^2\sin^2\varphi$$
$$R^2=X^2+Y^2=(\mathrm{Re}\,p)^2+(\mathrm{Im}\,p)^2\sin^2\varphi$$

При этом параметры определятся по формуле с комплексной приведенной массой

$$\alpha=-G[\mathrm{Re}\,M\,\mathrm{Re}\,m-\mathrm{Im}\,M\,\mathrm{Im}\,m+i(\mathrm{Re}\,M\,\mathrm{Im}\,m+\mathrm{Im}\,M\,\mathrm{Re}\,m)]$$
$$p=\frac{M^2}{\mu(-\alpha)},e=\sqrt{1+\frac{2EM^2}{\mu\alpha^2}}$$

Величина радиуса имеет комплексное значение $r=\frac{p}{1+e\cos\varphi}$.

Угол определяется величиной при $p=\frac{L^3}{m(-\alpha)}$

$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{L}{mr^2}=\frac{\sqrt{2(-mE)}}{mp\sqrt{1-e^2}}(1+e\cos\varphi)^2=\frac{\sqrt{m(-\alpha)}}{mp^{3/2}}(1+e\cos\varphi)^2$. Где в случае движения по эллипсу имеем $\alpha<0$ и угол является действительный при всех действительных параметрах. Угол при всех действительных параметрах является мнимым при положительной энергии $\alpha>0$, определяя движение по гиперболе. $a=\frac{p}{1-e^2}=\frac{\alpha}{-2E};\alpha<0;a>0$, величина $b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{M}{\sqrt{-2mE}}$ при положительной энергии мнимая. При комплексных значениях параметра, он описывает более общий вид движения, не по эллипсу, и не по гиперболе.

Угол определится из уравнения

$$\int \frac{d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2} = \frac{e\sin\varphi}{(e^2-1)(1+e\cos\varphi)} - \frac{1}{e^2-1}\int \frac{d\varphi}{1+e\cos\varphi} = \frac{\sqrt{m(-\alpha)}}{mp^{3/2}}t + const$$

$$\int \frac{d\varphi}{1+e\cos\varphi} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{1-e^2}}\arctan\dfrac{(1-e)\tan\varphi/2}{\sqrt{1-e^2}}, e<1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{e^2-1}}\ln\left|\dfrac{(e-1)\tan\varphi/2+\sqrt{e^2-1}}{(e-1)\tan\varphi/2-\sqrt{e^2-1}}\right|, e>1 \end{cases}$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2} = \frac{1}{2}\tan^2\varphi/2 + \frac{1}{4}\tan^2\varphi/2, e=1$$

Так как траектории планет являются замкнутыми, угол φ является действительным. При действительном эксцентриситете меньше единицы время является действительным. При условии $e>1$ имеем $\alpha.>0$ и время является мнимым, что приводит к гиперболическим углам при действительном времени. При комплексном эксцентриситете время является комплексным при периодических траекториях.

Интересный вопрос, как меняется модуль энергии системы, остается ли он неизменным при вычислении с помощью комплексных параметров. Модуль энергии системы равен $E=\alpha\dfrac{1-e^2}{2p}$. Если считать энергию в комплексной плоскости, по формулам для действительной энергии, то получим закон сохранения энергии. Тогда энергия равна

$$E = \frac{mV_r^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} = \frac{L^2}{2mr^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{(-\alpha)}{2p}(1+e\cos\varphi)^2 + \frac{\alpha}{p}(1+e\cos\varphi) =$$
$$= \frac{(-\alpha)p}{2r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{\alpha}{2p}(1-e^2\cos^2\varphi) = \frac{(-\alpha)e^2\sin^2\varphi}{2p} + \frac{\alpha}{2p}(1-e^2\cos^2\varphi) = \frac{\alpha}{2p}(1-e^2).$$

Но тогда надо использовать комплексные значения энергии, и брать от вычисленного значения энергии модуль.

Желательно получить действительные координаты, причем чтобы их энергия совпадала с вычисленным модулем энергии. Чтобы энергия сохранялась при эллиптическом движении в виде

$$E=\frac{mV_r^2}{2}+\frac{L^2}{2mr^2}+\frac{\alpha}{r}=\frac{L^2}{2mr^4}(\frac{dr}{d\varphi})^2+\frac{L^2}{2mr^2}+\frac{\alpha}{r}=\alpha\frac{(1-e^2)}{2p}$$

$$\int_{r_0}^{r}\frac{\frac{|L|}{r^2}dr}{\sqrt{2|m|E-\frac{|L|^2}{r^2}-\frac{|2\alpha||m|}{r}}}=\varphi-\varphi_0, E=\alpha\frac{1-e^2}{2p}, p=\frac{L^2}{m(-\alpha)}.$$

где скорость и радиус действительные. Тогда эти действительные координаты будут являться истинными действительными координатами, пересчитываемые из комплексных координат. Это выражение соответствует изменению значения радиуса, при вращении тел с использованием модуля всех комплексных коэффициентов.

Имеется три алгоритма вычисления траектории небесных тел с комплексной массой. Первый удовлетворяет уравнению сохранения энергии в комплексной форме и описывает не эллиптическое движение тел. Второй описывает действительное уравнение сохранения энергии, хотя параметры комплексные. Приведем график первого алгоритма.

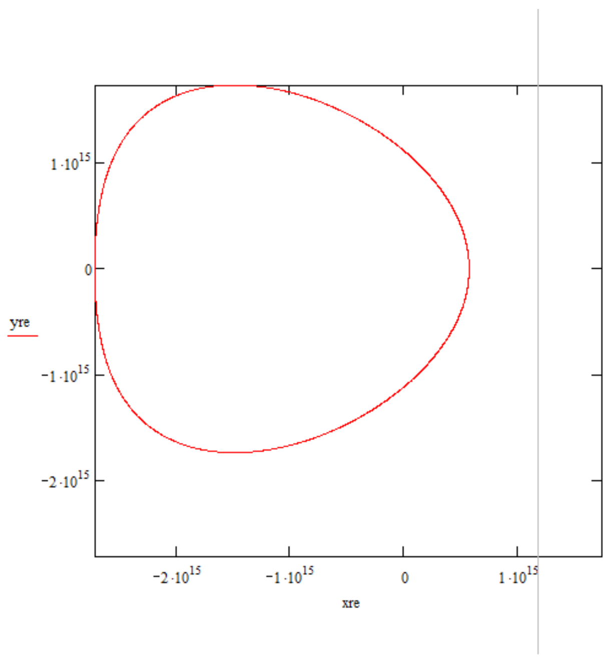

График определяют следующие значения параметров $e = 0.9 + 0.4i, |e| = 0.985$, $p = (1 + 0.5i)10^{15}\, cm$, $m = (4 + 0.5i)10^{33}\, g$, $\alpha = -Gm^2$.

Это алгоритмы с постоянной энергией тел с комплексной массой и периодической траекторией. Имеются алгоритмы с не периодической траекторией и как следствие уменьшением энергии системы. Где мнимые части массы играют роль затухание траектории и не периодического движения, когда комплексные массы сближаются. Они описываются формулами (1) и (2).

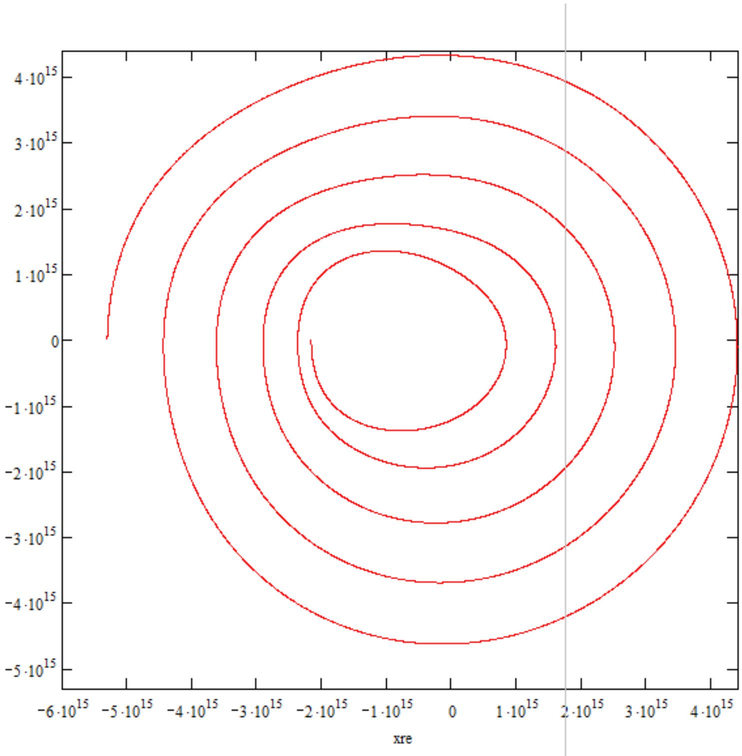

График определяют следующие значения параметров $e = 0.7 + 0.2i, |e| = 0.728$, $p = (1 + 0.1i)10^{15}\, cm$, $m = (4 + 0.01i)10^{33}\, g$, $\alpha = -Gm^2$.

Энергия системы, подсчитанная по этому алгоритму в первый момент времени по модулю больше вычисленной энергии системы по формуле $E = \alpha \frac{1 - e^2}{2p}$ и далее убывает по модулю, т.е. энергия системы растет и растет радиус системы. Это особенность полученных уравнений. Интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi}}{(1+e\cos\varphi)^2}d\varphi$ не равен нулю, и при интегрировании по бесконечному верхнему пределу стремится к бесконечности. Т.е. энергия системы растет, убывая по модулю. Полная энергия системы стремится к нулю. Радиус системы стремится к постоянному большому значению, равному $r = \lim_{\varphi\to\infty} \frac{\varphi}{2\pi} \operatorname{Im} p \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi}}{(1+e\cos\varphi)^2}d\varphi$. Но при непрерывном изменении угла, увеличивается полная энергия системы, энергия из отрицательной становится равной нулю

$$E = \frac{(-\alpha)p}{2r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} =$$
$$= \frac{(-\alpha)p}{2r^4}\left[\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im} p \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi}}{(1+e\cos\varphi)^2}d\varphi\right]^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} \to 0, r\to\infty$$

При этом эксцентриситет равен единице и получаем параболическое удаление небесного тела, что соответствует бесконечному радиусу системы. Согласно этому алгоритму энергия системы растет, и тело выталкивается на бесконечность. Этот алгоритм описывает движение небесных тел после Большого взрыва. Энергия сообщается небесным телам с комплексной массой и те удаляются на бесконечность.

Если первые два алгоритма описывают движение тел с постоянной энергией, то третий алгоритм действителен при сообщении энергии небесным телам.