

Общее решение уравнения Навье-Стокса и уравнения Шредингера

с давлением или потенциалом

в виде полинома второй степени по трем переменным

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Уравнение Шредингера связано с уравнением Навье-Стокса. Получим из уравнения Шредингера уравнение Навье-Стокса в декартовой системе координат. Получается первый интеграл уравнений Навье-Стокса. Определяются разделяющие константы в первом интеграле в случае декартовой системы координат по потенциальной энергии и определяется решение уравнений Навье-Стокса и Шредингера в новых условиях. Описано комплексное, турбулентное течение и ламинарное действительное течение в трубопроводах. Но описание профиля в виде полинома давления имеет свои проблемы. Надо задавать коэффициенты у формулы, описывающей давления. Также описано решение уравнения Шредингера. Получена зависимость координатной волновой функции от декартовых трехмерных координат. Вычислен орбитальный момент в координатном представлении. В случае отрицательной собственной энергии спин частиц описывается с помощью комплексной матрицы размерности два на два, в случае положительной собственной энергии матрицы имеют координатное представления. Матрица образует временное представление и три пространственных комплексных числа. Пространственные комплексные числа уточняют значение энергии, вычисленное с помощью декартовых координат.

Уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \psi$$

Вычислим потенциальное решение уравнения Навье-Стокса в декартовой системе координат. Если взять волновую функцию в виде

$$\psi(t, x_1, x_2, x_3) \exp(-iEt / \hbar) = \exp[-iEt / \hbar + \sum_{k=1}^3 \int_0^{x_k} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_k} dx_k],$$

то получим дифференциальное уравнение относительно логарифма волновой функции. Получаем первые интегралы уравнения Навье-Стокса

$$-E = -i\hbar \frac{\partial \ln \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{k=1}^3 \left[\left(\frac{\partial \ln \psi}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial x_k^2} \right] - U.$$

Получены первые интегралы уравнения Навье-Стокса, зависящие от трех переменных. Продифференцируем уравнение по координате, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n}{\partial t} &= \sum_{k=1}^3 \left[-V_k \frac{\partial V_n}{\partial x_k} + \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 V_n}{\partial x_k^2} \right] - \frac{\partial U}{m \partial x_n} \\ V_n &= \frac{-i\hbar}{m} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_n} \end{aligned}$$

Получим уравнение Навье-Стокса с кинематической вязкостью $\nu = \frac{i\hbar}{2m}$.

Волновая функция равна

$$\begin{aligned} \psi_k(t, x_1, x_2, x_3) \exp(-iEt / \hbar) &= \exp[-iEt / \hbar + \sum_{s=1}^3 \int_0^{x_s} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_s} dx_s + 2i \int_0^{x_k} \frac{\partial \ln A_k(u_k)}{\partial u_k} du_k] = \\ &= \exp[-iEt / \hbar + \sum_{s=1}^3 \int_0^{x_s} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_s} dx_s + \int_0^{x_k} \frac{\partial \ln C_k(u_k)}{\partial u_k} du_k] = \\ &= \exp(-iEt / \hbar) \psi(x_1, x_2, x_3) C_k(u_k), u_1 = x_2 + ix_3; u_2 = x_3 + ix_1, u_3 = x_1 + ix_2 \end{aligned}$$

Величина момента импульса равна $L_k = J_k \omega_k = m |u_k|^2 \omega_k$. Где волновая функция описывает координатную зависимость, а векторный потенциал $C_k(u_k)$ описывает изменение орбитального числа и спирального момента.

Вычислим величину ротора через одну комплексную переменную.

$$\begin{aligned}
 B_x &= \frac{\partial \operatorname{Re} \ln A_x(y+iz) + i \operatorname{Im} \ln A_x(y+iz)}{\partial z} - \frac{\partial \operatorname{Im} \ln A_x(y+iz) - i \operatorname{Re} \ln A_x(y+iz)}{\partial y} = \\
 &= i(-i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y})[\operatorname{Re} \ln A_x(y+iz) + i \operatorname{Im} \ln A_x(y+iz)] = 2i \frac{\partial \ln A_x(y+iz)}{\partial (y+iz)} = \frac{\partial \ln C_x(u_x)}{\partial u_x} \\
 L_x &= m \omega_x u_x^2 = m \omega_x \ln C_x(u_x), \quad \frac{\partial^2 L_x}{\partial u_x^2} = 2m \omega_x, \quad \omega_x = mc^2 / \hbar
 \end{aligned}$$

Величины координат рассматриваются безразмерные, для чего их надо умножить на ω/c . При этом величина векторного потенциала может иметь три проекции

$$\begin{aligned}
 U(u_l) &= c_0 + c_1 u_l + c_2 u_l^2, \sqrt{-(P_l - P_{l+1})} + a u_l + b + \sum_{s=1}^{n_r} \frac{1}{u_l - \beta_{sl}} = \\
 &= q_l = -i \frac{\partial \ln C_l}{\partial u_l}; C_l(u_l) = \prod_{s=1}^{n_r} (u_l - \beta_{sl}) \exp[-i(P_l - P_{l+1})t / \hbar + i a u_l^2 / 2 + i b u_l] = \text{при} \\
 &= \prod_{s=1}^{n_r} (-b/a + i \operatorname{Im} u_l - \beta_{sl}) \exp[-i(P_l - P_{l+1})t / \hbar - i a (\operatorname{Im} u_l)^2 / 2]
 \end{aligned}$$

действительных a, b . При комплексных a, b имеем $\operatorname{Im}(a u_l^2 / 2 + b u_l) = 0$, что приводит к уравнению $|u_l| = |b/a|$; $\arg u_l = \arctan \frac{\operatorname{Im} u_l}{\operatorname{Re} u_l} = \arg b - \arg a + 3\pi/2$.

Определяется фаза и модуль комплексного числа u_l при комплексных значениях a, b . При условии $\arg a = \arg b + k\pi$ комплексное число u_l не константа.

Данное решение для уравнения Навье-Стокса описывает классическую систему. Но волновая функция пропорциональна трем комплексным константам при комплексной фазе. При действительной фазе, т.е. координата должна удовлетворять условию $a x_2 + b = 0$ при величине x_3 произвольной получается волновая функция дополнительно зависит от мнимой координаты, при определяемой действительной координате.

Решение уравнения Навье-Стокса $a = \pm\sqrt{T_0 c_2}$, $b = [\pm\frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{-(E_l - E_{l+1})}]\sqrt{T_0}$,

$$E_l - E_{l+1} = T_0(c_0 - \frac{c_1^2}{4c_2} \mp \sqrt{c_2/T_0}) \text{ см. (4).}$$

В случае квантовой механики имеет физический смысл только одна проекция этого момента и координаты u_k описывают проекции этого момента. В самом

деле квадрат вектора вращения равен

$$V_i^2 = e_{ikl} w_k x_l e_{ipq} w_p x_q = (\delta_{kp} \delta_{lq} - \delta_{kq} \delta_{lp}) w_k x_l w_p x_q = w_k^2 x_l^2 - (w_k x_k)^2. \text{ Считаем, что все}$$

проекции частоты одинаковы, тогда модуль скалярного произведения равен

$$\begin{aligned} V_i^2 &= w^2 [2 \sum_{k=1}^3 x_k^2 - 2x_1 x_2 - 2x_2 x_3 - 2x_3 x_1] = w^2 \{ 2 \sum_{k=1}^3 x_k^2 + i[(x_1 + ix_2)^2 + (x_2 + ix_3)^2 + (x_3 + ix_1)^2] \} = \\ &= w^2 \sum_{k=1}^3 (2x_k^2 + iu_k^2) \end{aligned}$$

Так как частоты у всех импульсов совпадают, определяются все равные проекции на разные оси. Частоты совпадают, так как массы имеет единственное значение, а частота определяется по формуле $w = mc^2 / \hbar$.

Рассмотрим орбитальное и спиновое вращение элементарной частицы. В случае орбитального вращения потенциальная энергия состоит из одного безразмерного члена $U_l(u_{l0}) = T_0 u_{l0}^2$. Тогда имеем $a = \sqrt{T_0}$, $b = \sqrt[4]{T_0^3}$ при

выбранной положительной ветви квадратного корня. Коэффициенты a, b действительные, так как потенциальная энергия положительная. Значит имеем

действительную часть $\text{Re } u_{l0} = -\frac{b}{a} = -\sqrt[4]{T_0}$, равную константе, а мнимая часть

произвольная. Орбитальный момент описывается зависимостью от произвольных координат. Для вычисления спинового момента в

потенциальной энергии надо использовать все три члена

$$U_l(u_{l0}) = T_0 [(\text{Re } u_{l0})^2 + 2\text{Re } u_{l0} u_l + u_l^2]. \text{ Тогда при отрицательной энергии системы}$$

величина b комплексная, и обе переменные u_l фиксированные числа. Тогда

имеется 4 решения, с единичной функцией спина плюс зависимость от

орбитального момента, и три комплексные константы, определяющие спин частицы, при координатной волновой функции и координатном орбитальном моменте. В случае положительной собственной энергии, волновая функция спина описывается координатной волновой функцией.

Отметим, что квантовые числа $E_l - E_{l+1}, a, b, \text{Re } u_{l_0}$ плюс матрица спина. Состояние системы зависит от действительных констант, зависящих от $x_{1u} = kh, x_{2u} = ph, x_{3u} = qh$. Причем каждому состоянию соответствуют свои целые числа k, p, q и переход в другое состояние сопровождается изменением целых чисел.

В случае разных частот, т.е. матрицы массы, разной в разных ортогональных направлениях $w_k = m_k c^2 / \hbar$

$$V_i^2 = w_k^2 x_l^2 - (w_k x_k)^2 = w_k^2 x_l^2 - w_k^2 x_k^2 + \\ + i[(w_1 x_1 + i w_2 x_2)^2 + (w_2 x_2 + i w_3 x_3)^2 + (w_3 x_3 + i w_1 x_1)^2]$$

При этом сохраняется сумма квадратов проекции момента импульса, так как она коммутирует с оператором момента импульса, т.е. существует модуль момента импульса и его три проекции. Построение решения аналогично случаю одинаковых частот.

Оператор импульса коммутирует с оператором момента импульса $i \frac{\partial}{\partial x_k} i \frac{\partial}{\partial u_1} = i \frac{\partial}{\partial x_k} 2i \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - i \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = 2i \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - i \frac{\partial}{\partial x_3} \right) i \frac{\partial}{\partial x_k} = i \frac{\partial}{\partial u_1} i \frac{\partial}{\partial x_k}$. Также операторы момента импульса коммутируют между собой и с модулем оператора импульса. Но так как частота у разных проекций одинакова, получается одна величина проекции на любую ось.

Тогда уравнение Шредингера запишется в виде

$$-i\hbar \frac{\partial \ln \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{\partial \ln \psi}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{d^2 \ln \psi}{dx_k^2} + \left[\frac{\partial \ln C_k(u_k)}{\partial u_k} \right]^2 + \frac{d^2 \ln C_k(u_k)}{du_k^2} \right] - U(u_k) \quad (1)$$

В случае разделяющегося потенциала получим уравнения

$$\begin{aligned}
 -E_1 &= \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{k=1}^3 \left(p_k^2 + \frac{\partial p_k}{\partial x_k} \right) - U(x_1, x_2, x_3) - P_1; -P_k = \frac{\hbar^2}{2m} \left(q_k^2 + \frac{\partial q_k}{\partial u_k} \right) - U(u_k) - P_{k+1}, P_3 = 0 \\
 p_l &= \frac{\partial \ln \psi_l(x_l)}{\partial x_l}; q_k = \frac{\partial \ln C_k(u_k)}{\partial u_k}; u_1 = x_2 + ix_3; u_2 = x_3 + ix_1, u_3 = x_1 + ix_2
 \end{aligned} \quad (2)$$

Потенциалы при этом в общем случае окажутся комплексными. Вводя потенциал $C_l(u_l) = [A_l(u_l)]^{-i/2}$, получим формулу $V_l(u_l) = \frac{\partial C_l(u_l)}{\partial u_l}$ и зависимость волновой функции от векторного потенциала

$$\begin{aligned}
 \psi_k(t, x_1, x_2, x_3) &= \exp\left[-iEt/\hbar + \int_0^{x_k} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_k} dx_k + \int_0^{u_k} \frac{\partial \ln C_k(u_k)}{\partial u_k} du_k\right] = \\
 &= \exp(-iEt/\hbar) \psi(x_1, x_2, x_3) C_k(u_k), u_1 = x_2 + ix_3; u_2 = x_3 + ix_1, u_3 = x_1 + ix_2
 \end{aligned}$$

Продифференцируем уравнение по координате, получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_k}{\partial t} &= \sum_{n=1}^3 \left(-V_n \frac{\partial V_k}{\partial x_n} + \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_n^2} \right) - \frac{\partial U}{m \partial x_k} \\
 \frac{\partial Q_k}{\partial t} &= -Q_k \frac{\partial Q_k}{\partial u_k} + \frac{i\hbar}{2m} \frac{d^2 Q_k}{du_k^2} - \frac{\partial U}{m \partial u_k} \\
 V_n &= \frac{-i\hbar}{m} \left(\frac{\partial \ln \psi}{\partial x_n} \right), Q_n = \frac{-i\hbar}{m} \frac{\partial \ln C_n}{\partial u_n}
 \end{aligned}$$

Попробуем решить уравнение Навье-Стокса в общем виде

$$-E = \sum_{k=1}^3 \left(u_k^2 + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) - U \quad (3)$$

Приведем его к безразмерному виду относительно числа Рейнольдса потока.

Решим безразмерное уравнение (3). При условии

$$V_k(x_1, x_2, x_3) = u_k(x_1, x_2, x_3) \sqrt{T_0} = [\sqrt{-(E_k - E_{k+1})} + \alpha_k(x_1, x_2, x_3) + \sum_{s=1}^{n_r} \frac{1}{x_k - \beta_{sk}}], E_4 = 0.$$

Тогда получим уравнение

$$\sum_{k=1}^3 \{2\sqrt{-(E_k - E_{k+1})}[\alpha_k(x_1, x_2, x_3) + \sum_{s=1}^{n_r} \frac{1}{x_k - \beta_{ks}}] + \alpha_k^2(x_1, x_2, x_3) + 2\alpha_k(x_1, x_2, x_3) \sum_{s=1}^{n_r} \frac{1}{x_k - \beta_{ks}} + 2 \sum_{\substack{k,n=1 \\ k \neq n}}^{n_r} \frac{1}{x_k - \beta_{ks}} \frac{1}{x_k - \beta_{kn}} + \frac{\partial \alpha(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k}\} - U(x_1, x_2, x_3) = 0$$

Тогда в случае радиального квантового числа $n_r = 0$, получаем уравнение

$$\sum_{k=1}^3 [2\sqrt{-(E_k - E_{k+1})}\alpha_k(x_1, x_2, x_3) + \alpha_k^2(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial \alpha_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k}] - U(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Это уравнение в случае $U_u(x_1, x_2, x_3) = \sum_{s,p,q=1}^{2N} a_{spq} (x_1 - x_{1u})^s (x_2 - x_{2u})^p (x_3 - x_{3u})^q$

полинома $2N$ степени содержит $(2N+1)^3$ уравнения, являющиеся коэффициентами полинома. Коэффициенты этого уравнения в случае

полинома второй степени равны $a_{200u} = \frac{U_{s+2,pqu} + U_{s,pqu} - 2U_{s+1,pqu}}{2h^2}$

$$a_{100u} = \frac{U_{s+2,pqu} - U_{s,pqu}}{2h}, a_{000u} = U_{spqu} = U(x_{10} + sh, x_{20} + ph, x_{30} + qh)$$

$$a_{110} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{U_{s+2p+2qu} + U_{spqu} - U_{s+2pqu} - U_{sp+2qu}}{4h^2}$$

$$a_{210} = \frac{\partial^3 U}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{U_{s+2p+2qu} + U_{sp+2qu} - U_{s+2pqu} - U_{spqu} - 2U_{s+1p+2qu} + 2U_{s+1pqu}}{16h^3}$$

$$a_{111} = \frac{\partial^3 U}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{U_{s+2p+2q+2u} + U_{sp+2q+2u} + U_{spq+2u} - U_{sp+2q+2u} - U_{spq+2u} - U_{spqu}}{24h^3}$$

$$a_{220} = \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = \left[\frac{\partial^4 U[x_1, x_{20} + (p+2)h, x_3]}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U(x_1, x_{20} + ph, x_3)}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 U[x_1, x_{20} + (p+1)h, x_3]}{\partial x_1^2} \right] / 4h^2$$

$$= \frac{U_{s+2p+2qu} + U_{s+2pqu} - 2U_{s+2p+1qu} + U_{sp+2qu} + U_{spqu} - 2U_{sp+1qu} + U_{s+1p+2qu} + U_{s+1pqu} - 2U_{s+1p+1qu}}{48h^4}$$

$$a_{221} = \frac{\partial^5 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial x_3} = \left[\frac{\partial^4 U[x_1, x_2, x_{30} + (q+2)h]}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - \frac{\partial^4 U(x_1, x_2, x_{30} + qh)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right] / 2h$$

$$a_{222} = \frac{\partial^6 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial x_3^2} = \left[\frac{\partial^4 U[x_1, x_2, x_{30} + (q+2)h]}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 U(x_1, x_2, x_{30}qh)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial^4 U[x_1, x_2, x_{30} + (q+1)h]}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right] / 4h^2$$

Общий потенциал, разбивается на полиномы, аппроксимирующие функцию общего потенциала. Получим решение на отдельно взятом потенциале в виде полинома $2N$ степени по каждой переменной. Это решение непрерывное, так как потенциал на границах общий. Функции

$$\alpha_{ku}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{s,p,q=1}^N b_{kspq} (x_1 - x_{1u})^s (x_2 - x_{2u})^p (x_3 - x_{3u})^q$$

являются полиномом степени N содержит $3(N+1)^3$ неизвестных коэффициентов. Плюс три неизвестных коэффициента $\sqrt{-(E_k - E_{k+1})}$. Итого имеем уравнение $(2N+1)^3 = 3(N+1)^3 + 3$. Из равенства количества неизвестных количеству уравнений имеем $N=1$. Задача имеет не единственное решение, так как необходимо решать квадратное уравнение. При другом радиальном числе прибавится степень уравнения и на столько же прибавится количество неизвестных коэффициентов β_k . Среди коэффициентов потенциала $U(x_1, x_2, x_3)$ степени $2N$ могут быть $p \leq N-1$ неизвестных коэффициента, остальные коэффициенты надо задавать. Тогда количество неизвестных давления равна $[2(N-p)+1]^3$, а количество неизвестных в функции $\alpha_k(x_1, x_2, x_3)$ равна $3(N-p+1)^3$, остальные надо задавать. При этом имеем $N = p+1$.

Решим одномерную задачу в случае $p=0, n_r=0$. Имеем уравнение

$$2\sqrt{-E_z}(az+b) + a^2 z^2 + 2abz + b^2 + a - T_0(c_0 + c_1 z + c_2 z^2) = 0.$$

Величина $\frac{dp}{\rho dz}$ в одномерном случае интегрируется с интегралом, равным полиному. При этом также как нормированное давление умножено на нормировочный множитель, нормированная скорость также умножена на нормировочный множитель $V_k(x_1, x_2, x_3) = u_k(x_1, x_2, x_3)\sqrt{T_0}$. Нормированное

значение собственной энергии также имеет нормировочный множитель $E_z = T_0 \varepsilon_z$. Универсальный смысл имеют нормированные значения параметров, но меряем мы не нормированные значения параметров, причем при бесконечности коэффициента пропорциональности они могут стремиться к бесконечности. Нормированные значения всегда конечны. Эта система уравнений имеет два решения

$$a = \pm \sqrt{T_0 c_2}, E_z = T_0 \left(c_0 - \frac{c_1^2}{4c_2} \mp \sqrt{c_2 / T_0} \right), b = \left(\pm \frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{-E_z} \right) \sqrt{T_0}. \quad (4)$$

При использовании действительной кинематической вязкости отрицательная энергия квантовых систем соответствует положительной энергии

$$E_z = -\frac{me^2}{2\hbar^2 n^2} = \frac{e^2}{8v^2 mn^2}. \quad \text{Волновая функция равна}$$

$$\psi = \exp\left\{ \left[\pm \sqrt{c_2} z^2 / 2 \pm \left(\frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{-E_z} \right) z \right] \sqrt{T_0} \right\}$$

в случае $c_2 < 0$ имеет комплексную фазу

и на конечном отрезке этот режим реализуется. При условии положительного $c_2 > 0$ надо выбрать отрицательное значение $a = -\sqrt{T_0 c_2} < 0$, тогда волновая функция имеет максимум, и на бесконечности координаты стремится к нулю.

Решение уравнения Навье-Стокса имеет вид

$$V_z(z) = u_z(z) \sqrt{T_0} = \left(\sqrt{c_2} z / L + \frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{-E_z} \right) \sqrt{T_0}$$

и справедливо для ограниченной

области и при изменении давления $U(z) = p(z) = (c_0 + c_1 z / L + c_2 z^2 / L^2) T_0$. В

уравнение Навье-Стокса входит градиент давления $\frac{dp(z)}{dz} = (c_1 / L + 2c_2 z / L^2) T_0$.

Он равен нулю при условии $z = -c_1 L / (2c_2)$, Такое же условие для нулевого числа Рейнольдса потока с возможно мнимой добавкой. Нулевой градиент давления соответствует нулевой силе, действующей на поток частиц жидкости, при дальнейшем увеличении координаты длины трубы эта сила становится отрицательной, что соответствует стенке в потоке. Это резкое изменение свойств потока, из положительного градиента давления, он меняет

знак и становится отрицательным. Это соответствует появлению сильного торможения жидкости, переходу через отрицательное давление

$p(L) = (c_0 - \frac{c_1^2}{4c_2})T_0$ при изменении знака c_2 , и значит эта задача эквивалентна

наличию стенки в трубопроводе. Если параметры давления таковы, что они связаны условием $1 + \frac{c_1}{2c_2} - \operatorname{Re} \sqrt{-E_z/c_2} \leq 0$ происходит гидравлический удар.

Условие реализуемости давления, положительность значения $p(L) = (c_0 - \frac{c_1^2}{4c_2})T_0$

т.е. отрицательный дискриминант давления при положительном c_2 при сохранении положительности давления, т.е. давление имеет положительный минимум. В случае c_2 меньше нуля, положительное давление имеет максимум и положительно при положительном дискриминанте на отрезке

$\frac{z}{L} \in [\frac{-c_1}{2c_2} - \sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{c_0}{c_2}}, \frac{-c_1}{2c_2} + \sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{c_0}{c_2}}]$. Условие реализуемости положительного

давления на всей длине трубопровода $\frac{-c_1}{2c_2} + \sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{c_0}{c_2}} \geq 1$.

Но проблемы на этом не кончаются. Надо пересчитать мнимую скорость часть скорости в действительную часть с учетом шероховатости, как с постоянным тангенсом наклона, так и с постоянной высотой шероховатости. Для этого надо использовать методы, разработанные в [2]. В [2] удалось добиться совпадения экспериментальных графиков Никурадзе для коэффициента сопротивления трубопровода с круглым сечением при всех числах Рейнольдса и степени шероховатости с точностью 10%.

Решение полученные в [2] справедливы для постоянного градиента давления в каждом сечении трубопровода. Эти решения надо уточнить для параболического профиля давления, используя решение для постоянного градиента давления.

В случае $n_r = 1$ для трехмерного случая получаем систему уравнений

$$\sum_{k=1}^3 \left\{ 2\sqrt{-(E_k - E_{k+1})} \left[\alpha_k(x_1, x_2, x_3) + \frac{1}{x_k - \beta_{k1}} \right] + \alpha_k^2(x_1, x_2, x_3) + 2\alpha_k(x_1, x_2, x_3) \frac{1}{x_k - \beta_{k1}} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{p=1}^3 \frac{1}{x_k - \beta_{k1}} \frac{1}{x_p - \beta_{p1}} + \frac{\partial \alpha(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k} \right\} - U(x_1, x_2, x_3) = 0$$

Умножаем на наибольший знаменатель, получим

$$\sum_{k=1}^3 \left\{ 2\sqrt{-(E_k - E_{k+1})} \left[\alpha_k(x_1, x_2, x_3) + \frac{1}{x_k - \beta_{k1}} \right] + \alpha_k^2(x_1, x_2, x_3) + 2\alpha_k(x_1, x_2, x_3) \frac{1}{x_k - \beta_{k1}} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{\substack{p=1 \\ k \neq p}}^3 \frac{1}{x_k - \beta_{k1}} \frac{1}{x_p - \beta_{p1}} + \frac{\partial \alpha_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k} \right\} \prod_{p=1}^3 (x_p - \beta_{p1}) - \prod_{p=1}^3 (x_p - \beta_{p1}) U(x_1, x_2, x_3) = 0$$

Которая в случае $U(x_m)$ полинома $2N$ степени добавится 3 уравнения, так как потенциал умножаем на полином 3 степени. Функция $\alpha_k(x_1, x_2, x_3)$ является полиномом степени N и возводится в квадрат. Плюс добавится 3 неизвестных коэффициента β_{1s} . Из равенства количества неизвестных количеству уравнений имеем $N=1$. Задача имеет не единственное решение, так как надо решать квадратное уравнение.

При другом радиальном числе прибавится степень уравнения и на столько же прибавится количество неизвестных коэффициентов β_k . Среди коэффициентов потенциала $U(x_m)$ степени $2N$ могут быть $p \leq N-1$ неизвестных коэффициента, остальные коэффициенты надо задавать. Тогда степень полинома равна $N = p+1$. Это решение описывает бассейн в виде прямоугольного параллелепипеда с особенностями при определенных значениях возможно комплексной скорости, т.е. пульсации мнимой части скорости с амплитудой, равной мнимой части.

Решим одномерную задачу при условии $n_r = 1$.

$$2\sqrt{-E_z} [(az+b)(z-\beta)+1] + (a^2 z^2 + 2abz + b^2)(z-\beta) + 2az + 2b + a(z-\beta) - \\ - T_0(c_0 + c_1 z + c_2 z^2)(z-\beta) = 0$$

Это уравнение сводится к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned}
a^2 &= T_0 c_2 \\
2\sqrt{-E}a - \beta a^2 + 2ab + T_0(\beta c_2 - c_1) &= 0 \\
2\sqrt{-E}b + b^2 &= 2\sqrt{-E}\beta a + 2ab\beta - 3a - T_0(\beta c_1 - c_0) \\
2\sqrt{-E}\beta b + b^2\beta &= 2\sqrt{-E} - 2b - a\beta + T_0\beta c_0
\end{aligned}$$

Из второго уравнения определим значение энергии, а третье и четвертое уравнение запишем в виде

$$\begin{aligned}
2\sqrt{-E} &= \beta a - 2b + T_0(c_1 - \beta c_2)/a \\
2\sqrt{-E}\beta^2 a + 2ab\beta^2 - 3a\beta - T_0\beta(\beta c_1 - c_0) &= \\
&= 2\sqrt{-E} - 2b - a\beta + T_0\beta c_0
\end{aligned}$$

Подставляя значение энергии во второе и третье уравнение, получим значение b . Запишем вычисленные коэффициенты через значение, определяемого из полинома 6 степени коэффициента β . При величине β действительной, энергия окажется отрицательной, при величине β комплексной энергия окажется комплексной

$$\begin{aligned}
4b &= T_0[c_2\beta^3 + (c_1 - \beta c_2)/a] + 3a\beta - \beta^3 a^2 \\
2\sqrt{-E} &= \beta a - 2b - T_0[c_2\beta^3 - (c_1 - \beta c_2)/a]/2 - 3a\beta/2 + \beta^3 a^2/2 \\
a &= \sqrt{T_0 c_2}
\end{aligned}$$

Тогда координат полюса β определится из уравнения в виде полинома 6 степени.

$$[\beta a - b - T_0(\beta c_2 - c_1)/a]b = [\beta a - 2b - T_0(\beta c_2 - c_1)/a]\beta a + 2ab\beta - 3a - T_0(\beta c_1 - c_0).$$

При величине T_0 большой имеет уравнение третьей степени

$$\begin{aligned}
4b &= -4T_0(\beta c_2 - c_1)/a = T_0[c_2\beta^3 + (c_1 - \beta c_2)/a] \\
\beta^3 + 3\beta/a - 3c_1/(c_2 a) &= 0
\end{aligned}$$

При малом значении свободного члена имеем три разных значения кубического корня, один из которых действительный $\beta = \sqrt[3]{3c_1/(c_2\sqrt{T_0 c_2})}$.

Параметры системы при этом равны

$$b = \sqrt{T_0} (4c_1 - \sqrt[3]{3c_1 / (c_2 \sqrt{T_0 c_2})} c_2) / (4\sqrt{c_2})$$

$$E = -T_0 [(2c_1 + \sqrt[3]{3c_1 / (c_2 \sqrt{T_0 c_2})} c_2) / (4\sqrt{c_2})]^2$$

$$a = \sqrt{T_0 c_2}$$

Полином третьей степени имеет действительный корень, т.е. энергия частицы в этом случае определится как отрицательная. Кроме того, имеется два комплексных корня из кубического корня действительного числа.

Но при некоторых значениях потенциала получатся потенциальное комплексное решение уравнения Навье-Стокса с учетом нелинейности, так как коэффициенты полинома $\alpha_m(x_m)$ возводятся в квадрат. Это произойдет при отрицательном потенциале. При условии, что член потенциала с наибольшей степенью отрицателен гарантированно получится комплексное решение. В частности, в случае положительности члена с потенциальной энергии и для члена с наибольшим индексом, для решенной задачи требуется не-отрицательность собственной энергии для получения комплексного решения задачи квантовой механики. Для задачи с полюсом скорости, действительное решение квантовой механики определяет отрицательную энергию при использовании действительной ветви кубического корня из действительного числа, а комплексное решение определяет комплексную энергию при комплексной ветви кубического корня из действительного числа. Причем в случае комплексного решения для скорости частицы волновую функцию надо преобразовывать для использования момента импульса, содержащего комплексные скорости.

В случае задачи гидродинамики положительная ветвь собственной энергии заменяется на отрицательную, и комплексной энергии соответствуют комплексные скорости, а положительной действительной собственной энергии соответствуют действительные скорости. Причем комплексная скорость не определяет конечную волновую функцию.

Проблеме турбулентных комплексных решений уравнения Навье-Стокса посвящены статьи [1], [2], [3]. Но проблемы комплексного турбулентного решения уравнения Навье-Стокса на этом не кончаются. Надо пересчитывать мнимую часть числа Рейнольдса потока в действительную часть. Мнимая часть числа Рейнольдса потока существенным образом зависит от степени шероховатости. Необходимо усреднить по степени шероховатости, причем усреднение по средней высоте шероховатости зависит от тангенса наклона шероховатости и безразмерного давления или числа Рейнольдса см. [2] стр. 71.

Таким образом можно решить уравнение Шредингера и получить потенциальное решение уравнения Навье-Стокса с учетом нелинейности и комплексной числа Рейнольдса потока.

Литература

1. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION I. THE GENERAL SOLUTION OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 60-66. <https://world-science.ru/pdf/2016/3/14.pdf>
2. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION II. THE USE OF LAMINAR SOLUTIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 67-83. <https://world-science.ru/pdf/2016/3/15.pdf>
3. YAKUBOVSKIY, E. G. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION III. THE PHYSICAL SENSE OF THE COMPLEX VELOCITY AND CONCLUSIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 84-87. <https://www.world-science.ru/pdf/2016/3/16.pdf>