Точная формула рассеяния элементарных частиц

при образовании трех частиц

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Существует формула Резерфорда рассеяния электрона на электроне. Обобщим ее на рассеяние частиц с произвольной массой, в частности рассеяния фотона на электроне. Обобщение возможно и для релятивистского случая.

Выражение для амплитуды рассеяния частицы в заданном потенциале Кулона через сферические функции имеет вид см. [1]

$$f(\theta)=\frac{1}{2ik}\sum_{l}(2l+1)\frac{\Gamma(l+1+i/k)}{\Gamma(l+1-i/k)}P_l(\cos\theta)$$

Пусть имеем частицу массы m и с зарядом разных знаков относительно потенциала. Для них будет справедлива формула Резерфорда с амплитудой рассеяния

$$f(\theta)=-\frac{1}{2k^2\sin^2\theta/2}\frac{\Gamma(1+i/k)}{\Gamma(1-i/k)}\exp(-\frac{2i}{k}\ln\sin\theta/2).$$

Тогда уровни энергии системы определяются полюсами амплитуды рассеяния, и волновая функция затухает на бесконечности

$$E_s=\frac{k^2}{2}=-\frac{1}{2s^2}=-\frac{me^4}{2\hbar^2 s^2}.$$

Получим асимптотику волновой функции столкновения частицы и античастицы

$$\psi=\exp(ikz)+\frac{f(\theta)}{r}\exp(ikr).$$

В случае столкновения двух одинаковых частиц имеем в зависимости от суммарного четного или нечетного спина двух частиц, причем рассеяние без наличия полюса

$$\psi = \exp(ikz) \pm \exp(-ikz) + \frac{f(\theta) \pm f(\pi-\theta)}{r}\exp(ikr).$$

См. [1]. Где величина $k = \frac{p}{\hbar}$ образует две элементарные частицы с заданным импульсом в системе центра инерции. Причем энергии этих частиц одинаковы, так как рассматривается взаимодействие частиц с одинаковой массой. При столкновении двух частиц с одинаковой массой данная формула может описать образование трех частиц с нулевым суммарным импульсом

$$mc^2 - \frac{me^4}{2\hbar^2 s^2} = M_3 c^2 + \frac{p_3^2}{2M_3} = (M_1 + M_2)c^2 + \frac{p_1^2}{2M_1} + \frac{p_2^2}{2M_2}, p_3 = p_1 + p_2$$

Задача сводится к квадратному уравнению $\frac{p_1^2}{2M_1} + \frac{(\pm\sqrt{2\alpha M_3} - p_1)^2}{2M_2} = \beta; \pm\sqrt{2\alpha M_3} = p_3$, которое имеет 2 решения соответствующих одинаковым значениям квадратного корня. Приведем уравнения к безразмерному виду

$$\alpha = 1 - M_3 c^2 / (mc^2 - \frac{me^4}{2\hbar^2 s^2}) = 1 - \mu_3 > 0, \beta = 1 - (M_1 + M_2)c^2 / (mc^2 - \frac{me^4}{2\hbar^2 s^2}) = 1 - \mu_1 - \mu_2 > 0$$

Уравнение запишется в виде

$$\frac{q_3^2}{2\mu_3} = 1 - \mu_3; \frac{q_1^2}{2\mu_1} + \frac{q_2^2}{2\mu_2} = 1 - \mu_1 - \mu_2, q_k = \frac{p_k}{mc - \frac{me^4}{2\hbar^2 s^2 c}}$$

В самом деле при условии $\alpha = 0, \mu_3 = 4\mu_1 = 4\mu_2 = 1$, имеем $\mu_1 = 1/4, q_1 = 1/\sqrt{2}; q_2 = -1/\sqrt{2}; q_3 = 0$. При противоположном условии $\beta = 1 - \mu_1 - \mu_2 = 0$, получаем $q_1 = q_2 = 0 = q_3$. В промежуточном случае получаем малое значение всех трех значений импульса и энергии. Этот случай соответствует

$$\mu_3(1-\mu_3) = \gamma^2/2; \mu_3 = 1/2 \pm \sqrt{1/4 - \gamma^2/2};$$
$$\mu_1(1-\mu_1-\mu_2) = \mu_2(1-\mu_1-\mu_2) = 5\gamma^2; \mu_k = (1 \pm \sqrt{1-40\gamma^2})/4.$$

Тогда имеем квадратное уравнение $q_3 = \gamma; q_1^2 - \gamma q_1 - 49\gamma^2/2 = 0$, корни этого уравнения равны $q_1 = \gamma/2 \pm \gamma\sqrt{(1+49^2)/4}; q_2 = \gamma/2 \mp \gamma\sqrt{(1+49^2)/4}$ и получаются не релятивистские формулы для значения энергии рассеянных частиц

В случае рассеяния фотона на элементарной частице, надо воспользоваться выражением для энергии фотона $\hbar\omega_{nm} = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2}(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2})$, вычислив эффективную массу и заряд частицы $m_{eff} = \sqrt{m_e\hbar\omega_{nm}}/c; e_{nm}^2 = -\sqrt{\frac{2\hbar^3\omega_{nm}}{m_e(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2})}}$. Подставляя эти данные в формулу Резерфорда получим $E_{snm} = \hbar\omega_{snm} = -\frac{m_{eff} e^2 e_{nm}^2}{2\hbar^2 s^2}$ формулу для энергии образовавшейся $E_{snm} = \frac{\alpha m_e e^4}{2\sqrt{2}\hbar^2 s^2}\sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}}$

При не выполнении условия $\frac{\alpha}{s^2} = \sqrt{2/n^2 - 2/m^2}$, имеем

$$E_{snm} = \hbar\omega_s = \frac{\alpha}{s^2\sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{2}{m^2}}}\hbar\omega_{nm}.$$

И резонансное условие не выполняется. Разность между начальным и конечным значением энергии выделится в виде тепловой энергии. В системе центра инерции $\frac{m_e V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \hbar\omega_{nm}/c,, \frac{m_e U}{\sqrt{1 - U^2/c^2}} = \hbar\omega_s/c$ и выделившаяся энергия равна $Q = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - U^2/c^2}} + \hbar\omega_{nm} - \hbar\omega_s$. При выполнении условия $\frac{\alpha}{s^2} = \sqrt{2/n^2 - 2/m^2}$ тепловой эффект нулевой и энергия и импульс сохраняются и имеется резонансное рассеяние.

Зная энергию системы, можно определить ее импульс. Эту величину могут образовать три элементарные частицы с суммарным нулевым импульсом.

При взаимодействии фотона и элементарной частицы образуется фотон и элементарная частица.

При взаимодействии двух фотонов получается соотношение $\frac{\omega_s}{\omega_{nm}} = \frac{\alpha^2}{s^2}$. Оно приводит к образованию в системе центра инерции частицы и античастицы вдоль одной линии с энергией $E_{snm} = \frac{\alpha^2}{s^2}\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2})$.

Но формула Резерфорда не релятивистская, и справедлива при малых скоростях движения элементарных частиц. Она отличается от релятивисткой формулы энергии электрона и позитрона из двух гамма квантов $\hbar\sqrt{\omega_1\omega_2} = \hbar w = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}$ см. [2], причем разные частоты, соответствуют электронам, летящим навстречу друг другу. Причем получается $\frac{\hbar w - mc^2}{mc^2} = \frac{V^2}{2c^2} = \frac{E_{snm}}{mc^2} = \frac{\alpha^4}{2s^2}(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2})$, где величина частоты колебаний электрона w включает массу покоя электрона, а частота колебаний $E_{snm} = \hbar\omega_s = \frac{\alpha^2}{s^2}\hbar\omega_{nm} = \frac{\alpha^2}{s^2}\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2})$ не учитывает массу покоя электрона. Это условие эквивалентно $\hbar w = mc^2 + E_{snm}$.

Но образуется электрон-позитронная пара при условии $\frac{V}{c} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, когда выполняется условие $2\hbar\omega = 2\hbar\omega_0(1+1/2) = 3m_e c^2 = 2m_e c^2(1+1/2)$ и когда к энергии электронов добавляется энергия фазового перехода в жидкое состояние, образуемое электромагнитной волной. В результате наблюдается баланс энергий $\hbar\omega_0 = m_e c^2$. Величина значения скорости электронов $\frac{V}{c} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ является предельной. Полное сечение аннигиляции не равно нулю при нулевой скорости электрона и позитрона в системе центра инерции. Процесс аннигиляции электрона и позитрона начинается при нулевой скорости и завершается при скорости $\frac{V}{c} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Аналогично процесс образования электрона и позитрона из двух гамма квантов начинается при их нулевой скорости и заканчивается при скорости $\frac{V}{c}=\frac{\sqrt{5}}{3}$. На начальном участке роста скорости от нуля частота электромагнитного поля квантуется.

Совершенно аналогично из релятивистской точной формулы рассеяния электрона в поле неподвижного силового центра имеем волновую функцию в виде см. [2]

$$\psi = u_{\varepsilon p}\exp(ipz) + u'_{\varepsilon p'}\frac{f(\theta)}{r}\exp(ipr).$$

Диаграмма направленности определяется по формуле

$$\widehat{f}(\theta) = A + B\nu\sigma$$

Где величина $A(\theta)=\frac{1}{p}G(\theta)-i\frac{e^2 m}{p^2}F(\theta); B(\theta)=-\frac{i\tan\theta/2}{p}G(\theta)+\frac{e^2 m\cot\theta/2}{p^2}F(\theta)$.

Следующее значение функций

$$\begin{aligned}
&G(\theta)=\frac{i}{2}\sum_{l=1}^{\infty} l^2 C_l[P_l(\cos\theta)+P_{l-1}(\cos\theta)]\\
&F(\theta)=\frac{i}{2}\sum_{l=1}^{\infty} lC_l[P_l(\cos\theta)-P_{l-1}(\cos\theta)]\\
&C_\chi=-\frac{\Gamma(\gamma-i\nu)}{\Gamma(\gamma+1+i\nu)}\exp[i\pi(|\chi|-\gamma)]\\
&\gamma=\sqrt{\chi^2-\alpha^2};\nu=\alpha\varepsilon/p;p=\sqrt{\varepsilon^2-m^2}
\end{aligned}.$$

Полюс диаграммы направленности возникает при условии $\gamma+1+i\nu=-n_r+1$.

Энергия образовавшихся частиц равна $\varepsilon = m/\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{(n_r+\sqrt{\chi^2-\alpha^2})^2}}$. Зная энергию системы, можно определить ее импульс. Эта величина образуется двумя элементарные частицы с заданным противоположным импульсом, определяемым диаграммой направленности. Или в результате взаимодействия двух одинаковых частиц образуются три элементарные частицы. Уравнения для трех частиц в системе центра инерции, следующие

$$\varepsilon = \sqrt{p_3^2 + M_3^2} = \sqrt{p_1^2 + M_1^2} + \sqrt{p_2^2 + M_2^2}, p_3 = p_1 + p_2.$$

Задача сводится к нахождению корней полинома 4 степени и содержит два независимых корня.

В полюсе значение коэффициента имеет большое значение и равно большой величине, так как аргумент гамма функции мало отличается от отрицательного целого числа

$$C_\chi = -\frac{\Gamma(\gamma - i\nu)}{\Gamma[i\frac{e^2\varepsilon}{pc^2}(\frac{1}{\hbar - im\mu/\rho_m} - \frac{1}{\hbar}) - n_r]}\exp[i\pi(|\chi| - \gamma)] =$$
$$= -\frac{\Gamma(-n_r - 1 - 2i\frac{\alpha\varepsilon}{pc}\frac{1}{1 - im\mu/\hbar\rho_m})}{\Gamma[-\frac{\alpha\varepsilon}{pc}\frac{m\mu/\rho_m}{\hbar - im\mu/\rho_m} - n_r]}\exp[i\pi(|\chi| - \gamma)]; m\mu/\hbar\rho_m << 1 .$$

Где используется комплексная эффективная постоянная Планка с учетом вязкости среды $\hbar - im\mu/\rho_m$, где величина μ - это динамическая вязкость среды.

Аналогично из нелинейного уравнения можно определить частоту системы при рассеянии фотона на элементарной частице с образованием трех частиц и образование из двух фотонов частицы и античастицы.

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика Нерелятивистская теория т.III, Наука, М.,1969,768с.
2. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика, т.IV, М.,- «Наука»,1989 г., 727