Описание движения тел с большой сравнимой массой

с помощью ОТО

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Построение решения ОТО для двигающегося тела, это сложная задача. Решена задача движения тела малой массы в центрально симметричном поле. Получим из решения Шварцшильда, зависимость для произвольной скорости тела, при этом скорость из решения уйдет, но метрический тензор зависит от метрического интервала, который определяется. Тогда можно описать изменение метрического тензора в зависимости от изменяющихся координат с формулой аналогичной потенциалу Лиенара-Вихерта в электродинамике. Появится зависимость значения метрического тензора от определяемого значения метрического интервала. Таким образом можно описать движение нескольких тел с массами одного порядка. Теории СТО и ОТО имеют существенный недостаток. Их полная энергия равна нулю см. [2]. Но при зависимости метрического тензора от значения метрического интервала полная энергия не нулевая.

Справедливо решение Шварцшильда для значения метрического тензора при произвольных координатах. Также как решение для потенциала поля справедливо при любых координатах без учета запаздывания поля электромагнитного или гравитационного, аналогичная ситуация с решением Шварцшильда. Оно статическое. Следующим приближением в случае решения Шварцшильда является инвариантная относительно локального преобразования Лоренца формула. Она получается из формулы $r = s(1+\frac{r_g}{4s})^2, s = (\int dR_k, u^k) = (\int ds u_k, u^k) = s$, используется аналог формулы Лиенара-Вихерта, который справедлив в случае преобразования Лоренца,

$(\int dR_k, u^k) = (R_k, u^k)$, $\qquad A_p = \dfrac{eu_p}{(R_k, u^k)}, g_{00} = \dfrac{[1 - \dfrac{r_g}{4(R_k, u^k)}]^2}{[1 + \dfrac{r_g}{4(R_k, u^k)}]^2}$. Но в случае электромагнитного поля метрический интервал фиксирован, его приращение равно нулю, в случае гравитационного поля метрический интервал переменный и в результате получаем инвариантную формулу с метрическим интервалом см. [1].

$$g_{00} = \frac{(1 - \frac{r_g}{4s})^2}{(1 + \frac{r_g}{4s})^{2R}}, dl^2 = (1 + \frac{r_g}{4s})^4 [ds^2 + s^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]; s = (\int dR_k, u^k)$$

В результате имеем

$$ds^2 = \frac{(1 - \frac{r_g}{4s})^2}{[1 + (1 + \frac{r_g}{4s})^4][(1 + \frac{r_g}{4s})^{2R}} c^2 dt^2 - \frac{s^2}{[1 + (1 + \frac{r_g}{4s})^4]} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] =$$

$$= \frac{(1 - \frac{r_g}{4s})^2}{[1 + (1 + \frac{r_g}{4s})^4](1 + \frac{r_g}{4s})^2} c^2 dt^2 - \frac{s^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} \frac{1}{1 + (1 + \frac{r_g}{4s})^4} \times$$

$$\times (dx^2 \frac{y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2} + dy^2 \frac{x^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} dz^2); r = s(1 + \frac{r_g}{4s})^2$$

Причем величина метрического интервала учитывает запаздывание сигнала. В начальный момент времени она не равна нулю.

Но в ОТО и СТО очень часто энергия системы равна нулю см. [2] стр. 120-121. Докажем это на примере СТО. Имеется формула для Лагранжиана $L = -mc^2 \sqrt{g_{ik} \dfrac{dx^i}{ds} \dfrac{dx^k}{ds}} = -mc^2 \sqrt{(c\dfrac{\partial t}{\partial s})^2 - (\dfrac{\partial r}{\partial s})^2}$. При этом справедливо определение импульсов $\qquad p_0 c = \dfrac{\partial L}{\partial \dfrac{\partial ct}{\partial s}} = -\dfrac{mc^3 \dfrac{\partial t}{\partial s}}{\sqrt{(c\dfrac{\partial t}{\partial s})^2 - (\dfrac{\partial r}{\partial s})^2}}; \mathbf{p}c = \dfrac{\partial L}{\partial \dfrac{\partial r}{\partial s}} = \dfrac{mc^2 \dfrac{\partial r}{\partial s}}{\sqrt{(c\dfrac{\partial t}{\partial s})^2 - (\dfrac{\partial r}{\partial s})^2}}$.

Определяется Гамильтониан, равный нулю $H/c = p_0\frac{\partial ct}{\partial s} + \mathbf{p}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} - L/c = 0$. В книге [1] первый член энергии тела не учитывается, поэтому получили конечное значение энергии в рамках СТО $H/c = \frac{mc(\frac{\partial ct}{\partial s})^2}{\sqrt{(c\frac{\partial t}{\partial s})^2 - (\frac{\partial r}{\partial s})^2}} = \frac{mc\frac{\partial ct}{\partial s}}{\sqrt{1-(\frac{\partial r}{c\partial t})^2}}$, причем дифференцирование надо производить по величине времени, а не по метрическому интервалу. Но в случае общей теории относительности метрический тензор зависит от метрического интервала и производная от метрического тензора по метрическому интервалу не равна нулю, и энергия имеет конечное не нулевое значение. Если бы во всех случаях энергия равнялась нулю в случае СТО и ОТО, что связано с ковариантностью СТО и ОТО, то эти дисциплины не переходили бы в предельном случае в классические уравнения движения. Если же перейти к описанию метрического тензора в зависимости от метрического интервала, то энергия системы не равнялась бы нулю, но это не соответствует вычисленным статическим значениям метрического тензора в СТО и ОТО.

Тогда имеем значение символа Кристоффеля для произвольных тел. Рассмотрим случай двух тел. Имеем дифференциальное уравнение $\frac{du_l^k}{ds} = -\Gamma_{pq}^k u_l^p u_l^q; \frac{dx_l^k}{ds} = u_l^k$. Откуда имеем $u_l^k = u_l^k(s, x_{01}^p, u_{01}^p, x_{02}^p, u_{02}^p); x_l^k = x_l^k(s, x_{01}^p, u_{01}^p, x_{02}^p, u_{02}^p); k, p = 0,...,3; l = 1,2$. Причем метрический интервал s определится из условия $r(s) = s(1+\frac{r_g}{4s})^2; s = \frac{r(s)-r_g/2}{2} \pm \sqrt{(\frac{r(s)-r_g/2}{2})^2 - \frac{r_g^2}{16}}$, надо использовать решение квадратного уравнения со знаком плюс. Откуда получим рекуррентное соотношение

$$s_{n+1} = r(s_n, r_g); s_{n+1} = r(s_n) - r_g/2; s = \frac{r_g^2}{16[r(s)-r_g/2]}. \qquad (1)$$

Так как зависимость скорости и координаты от значения метрического интервала параметрическая, а полученная из решения дифференциального уравнения численная, необходимо уточнять на каждом шаге значение метрического интервала с помощью рекуррентных формул (1). Получим связь переменных начальных условий и координат и скорости. Две связанные системы координат, причем по начальным условиям определяется разная формула преобразования, зависящая от переменной s. Это преобразование из неподвижной системы координат с начальными условиями $u_{0l}^0 = \alpha, u_{0l}^k = 0, k = 1,...,3, l = 1,2$ в двигающуюся систему отсчета.

Но эти формулы справедливы для по крайней мере двух тел с разным символом Кристоффеля каждого тела, так как одно тело на себя действовать не может. Тогда скорости и координаты каждого тела зависят от начальных условий обоих тел. При этом так как символ Кристоффеля у разных тел разный, надо вводить и разный метрический тензор для каждого тела. Если использовать общий метрический тензор, то символ Кристоффеля будет действовать на собственное тело и образуется сингулярность.

В результате получится значение метрического тензора, зависящее от переменных координат в зависимости от значения метрического интервала.

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля т.II, Наука, М.,1973,564с.
2. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация, т.2 М.: Мир 1977г.