# Свойства черной дыры при массе больше критической

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

При большом значении массы небесного тела черная дыра имеет малую плотность, что практически невозможно. Для избежание этого в метрическом тензоре используется дополнительный член, зависящий от массы черной дыры. Существует критическое значение массы, начиная с которой черная дыра строится на других принципах, образуется мнимый радиус черной дыры. Формулу метрического тензора видоизменили, чтобы не было особенности плотности черной дыры, и чтобы формула для внешней части черной дыры работала и для внутренней части. Мнимая часть плотности черной дыры линейно растет с ее массой. Мнимая часть плотности черной дыры означает колебание внутренней части черной дыры. Действительная часть комплексно сопряженной массы частицы вакуума описывает темную материю, а мнимая часть массы темную энергию, Также критическая масса черной дыры описывает темную материю и темную энергию. Сила взаимодействия черной дыры с действительным телом определяется конечной действительной критической массой, а не бесконечной мнимой массой. Поэтому создается впечатление, что масса черных дыр ограничена. Но самом деле мнимая часть массы может стремиться к бесконечности, при бесконечной плотности мнимой части массы.

В существующей литературе по черным дырам нет разделения массы на массу темной материи и темной энергии см. например [1]. Исследуется только распределение действительных параметров, и как следствие получают конечную критическую энергию массы черной дыры. Как доказано в статье сила взаимодействия комплексной массы с действительной массой определяется действительной массой тела с комплексной массой. Поэтому расчеты в действительной плоскости приводят к существованию верхних пределов у масс черных дыр. Как показали формулы, предельная масса черных дыр стремится к бесконечности, за счет роста мнимой части, т.е. роста мнимой части энергии. Но тел с комплексной массой, мнимая часть которых стремится к бесконечности, имеется ограниченное количество, поэтому наблюдается баланс между темной материей и темной энергией.

Величина $r_g = \frac{2Gm}{c_s^2}$ равна радиусу Земли, где $c_s$ средняя скорость звука во внутреннем веществе планеты, равная $c_e = 11$ км/сек. Можно высказать предположение, что и для других тел большой массы выполняется это равенство. Для черных дыр оно выполняется со скоростью света в вакууме. Для солнца скорость звуковой волны должна равняться $c_s = \sqrt{\frac{2GM_s}{r_s}} = 618$ км/сек. Тогда отношение внутренних температур Солнца и Земли должна равняться $(c_s / c_e)^2 = 3155$. Отношение температур Солнца и Земли $T_s / T_e = 15 \cdot 10^6 / 5000 = 3000$. Имеется совпадение по порядку величины. В микромире есть аналогичная формула комптоновского размера частицы $\lambda = \frac{\hbar}{mc}$, размер частицы определяется по его массе. Аналогична и формула для гравитационного радиуса, размер тела определяется его массой и скоростью звука.

Существует большое заблуждение, что масса черных дыр только должна быть втрое больше массы Солнца. Существует и верхний предел у массы черной дыры. Если бы не существовало верхнего предела массы черных дыр, тогда вакуум образовывал бы черные дыры, так как плотность у него минимальная, а по формуле для гравитационного радиуса масса черной дыры равняется $M = \frac{c^3}{\sqrt{\rho(2G)^3}}$, и у вакуума была бы масса, больше 3 масс Солнца и образовалась бы черная дыра. Масса Солнца, выраженная через скорость звука и плотность Солнца, равняется $M = \frac{c_s^3}{\sqrt{\rho_s (2G)^3}}$. Чтобы образовалась черная дыра, ее плотность должна быть велика, и так как у черной дыры фазовая скорость равна скорости света в вакууме, ее масса должна быть меньше $(\max_{c_s/M_s^{1/3}} \frac{c}{c_s} M_s^{1/3})^3$. Экстремальное тело имеет массу, равную 3 массам Солнца. Для солнца отношение $\frac{c^3}{c_\otimes^3} = 1.14 \cdot 10^8$. Для экстремальной планеты скорость звука в 3.21 раза меньше и равна 192км/сек. Дело в том, что обнаружены черные дыры, имеющие массу, равную $1.15 \cdot 10^{10}$ масс Солнца. Ограничение на массу черной дыры $M_\otimes < M_{bh} < (\max_{c_s/M_s^{1/3}} \frac{c}{c_s} M_s^{1/3})^3 = \frac{c^3}{c_\otimes^3} M_\otimes = M_{cr}$, где используется максимум выражения равного отношению скорости света в вакууме $c$ к скорости звука $c_s$ в небесных телах умноженному на корень третьей степени из массы небесного тела. Символом $_{bh}$ обозначим тело с промежуточной массой и плотностью. Обозначим небесное тело, для которого реализуется экстремум символом $\otimes$. Максимуму этого отношения реализуется на теле, имеющем 3 массы Солнца. Тогда плотность черной дыры должна удовлетворять условию $\frac{\rho_\otimes}{c_\otimes^6} > \frac{\rho_{bh}}{c^6} > \frac{\rho_\otimes M_\otimes^2}{c_\otimes^6 M_{cr}^2} = \frac{\rho_\otimes}{c^6}$, где используется скорость звука на экстремальном теле $c_\oplus$, плотность вещества экстремального тела $\rho_\otimes$ и скорость света в черной дыре. Тогда планеты Солнечной системы, плотность которых сравнима с плотностью Солнца, не образуют черную дыру, так как их масса мала. Максимальная масса черной дыры будет удовлетворять условию, быть больше в $(\frac{c}{c_\otimes})^3$ раз экстремальной массы $M_\otimes$, равной 3 массам Солнца, при этом плотность черных дыр больше плотности экстремального тела.

При этом в небесных телах распространяются гравитационное поле со скоростью света в вакууме и звуковое поле. Можно получить формулы, определяющую скорость возмущения для тел больше экстремальной плотности и меньшей экстремальной плотности.

$$\frac{1}{C^2} = \frac{1}{c_{Fe.m.}^2} + \frac{\exp(-2q_s / e)}{C^2} = \frac{1}{c_{Fe.m.}^2} + \frac{\exp(-2\sqrt{\rho}\nu^2 / Ce)}{C^2}. \qquad (1)$$

Где звуковой заряд частицы определяется по формуле $q_s = \sqrt{\rho}\nu^2 / C$, где используется плотность среды, ее кинематическая вязкость, и скорость возмущения в неподвижной среде. При показателе экспоненты не равном нулю, скорость возмущения меньше чем скорость электромагнитной волны. При плотности материи много больше экстремальной, что соответствует нижнему, скачкообразно образующемуся, пределу массы черной дыры, определяется фазовая скорость немного меньше скорости электромагнитных волн. Тогда гравитационный радиус определяется скоростью электромагнитных волн. В вакууме определяется очень маленькая скорость распространения звуковых волн, с малой амплитудой давления и скорости среды. В случае плотности вещества, близкого к экстремальному, определяется стандартная скорость звуковых волн. При плотности равной нулю, скорость возмущения должна быть нулевой. Но при нулевой скорости возмущения, показатель экспоненты не нулевой. Поэтому существует минимум скорости звука в вакууме. Приближенное решение этого уравнения $C^2 = C_{Fe.m.}^2[1 - \exp(-2\sqrt{\rho}\nu^2 / C_{Fe.m.}e)]$. Для микромира данная формула не применима. Представляя формулу в виде $C = xC_{Fe.m.}^2[1 - \exp(-2\sqrt{\rho}\nu^2 x / e)], x = 1/C$, найдем минимум этой функции. Он равен

$$C = 2\sqrt{\rho}\nu^2 / [\exp(2\sqrt{\rho}\nu^2 / Ce) - 1]e = 2\sqrt{\rho}\nu^2 / [\exp(1) - 1]e.$$

Гравитационное поле от массивных тел и микрочастиц с большой плотностью энергии имеет большую плотность материи и в основном распространяется со скоростью света. Большая плотность энергии, получается, из-за большой массы, или малого радиуса у напряженности поля. В промежуточном случае, в окружающем нас мире гравитационное поле мало у не небесных тел большой массы плотность материи близка к экстремальной и возмущение распространяется со скоростью звука. Обладая малой плотностью гравитационной энергии и плотностью материи, близкой к экстремальной, они образуют электромагнитные волны и звуковые волны с малой амплитудой давления, малой скоростью среды и малой скоростью распространения. Считается, что звуковые волны не распространяются в вакууме, но это не так. Вакуум это разреженный газ, и плотность его очень малая, поэтому распространяется гравитационные волны со скоростью электромагнитной волны и очень малой скоростью звуковых волн $10^{-17} cm/s$. Просто параметры звуковых волн в вакууме малы, как и гравитационная энергия. Но в случае массы небесных тел меньше экстремальной массы, плотность близка к экстремальной. При этом статическое гравитационное поле распространяется с двумя разными скоростями, со скоростью света в вакууме и со звуковой скоростью.

Температура черной дыры согласно формуле Хокинга равна

$$kT = \frac{\hbar c^3}{8\pi G |m|}.$$

При этом критическая масса черной дыры $M_{cr}$. определяется по формуле

$$|M_{cr}| kT_\gamma = |m| kT = \frac{\hbar c^3}{8\pi G}.$$

Где температура частиц вакуума определяется по формуле $kT_\gamma = m_\gamma c^2$ см. [3].

Тогда максимальная масса черной дыры, соответствующая частицам вакуума с электромагнитным взаимодействием, равняется

$$|M_{cr}|=|M_{\max}|=\frac{\hbar c}{8\pi G|m_{\gamma\min}|}=\frac{\hbar c}{8\pi G\cdot|m_{\gamma\min}|M_s}M_s=4.09\cdot 10^{10}M_s$$

$$|M_{\min}|=\frac{\hbar c}{8\pi G|m_{\gamma\max}|}=\frac{\hbar c}{8\pi G\cdot|m_{\gamma\max}|M_s}M_s=10.4M_s$$

Данные формулы имеют не правильный коэффициент, надо дополнительно разделить их на 3.46. Тогда получим формулы для минимальной и критической массы черных дыр

$$|M_{cr}|=|M_{\max}|=\frac{\hbar c}{8\cdot 3.46\pi G|m_{\gamma\min}|}=\frac{\hbar c}{8\cdot 3.46\pi G\cdot|m_{\gamma\min}|M_s}M_s=1.15\cdot 10^{10}M_s$$

$$|M_{\min}|=\frac{\hbar c}{8\cdot 3.46\pi G|m_{\gamma\max}|}=\frac{\hbar c}{8\cdot 3.46\pi G\cdot|m_{\gamma\max}|M_s}M_s=3M_s$$

Где масса считается по формуле см.[5] стр.17-18

$$m_{\gamma k}=(-i\rho_\gamma r_\gamma^3 d_k\frac{\hbar}{cr_\gamma})^{1/2}(-\frac{137i\rho_\gamma r_\gamma^4 c^2 d_k}{e^2})^{\frac{1}{4k}}$$

$$,r_\gamma=\frac{e^2}{c^2 m_e},\rho_\gamma=10^{-29}g/cm^3;d_k=6\sqrt{2}\pi[\frac{(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}]^{\frac{2}{2k+1}}$$

Где масса частицы вакуума равна $m_{\gamma\min}=2.2\cdot 10^{-55}g;m_{\gamma\max}=8.684\cdot 10^{-45}g$, используется масса Солнца $M_s$. Отношение максимальной массы черной дыры к массе Солнца определено верно. Минимальное значение массы частиц вакуума - мультиполей, являющееся диполем, построенным из электрона и позитрона. Оно определяет максимальную массу черной дыры, построенной для действительных значений метрического тензора гравитационного поля. Начиная с критического размера параметры черной дыры, могут стать комплексными. Как и в гидродинамики существует критическое число Рейнольдса, так и в общей теории относительности существует критический параметр, определяемый критической массой. Но согласно этой формуле минимальная масса частицы вакуума определяет максимальную массу черной дыры. Но минимальная масса имеется у частиц вакуума, созданных с помощью электромагнитного взаимодействия. Идеальные массы частиц вакуума см. [4], имеют более малую массу и созданы на основе гравитационного взаимодействия. Масса идеальных частиц вакуума определяется по формуле $m_\alpha = m_{\gamma 1}(\frac{m_e\sqrt{G}}{e})^\alpha = m_{\gamma \min}(\frac{m_e\sqrt{G}}{e})^\alpha$. Для данного сорта частиц критическое значение параметра равно

$$|M_\alpha| = \frac{\hbar c e^\alpha}{8\cdot 3.46\pi G\,|m_{\gamma\min}|\,(m_e\sqrt{G})^\alpha}\ \lim_{\alpha\to\infty}|M_\alpha| = \infty$$

Получается, что созданная максимальная масса черной дыры не имеет верхнего предела, и при параметре $\frac{\hbar c}{8\cdot 3.46\pi G m_{\gamma\min}|M_\alpha|} < 1$ строится на других принципах гравитационного поля. Пространство и время внутри черной дыры является мнимым с огромной плотностью.

Существует формула для метрического тензора $g_{rr} = 1/(1-\frac{r_g}{r})$, которая справедлива вне гравитационного радиуса. При этом гравитационный радиус, как и всякий радиус изменяется по закону $r_g\sqrt{g_{rr}}$. При этом можно получить формулу, справедливую и внутри черной дыры.

$$g_{rr} = 1/[1-\frac{1}{\sqrt{r^2/r_g^2+(\frac{\hbar c}{8\pi G m_{\gamma\min}|M_\alpha|})^4}}] = 1/(1-\frac{1}{\sqrt{r^2/r_g^2+1/p^4}}),\in$$
$$p = \sqrt{1+\sqrt{-4\lambda\sqrt{2}}}\in[1,\infty];\ \lambda = 1-\frac{|M_\alpha|}{|M_{cr}|}\in[0,-\infty];\ |M_\alpha|\in[|M_{cr}|,\infty].$$

Для получения новой формулы для значения метрического тензора, вместо радиуса нужно использовать величину регуляризации радиуса во всех формулах при условии $p > 1$, при меньших значениях параметра нужно положить $p = 1$ в формуле для радиуса $\sqrt{r^2+r_g^2(\frac{\hbar c}{8\cdot 3.46\pi G m_{\gamma\min}|M_\alpha|})^4} == \sqrt{r^2+r_g^2(\frac{|M_{cr}|}{|M_\alpha|})^4} = \sqrt{r^2+r_g^2/p^4}$. При малой массе черной дыры метрический тензор положительный и можно спокойно извлекать корень из положительного метрического тензора. При массе черной дыры больше критической существует значения радиуса внутри черной дыры, когда метрический тензор отрицательный и гравитационный радиус комплексный. Радиус, с которого начинаются комплексные параметры $g_{rr} \to \infty, g_{00} = 0$, равен $r^2 / r_{gcr}^2 = 1 - (\frac{\hbar c}{8\pi G m_{\gamma \min} \mid M_\alpha \mid})^2 = 1 - 1/p^2$.

Комплексная плотность черной дыры равна

$$
\begin{gathered}
\rho^* = \{\frac{c^6}{8G^3 \mid M_\alpha \mid^2} + i\frac{c^6}{8G^3 M^2 [1 - (\frac{\hbar c}{8\pi G m_{\gamma \min} \mid M_\alpha \mid})^2]^{3/2}} \times \\
\times [(\frac{8 \cdot 3.46\pi G m_{\gamma \min} \mid M_\alpha \mid}{\hbar c})^2 - 1]^{3/2}\} / \sqrt{2} = \\
= \frac{(8 \cdot 3.46\pi m_{\gamma \min})^2 c^4}{8G\hbar^2}(\frac{1}{p^2} + ip) / \sqrt{2} = \\
= \frac{c^6}{8G^3 \mid M_{cr} \mid^2}(\frac{1}{(1 + \sqrt{-4\lambda\sqrt{2}})} + i\sqrt{1 + \sqrt{-4\lambda\sqrt{2}}}) / \sqrt{2} = \\
= 0.008131(\frac{1}{(1 + \sqrt{-4\lambda\sqrt{2}})} + i\sqrt{1 + \sqrt{-4\lambda\sqrt{2}}}) / \sqrt{2} g / cm^3, \lambda = 1 - \frac{\mid M_\alpha \mid}{\mid M_{cr} \mid}
\end{gathered} \quad . \quad (1)
$$

Эта формула приближенная, при допущении, что мнимая плотность черной дыры при увеличении радиуса является неизменной и равна плотности в центре дыры. Формула (1) применима при условии $p > 1$ и строится на других принципах гравитационного поля, которое становится комплексным и, значит, описывает турбулентный режим. Критическое значение параметра $p = 1$. При скачке фазы массы черной дыры, ее модуль плотности непрерывен в критической точке. При условии $p = \sqrt[6]{2}$ модуль плотности черной дыры имеет минимум. Мнимая плотность черной дыры является растущей функцией параметра $p > 1$. При массе черной дыры, равной $\lambda = 10^5$ получаем мнимую плотность порядка $57.5 g / cm^3$ и далее плотность растет. При массе черной дыры, равной $p = 2$ получаем мнимую плотность порядка

$1.1\cdot 10^{-2}g/cm^3$. При массе равной критической $p=\dfrac{\hbar c}{8\cdot 3.46\pi G m_{\gamma\min}|M_{cr}|}=1$ получаем мнимую плотность $5.75\cdot 10^{-3}g/cm^3$, но эта плотность получена для бесконечно тонкого слоя при нулевом радиусе области с мнимым радиусом. Общая формула для плотности черной дыры равна

$$\rho^*=\begin{cases}\dfrac{c^6}{8G^3|M_{cr}|^2}(\dfrac{1}{p^2}+ip)/\sqrt{2}, p=\sqrt{1+\sqrt{-4\lambda\sqrt{2}}}>1, \lambda=1-\dfrac{|M_\alpha|}{|M_{cr}|}\\ \dfrac{c^6}{8G^3|M_{cr}|^2\ p^2}, 3\cdot 10^{-10}.4=\dfrac{M_\otimes}{|M_{cr}|}<p=\sqrt{1-\sqrt{-4\lambda\sqrt{2}}}<1; \lambda=\dfrac{|M_\alpha|}{|M_{cr}|}-1\end{cases}, (2)$$

Т.е. плотность черной дыры в центре с ростом массы черной дыры растет. Определение комплексных параметров см. [3]. Плотность становится мнимой, что означает колебание объема. Вначале колебания начинаются только внутри черной дыры при малых радиусах при комплексной плотности, но постепенно радиус черной дыры растет с ростом массы и колеблется. Режим черной дыры турбулентный, так как описывается комплексным радиусом. Но радиус является мнимым внутри части черной дыры, вне ее радиус действительный.

Физический смысл комплексной плотности, это ее модуль $|\rho|=0.008131\sqrt{\dfrac{1}{\lambda^4}+\lambda^2}$, который неограниченно растет с ростом массы черной дыры. При этом действительная часть плотности стремится к нулю. Но масса черной дыры неограниченно растет. В силу приближенности формулы для комплексной плотности черной дыры плотность меняется скачкообразно. Тогда фаза скачкообразно изменяющейся критической массы, считаемая по формуле

$$M_{cr}^*=\frac{c^3}{\sqrt{|\rho_{cr}^*|(2G)^3}}\exp(i\arg\rho/2)=\frac{c^3}{\sqrt{|\rho_{cr}^*|(2G)^3}}\exp(-i\arg M_{cr})=|M_{cr}|\exp(-i\arg M_{cr})$$

Эта формула работает только для критической массы, при увеличении массы более критической формула не работает. Скачкообразно изменившаяся фаза черной дыры определится из равенства

$$\arg M_{cr} = \pi / 8$$

Фаза критической массы черной дыры определяет отношение темной энергии к темной материи

$$\pi / 2 - \arg M_{cr} = \arg m^{*}_{\gamma \min} = -\arctan \frac{\operatorname{Im} m_{\gamma \min}}{\operatorname{Re} m_{\gamma \min}} = 3\pi / 8, \tan 3\pi / 8 = \cot \pi / 8 = 2.41,$$

при экспериментальном значении 2.55 см. [5] стр. 18. Правильное соотношение между критической массой и массой частиц вакуума $\arg M_{cr} + \arg m^{*}_{\gamma \min} = \pi / 2$. Формула для критической массы должна выглядеть таким образом $M_{cr} m^{*}_{\gamma \min} = i \frac{\hbar c}{8\pi G}$. При взаимодействии двух комплексных масс черной дыры возможна как положительная, так и отрицательная действительная часть. Значит, возможно, как притяжение, так и отталкивание небесных тел большой массы. В случае отталкивания небесных тел, это уже не притягивающая черная дыра. Но при взаимодействии с действительной массой, перемножаются действительные части, а мнимая часть дает ноль, так как имеется и комплексно сопряженное решение. Черная дыра может собирать частицы действительной массы.

Критерием отталкивания является условие $\operatorname{Re} M_1 \operatorname{Re} M_2 - \operatorname{Im} M_1 \operatorname{Im} M_2 < 0$, так как мнимая часть коэффициента взаимодействия линейна по мнимой части массы и при взятии комплексно сопряженной величины определяет ноль мнимой части. Решением задачи является и комплексно сопряженная величина. Произведение мнимых частей при взятии комплексно сопряженной величины определяет равную величину и произведение мнимых частей определяет конечную величину, как и произведение действительных частей. Причем произведение мнимых частей может быть либо положительно, либо отрицательно, так же как притягиваются или отталкиваются заряды разного или одинакового знака.

Подсчитаем, чему равна масса черной дыры при условии $p > 1$

$$M^* = |M_{cr}| + \frac{c^6 r_{gcr}^3}{8G^3 |M_{cr}|^2} \int_1^p [\frac{1}{p^4} + ip(1 - 1/p^2)] p^2 dp / \sqrt{2} =$$

$$= |M_{cr}| + |M_{cr}| [-1/\sqrt{1 + \sqrt{4\lambda\sqrt{2}}} + 1/\sqrt{2} - i\lambda]; \frac{\mathrm{Im} M}{|M_{cr}|} + 1 = \lambda = 1 - \frac{|M_\alpha|}{|M_{cr}|}$$

$$p^4 - 2p^2 + 1 = -4\lambda\sqrt{2}, p = \sqrt{1 + \sqrt{-4\lambda\sqrt{2}}}; \lambda < 0; \mathrm{Im} M = -|M_\alpha| < -|M_{cr}|$$

Сила взаимодействия между черной дырой и действительной массой $m$ определяется действительной частью массы черной дыры, так как вклад мнимой части в гравитационную силу пропорционален линейной мнимой части, и так как имеется комплексно-сопряженное значение решения вклад мнимой части нулевой. Итого получаем гравитационную силу, равную $F = \frac{Gm |M_{cr}| (1 + 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{1 + \sqrt{-4\lambda\sqrt{2}}})}{r^2}$. При массе черной дыры, стремящейся к бесконечности, гравитационная сила определяется критической массой.

Из формулы (2) можно вычислить экстремальную скорость

$$c_\otimes = c \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 3.46 \pi G m_{\gamma \min} M_\otimes}{\hbar c}} = c \sqrt[3]{\frac{M_\otimes}{M_{cr}}} = c \sqrt[3]{\frac{3M_s}{M_{cr}}} = c \sqrt[3]{3 \cdot 10^{-10} / 1.15} = 1.92 \cdot 10^7 cm/s = 192 km/s$$

Интеграл от нормального ускорения определяется по нормальной компоненте мнимой скорости, по формуле (действительная постоянная поступательная скорость соответствует бесконечному радиусу кривизны)

$$V_{nl} - V_{nl}^0 = \int_{\tau_0}^{\tau} w_{nl}(u)du = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{n_l(u)(|\mathbf{V}_{\mathrm{Im}}|^2 + \mathbf{V}_{\mathrm{Re}}{}^2)}{\rho(u)} du = \int_{s_0}^{s} (|\mathbf{V}_{\mathrm{Im}}(u)| \frac{n_l(u)}{\rho(u)} + \frac{\mathbf{V}_t{}^2}{\rho_\infty}) ds =$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau} |\mathbf{V}_{\mathrm{Im}}| dt_l = \begin{cases} |\mathbf{V}_{\mathrm{Im}}| [t_l(\tau) - t_l(\tau_0)], |\mathbf{V}_{\mathrm{Im}}| = const; \dfrac{n_l(u)}{\rho(u)} = \dfrac{dt_l}{ds} \\ \displaystyle\int_{\tau_0}^{\tau} |\mathbf{V}_{\mathrm{Im}}| dt_l, |\mathbf{V}_{\mathrm{Im}}| \neq const \end{cases},$$

$$V_{\mathrm{Im}\,l}(\tau) = |\mathbf{V}_{\mathrm{Im}}| t_l(\tau)$$

$$\sum_{k=1}^{3} [V_{tk}^2(u) + V_{nk}^2(u)] = \sum_{k=1}^{3} [V_{tk}^2(u) + V_{k\,\mathrm{Im}}^2(u)] = |\mathbf{V}|^2$$

Докажем равенство

$$\mathrm{Im}\, x_l(\tau) = \mathrm{Im}\, r t_l(\tau)$$

Для этого вычислим разность

$$\mathrm{Im}\, x_l(\tau) - \mathrm{Im}\, x_l(\tau_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathrm{Im}\, r n_l d\varphi = \int_{s_0}^{s} \frac{\mathrm{Im}\, r n_l}{\rho} ds = \int_{s_0}^{s} \mathrm{Im}\, r dt_l = \mathrm{Im}\, r[t_l(\tau) - t_l(\tau_0)]$$

Тогда справедливо

$$\frac{\mathrm{Im}\, x_l}{V_{\mathrm{Im}\,l}} = \frac{\mathrm{Im}\, r}{\mathrm{Im} V}; \mathrm{Im}\, r = const; |V_{\mathrm{Im}}| = const.$$

В случае переменной скорости и радиуса данная формула не работает.

Мнимая часть скорости определяет частоту вращения, равную мнимой компоненте скорости, деленной на мнимую координату. Справедлива формула

$$\mathbf{V} = [\mathbf{w}, \mathbf{r}]$$

Справедливы равенства

$$u_{1\mathrm{Re}}=V_1^0, u_{1\mathrm{Im}}=\omega_2 \operatorname{Im} x_3-\omega_3 \operatorname{Im} x_2=\operatorname{Im} x_3 \operatorname{Im} V_2 / \operatorname{Im} x_2-\operatorname{Im} x_2 \operatorname{Im} V_3 / \operatorname{Im} x_3$$
$$u_{2\mathrm{Re}}=V_2^0, u_{2\mathrm{Im}}=\omega_3 \operatorname{Im} x_1-\omega_1 \operatorname{Im} x_3=\operatorname{Im} x_1 \operatorname{Im} V_3 / \operatorname{Im} x_3-\operatorname{Im} x_3 \operatorname{Im} V_1 / \operatorname{Im} x_1$$
$$u_{3\mathrm{Re}}=V_3^0; u_{3\mathrm{Im}}=\omega_1 \operatorname{Im} x_2-\omega_2 \operatorname{Im} x_1=\operatorname{Im} x_2 \operatorname{Im} V_1 / \operatorname{Im} x_1-\operatorname{Im} x_1 \operatorname{Im} V_2 / \operatorname{Im} x_2$$
$$\operatorname{Im} V=\operatorname{Im}\sqrt{(\frac{dr}{dt})^2+r^2(\frac{d\theta}{dt})^2+r^2\sin^2\theta(\frac{d\varphi}{dt})^2}=\operatorname{Im}\sqrt{(\frac{dx_1}{dt})^2+(\frac{dx_2}{dt})^2+(\frac{dx_3}{dt})^2}$$
$$\operatorname{Im} V_l=\operatorname{Im} Vt_l; \operatorname{Im} x_l=\operatorname{Im} ru_l$$
$$\omega_l=\frac{\operatorname{Im} V_l}{\operatorname{Im} x_l}; u_l=\sqrt{u_{l\mathrm{Re}}^2+u_{l\mathrm{Im}}^2};$$

В случае постоянной скорости и частоты имеем уравнение относительно комплексных координат

$$\omega^2=\sum_{l=1}^{3}\omega_l^2=\sum_{l=1}^{3}(\frac{\operatorname{Im} V_l}{\operatorname{Im} x_l})^2 \quad |\operatorname{Im} x_l|>|\operatorname{Im} V_l|/\omega \tag{3}$$

Обратная величина мнимой координаты образует эллипс. Уравнение записано относительно отношения мнимых координат, которые имеют большое значение, но эти отношения меняются в широких пределах. Поэтому мнимая скорость может достигать больших значений.

Приведенная масса является комплексной и равна $\mu=\frac{Mm}{M+m}$. Тогда параметры эллипса $p,e$ являются комплексными. Угол $\varphi$ является действительным. При работе с комплексными параметрами надо знать два пункта. Существуют комплексные макропараметры и микропараметры. Комплексные макропараметры получаются из решения нелинейного уравнений. Микропараметры, это шероховатость поверхности. Под комплексными значениями макропараметров понимается колебание с постоянной амплитудой и частотой, определяемой мнимой скоростью. Под комплексными микропараметрами понимается влияние шероховатости, имеющее случайное значение, и проявляющееся в виде коэффициентов при мнимых макропараметрах. На действительные макропараметры микропараметры не действуют, действительное ламинарное решение не зависит от микропараметров. Усреднять микропараметры надо в действительной плоскости, так как для действительных макропараметров линейные микропараметры являются мнимыми и ламинарное решение усреднять не надо. Для мнимых макропараметров линейные мнимые микропараметры являются действительными и их модули надо усреднять, что проявляется в образовании коэффициентов при мнимой части макропараметров. Комплексная масса является макропараметром и означает колебание массы вокруг среднего действительного значения с амплитудой равной мнимому значению и частотой, определяемой мнимой скоростью.

Так радиус определяется как величина поступательной скорости, определяющее движение за счет действительной скорости плюс вращение, определяемое мнимыми параметрами

$$u_{x\mathrm{Re}} = V_x^0; u_{x\mathrm{Im}} = -\omega_z \operatorname{Im} y = -\operatorname{Im} y \operatorname{Im} V_z / \operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} y \operatorname{Im} V / \operatorname{Im} r = -\sin\varphi \operatorname{Im} V$$
$$u_{y\mathrm{Re}} = V_y^0; u_{y\mathrm{Im}} = \omega_z \operatorname{Im} x = \operatorname{Im} x \operatorname{Im} V_z / \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} x \operatorname{Im} V / \operatorname{Im} r = \cos\varphi \operatorname{Im} V; \omega_z = \omega = \operatorname{Im} V / \operatorname{Im} r$$

При этом в силу формулы (3) мнимые координаты имеют большое значение, вплоть до бесконечности. Отношение мнимых координат тоже может стремиться к бесконечности. Это снижает ценность алгоритма с комплексной скоростью до нуля. Но комплексное решение следует из рассмотрения задачи. На самом деле такая ситуация не возникает. Зная модуль частоты вращения, можно вычислить его проекции. Имеем следующие формулы

$$\operatorname{Im} V = \operatorname{Im} \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$
$$\omega = \omega_z = \frac{\operatorname{Im} V}{\operatorname{Im} r}; \omega_x = \frac{\operatorname{Im} V_x}{\operatorname{Im} x}; \omega_y = \frac{\operatorname{Im} V_y}{\operatorname{Im} y};$$
$$\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

Эти формулы на прямую применимы в случае вращения с действительной массой по окружности. При малом отличии траектории от окружности они тоже применимы.

При этом параметры определятся по формуле с комплексной приведенной массой

$$\alpha = G[\operatorname{Re} M \operatorname{Re} m - \operatorname{Im} M \operatorname{Im} m + i(\operatorname{Re} M \operatorname{Im} m + \operatorname{Im} M \operatorname{Re} m)]$$

$$p = \frac{M^2}{\mu|\alpha|}, e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{\mu\alpha^2}}$$

Величина радиуса имеет комплексное значение $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\varphi}$.

Действительные координаты траектории определятся по формуле

$$X_{\mathrm{Re}} = \operatorname{Re}\frac{p}{1 + e\cos\varphi}\cos\varphi;$$

$$X_{\mathrm{Im}} = -\int_0^t \operatorname{Im} y(u)\frac{\operatorname{Im} V(u)}{\operatorname{Im} r(u)}du = -\int_0^t \sin\varphi \operatorname{Im} V(u)du = -\int_0^\varphi \sin\varphi \operatorname{Im}\sqrt{(\frac{dr}{d\varphi})^3 + r^2}\,du$$

$$Y_{\mathrm{Re}} = \operatorname{Re}\frac{p}{1 + e\cos\varphi}\sin\varphi;$$

$$Y_{\mathrm{Im}} = \int_0^t \operatorname{Im} x(u)\frac{\operatorname{Im} V(u)}{\operatorname{Im} r(u)}du = \int_0^t \cos\varphi \operatorname{Im} V(u)du = \int_0^\varphi \cos\varphi \operatorname{Im}\sqrt{(\frac{dr}{d\varphi})^3 + r^2}\,du$$

В случае действительных масс радиус является действительный, добавки к движению по эллипсу равны нулю и получаем обычную траекторию вращения по эллипсу.

$$X_{\mathrm{Im}} = \int_0^\varphi \sin\varphi \operatorname{Im}\sqrt{(\frac{dr}{d\varphi})^2 + r^2}\,du = -\operatorname{Im}\int_0^\varphi \sqrt{\frac{e^2 p^2 \sin^2\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^4} + \frac{p^2}{(1 + e\cos\varphi)^2}}\,d\cos\varphi =$$

$$= -\operatorname{Im} p\int_1^{\cos\varphi} \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2ex}}{(1 + ex)^2}dx = -8p\sqrt{1 + e^2}\int_{\sqrt{(1+e)^2/(1+\varepsilon^2)}}^{\sqrt{1+\frac{2e}{1+e^2}\cos\varphi}} \frac{y^2 dy}{[1 - e^2 + (1 + e^2)y^2]^2}$$

$$= -\frac{8p(1 - e^2)^{3/2}}{1 + e^2}\int_{\sqrt{\frac{1+e}{1-e^2}}}^{\sqrt{[1+\frac{2e}{1+e^2}\cos\varphi]\frac{1+e^2}{1-e^2}}} \frac{z^2 dz}{(1 + z^2)^2} =$$

$$= -\frac{8p(1 - e^2)^{3/2}}{1 + e^2}[\frac{1}{2}\arctan z - \frac{\sin(2\arctan z)}{4}] =$$

$$= -\frac{8p(1 - e^2)^{3/2}}{1 + e^2}[\frac{1}{2}\arctan\sqrt{[1 + \frac{2e}{1 + e^2}\cos\varphi]\frac{1 + e^2}{1 - e^2}} - \frac{\sin(2\arctan\sqrt{[1 + \frac{2e}{1 + e^2}\cos\varphi]\frac{1 + e^2}{1 - e^2}})}{4}]$$

Вычислим следующий интеграл

$$Y_{\mathrm{Im}} = \int \cos\varphi \,\mathrm{Im}\sqrt{(\frac{dr}{d\varphi})^2 + r^2}\,du = \mathrm{Im}\, p\int \frac{\cos\varphi\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi}}{(1+e\cos\varphi)^2}\,d\varphi$$

Координата $X.Y$ меняются по закону

$$X^2 = [\mathrm{Re}\frac{p}{1+e\cos\varphi}\cos\varphi]^2 + \{\mathrm{Im} - \frac{8p(1-e^2)^{3/2}}{1+e^2}[\frac{1}{2}\arctan\sqrt{[1+\frac{2e}{1+e^2}\cos\varphi]\frac{1+e^2}{1-e^2}} - \frac{\sqrt{[1+\frac{2e}{1+e^2}\cos\varphi]\frac{1+e^2}{1-e^2}}}{4(1+e\cos\varphi)}]|_0^{\varphi}\}^2$$

$$Y^2 = \{\mathrm{Re}\frac{p}{1+e\cos\varphi}\sin\varphi\}^2 + \{\mathrm{Im}\, p\int_0^{\varphi}\frac{\cos\varphi\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi}}{(1+e\cos\varphi)^2}\,d\varphi\}^2$$

В случае эксцентриситета равного нулю, имеем движение не по окружности и радиус окружности равен сумме квадратов действительной и мнимой части

$$X^2 = (\mathrm{Re}\, p\cos\varphi)^2 + (\mathrm{Im}\, p)^2 0$$
$$Y^2 = (\mathrm{Re}\, p\sin\varphi)^2 + (\mathrm{Im}\, p)^2 \sin^2\varphi$$
$$R^2 = X^2 + Y^2 = (\mathrm{Re}\, p)^2 + (\mathrm{Im}\, p)^2\sin^2\varphi$$

Интересный вопрос, как меняется модуль энергии системы, остается ли он неизменным при вычислении с помощью комплексных параметров. Модуль энергии системы равен $E = \alpha\frac{1-e^2}{2p}$. Если считать энергию в комплексной плоскости, по формулам для действительной энергии, то получим закон сохранения энергии. Тогда энергия равна

$$E = \frac{mV_r^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} = \frac{L^2}{2mr^4}(\frac{dr}{d\varphi})^2 + \frac{(-\alpha)}{2p}(1+e\cos\varphi)^2 + \frac{\alpha}{p}(1+e\cos\varphi) =$$
$$= \frac{(-\alpha)p}{2r^4}(\frac{dr}{d\varphi})^2 + \frac{\alpha}{2p}(1-e^2\cos^2\varphi) = \frac{(-\alpha)e^2\sin^2\varphi}{2p} + \frac{\alpha}{2p}(1-e^2\cos^2\varphi) = \frac{\alpha}{2p}(1-e^2).$$

Но тогда надо использовать комплексные значения энергии, и брать от вычисленного значения энергии модуль.

Желательно получить действительные координаты, причем чтобы их энергия совпадала с вычисленным модулем энергии. Чтобы энергия сохранялась при эллиптическом движении в виде

$$E = \frac{mV_r^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} = \frac{L^2}{2mr^4}(\frac{dr}{d\varphi})^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} = \alpha\frac{(1-e^2)}{2p}$$

$$\int_{r_0}^{r} \frac{\frac{|L|}{r^2}dr}{\sqrt{2|m|E - \frac{|L|^2}{r^2} - \frac{|2\alpha||m|}{r}}} = \varphi - \varphi_0, E = \alpha\frac{1-e^2}{2p}, p = \frac{L^2}{m(-\alpha)}.$$

где скорость и радиус действительные. Тогда эти действительные координаты будут являться истинными действительными координатами, пересчитываемые из комплексных координат. Это выражение соответствует изменению значения радиуса, при вращении тел с использованием модуля всех комплексных коэффициентов.

Имеется три алгоритма вычисления траектории небесных тел с комплексной массой. Первый удовлетворяет уравнению сохранения энергии в комплексной форме и описывает не эллиптическое движение тел. Второй описывает действительное уравнение сохранения энергии, хотя параметры комплексные. Приведем график первого алгоритма.

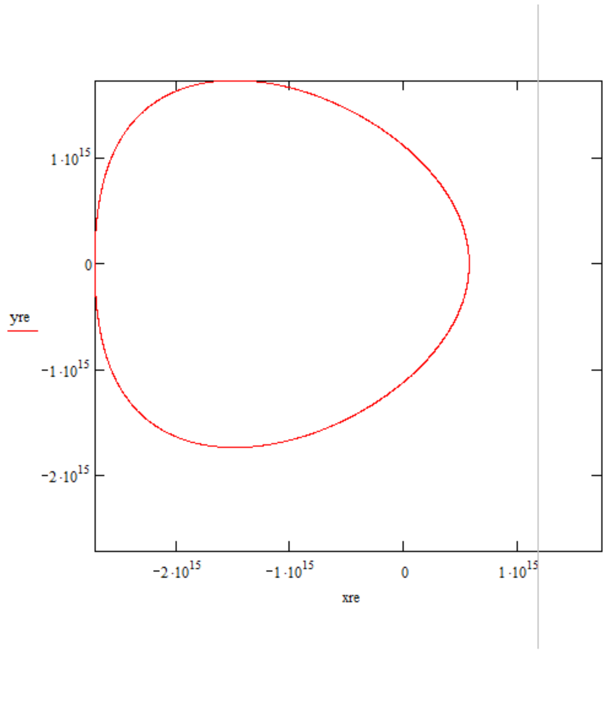

График определяют следующие значения параметров $e = 0.9 + 0.4i, |e| = 0.985$, $p = (1 + 0.5i)10^{15} cm$, $m = (4 + 0.5i)10^{33} g$, $\alpha = -Gm^2$.

Это алгоритмы с постоянной энергией тел с комплексной массой и периодической траекторией. Имеются алгоритмы с не периодической траекторией и как следствие увеличением энергии системы. Где энергия сообщается небесным телам при Большом взрыве. Они описываются формулами (1) и (2).

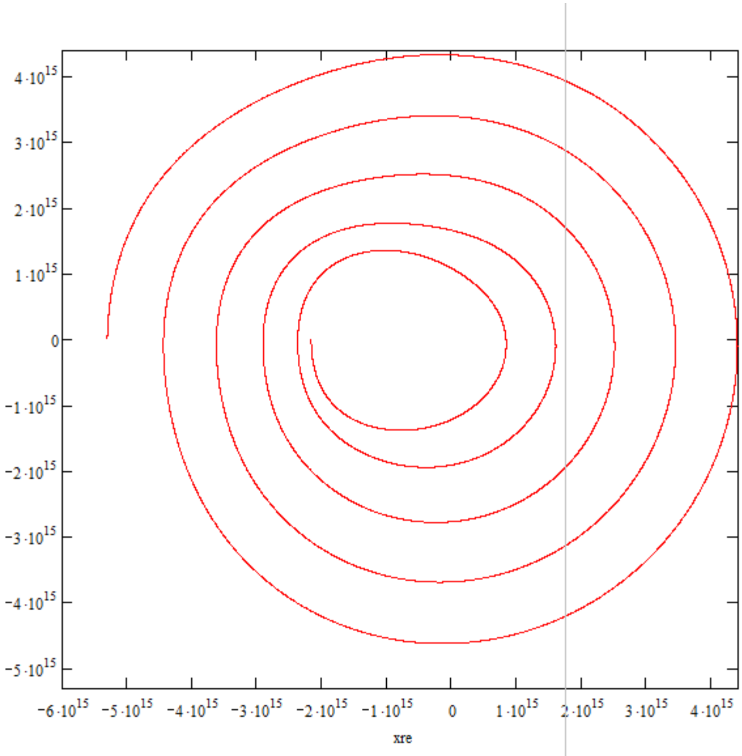


График определяют следующие значения параметров $e = 0.7 + 0.2i, |e| = 0.728$, $p = (1 + 0.1i)10^{15} cm$, $m = (4 + 0.01i)10^{33} g$, $\alpha = -Gm^2$.

Энергия системы, подсчитанная по этому алгоритму в первый момент времени по модулю больше вычисленной энергии системы по формуле $E = \alpha \dfrac{1 - e^2}{2p}$ и далее убывает по модулю, т.е. энергия системы растет и растет радиус системы. Это особенность полученных уравнений. Интеграл

$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi}}{(1+e\cos\varphi)^2}d\varphi$ не равен нулю, и при интегрировании по бесконечному верхнему пределу стремится к бесконечности. Т.е. энергия системы растет, убывая по модулю. Полная энергия системы стремится к нулю. Радиус системы стремится к постоянному большому значению, равному $r = \lim_{\varphi\to\infty} \frac{\varphi}{2\pi} \operatorname{Im} p \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi}}{(1+e\cos\varphi)^2}d\varphi$. Но при непрерывном изменении угла, увеличивается полная энергия системы, энергия из отрицательной становится равной нулю

$$E = \frac{(-\alpha)p}{2r^4}(\frac{dr}{d\varphi})^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} =$$

$$= \frac{(-\alpha)p}{2r^4}[\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im} p \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi}}{(1+e\cos\varphi)^2}d\varphi]^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} \to 0, r \to \infty$$

При этом эксцентриситет равен единице и получаем параболическое удаление небесного тела, что соответствует бесконечному радиусу системы. Согласно этому алгоритму энергия системы растет, и тело выталкивается на бесконечность. Этот алгоритм описывает движение небесных тел после Большого взрыва. Энергия сообщается небесным телам с комплексной массой и те удаляются на бесконечность.

Если первые два алгоритма описывают движение тел с постоянной энергией, то третий алгоритм действителен при сообщении энергии небесным телам.

## Выводы

Определена критическая масса черной дыры. Имеются черные дыры с большей массой, но они основаны на другом принципе. Внутренний радиус черной дыры становится мнимым. Выведена формула для комплексной плотности черной дыры. При массе черной дыры, стремящейся к бесконечности, его действительная часть стремится к нулю, а мнимая часть плотности линейно растет. Итого модуль плотности черной дыры с ростом массы черной дыры растет. Получена формула, описывающая плотность черной дыры при любой ее массе. Процессы при большой массе черной дыры оказались турбулентными, имеется мнимая часть плотности, которая означает колебание мнимого радиуса.

## Список литературы


1. King A. How big can a black hole grow?//Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters. – 2015. – Т. 456. - №.1. – С. L109 - L112
2. Якубовский Е.Г. Новые области использования звуковых волн в физических процессах. «Энциклопедический фонд России», 2018, 124 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1518201814.pdf
3. *Якубовский Е.Г.* ЧАСТИЦЫ ВАКУУМА, ОПИСЫВАЮЩИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И ПОЛЯ. Реферативный журнал «Научное обозрение», 2016, №2, http://science-review.ru/abstract/pdf/2016/2/662.pdf
4. Якубовский Е.Г. Частицы вакуума, обладающие свойствами сверхтекучей фазы явления сверхтекучести. «Энциклопедический фонд России», 2016, 4 стр. http://russika.ru/sa.php?s=1213
5. Якубовский Е.Г. Обобщение уравнений квантовой механики на величины 20 порядков меньшие часть 1. «Энциклопедический фонд России», 2017, 114стр. http://russika.ru/userfiles/390_1519062636.pdf