Решение нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Решение нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных сложная задача. Возникают бесконечности решения. Для того, чтобы управлять этими бесконечностями и предназначена данная статья. Рассматривая решения частных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описанных на сайте eqworld.ipmnet.ru замечаем, что при определенных условиях они содержат комплексное решение и содержат множество констант интегрирования, что приводит к множеству первых интегралов энергии. Как и всякая нелинейная задача решение нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных содержит комплексное решение. Комплексное решение позволяет свести бесконечное действительное решение к конечному комплексному. Мнимая часть комплексного числа означает среднеквадратичное отклонение, а действительная часть среднее решение. Поэтому нелинейные комплексные решения являются вероятностными и описывают квантовые эффекты. Так значений энергии при решении этих дифференциальных уравнений имеется счетное количество. Так вероятностное уравнение Шредингера для связанного состояния сводится к комплексному, турбулентному решению уравнения Навье-Стокса. И то, и другое решение является вероятностным. Но решение уравнения Навье-Стокса может быть комплексным, т.е. определяет действительное среднее и мнимое среднеквадратичное отклонение, но не зависит от волновой функции, т.е. решение не потенциально. Возникает вопрос, имеется ли турбулентное решение нелинейного уравнения не комплексное, т.е. не вероятностное. Численный счет и простое рассуждение о наличии полюса показывает, что не комплексное решение стремится к бесконечности.

Рассмотрим систему квазилинейных уравнений второго порядка

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2}+\sum_{l,n=1}^{L}[a_{0nl}(x_1,...,x_3)+\sum_{s=1}^{L}a_{1nls}(x_1,...,x_3)U_s+...]\frac{\partial^2 U_k}{\partial x_l\,\partial x_n}+$$
$$+\sum_{l=1}^{L}[b_{0l}(x_1,...,x_3)+\sum_{s=1}^{L}b_{1ls}(x_1,...,x_3)U_s+...]\frac{\partial U_k}{\partial x_l}+ \qquad .$$
$$+[c_0(x_1,...,x_3)+\sum_{s=1}^{L}c_{1s}(x_1,...,x_3)U_s+...]U_k=d_k(x_1,...,x_3),k=1,...,L$$

Приведем это уравнение к безразмерному виду. Решение ищем с помощью подстановки в дифференциальное уравнение функции $\mathbf{U}(t,x_1,...,x_3)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{b}_n(t)\varphi_n(x_1,...,x_3)$. Где $\varphi_n(x_1,...,x_3)$ это решение линейной системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющей граничным условиям, разное в разных частях пространства. При этом величина $d_k(x_1,...,x_3)$, это внешнее воздействие. Для решения этого уравнения подставляем разложение функции решения в уравнение в частных производных, умножаем на величину $\varphi_s(x_1,...,x_3)$ и интегрируем по пространству. Вне тел необходимо совершить подстановку $r=\frac{R^2(\theta,\varphi)}{R}$, которая удовлетворяет уравнению поверхности каждого тела. Тогда дифференциал координат удовлетворяет $r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$. Получим дифференциальное уравнение (1). Сходимость ряда, относительно функций $\varphi_n(x_1,...,x_3)$ доказывается индивидуально.

При этом образуется обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение, которое имеет комплексное решение в силу его нелинейности.

Исследуем нелинейное обыкновенное уравнение со второй производной по времени, где при действительных аргументах $b_1,...,b_N$ уравнение имеет однозначную правую часть

$$\frac{d^2 b_s}{dt^2}=F_s(b_1,...,b_N),s=1,...,N. \qquad (1)$$

Системы уравнений, содержащие первую производную по времени в правой части, приводятся к виду (1). Допустим, имеем уравнение

$$\frac{d^2 b_s}{dt^2} = F_s(b_1,...,b_N,\frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt}), s = 1,...,N .$$

Продифференцируем его по времени, получим

$$\frac{d^3 b_s}{dt^3} = \frac{\partial F_s(b_1,...,b_N,\frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt})}{\partial b_k}\frac{db_k}{dt} + \frac{\partial F_s(b_1,...,b_N,\frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt})}{\partial b_k} \times$$

$$\times F_s(b_1,...,b_N,\frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt})$$

Введя новые переменные $y_n = b_n, y_{n+N} = \frac{db_n}{dt}, n = 1,...,N;$, получим систему уравнений с новыми координатами равновесия

$$\frac{d^2 y_s}{dt^2} = F_s(y_1,..., y_{2N}), s = 1,...,2N . \qquad (2)$$

Начальные условия этого дифференциального уравнения учитывают степень шероховатости решения $y_k(t_0) = y_k^0(1 + i\delta / l); \frac{dy_k(t_0)}{dt} = \frac{dy_k^0}{dt}(1 + i\delta / l)$, где используется отношение высоты шероховатости к ее периоду. Мнимая часть решения может оставаться малой, тогда имеем ламинарный режим без полюсов. Но мнимая часть решения может расти в случае наличия полюса $\frac{1}{t - \beta(1 + i\delta / l)}$. Наличие полюса соответствует комплексным координатам положения равновесия системы уравнений (2). Координаты положения равновесия удовлетворяют системе уравнений $F_s(\alpha_1^k,...,\alpha_{2N}^k) = 0, s = 1,...,2N; k = 1,....,K$. Получив одно частное решение системы нелинейных дифференциальных уравнений, остальные решения получатся из линейного уравнения $c_p^k = \alpha_p^1 + a_p^k, p = 1,...,2N$. Получим уравнение $A_{pq}(a_1^k,..., a_{2N}^k)\alpha_q^k = 0$ Чтобы эта система уравнений имела решение, необходимо, чтобы определитель этой системы равнялся нулю. Тогда определится с точностью до множителя решение этой системы уравнений. Этот множитель определится из равенства нулю определителя этой системы уравнений. Этот множитель может иметь конечное число решений, а может образовывать непрерывную функцию, тогда имеется континуум решений. Дискретный набор решений соответствует связанному состоянию квантовой системы с комплексной энергией, а континуум решений соответствует свободному состоянию. В обоих случаях может образоваться комплексное решение, если этот множитель комплексный. В связанном состоянии максимальная мощность решения - это счетное количество решений, а максимальная мощность свободных решений - это континуум решений. Континуум решений может сочетаться с счетным количеством решений, но тогда получится континуум решений. Одна задача может иметь счетное количество решений с комплексной волновой функцией из-за комплексной постоянной Планка, которое переходит в континуум действительных решений, действительное решение образуется из-за суммирования комплексно-сопряженных решений. В гидродинамике свободному состоянию соответствует единственное ламинарное, действительное решение, а счетному количеству решений турбулентный, комплексный режим. В турбулентном режиме излучение энергии идет квантами, а в ламинарном режиме - непрерывное излучение.

Интерференция в турбулентном режиме невозможная, так как проявляются свойства материи и излучение происходит квантами, а в ламинарном режиме интерференция возможна, так как проявляются непрерывные свойства поля. Переход из одного режима в другой имеет резкую границу. Это и критическое число Рейнольдса и нулевое значением квадрата обратной величины главного квантового числа, или нулевое собственное значение энергии. Граница между состояниями существенная, действительное или комплексное описание собственной энергии. В случае свободного состояния имеется также непрерывный набор собственных значений энергии.

Но турбулентное решение является комплексным, а ламинарное решение действительным. Но в случае с квантовой механикой, не учитывается действительная вязкость и получается действительное решение у турбулентного связанного состояния. Энергия у связанного состояния равна $E_n = -\frac{me^4}{2n^2(\hbar + im\mu/\rho_b)^2}$ и является комплексной дискретной. Волновая функция является комплексной в случае комплексной постоянной Планка. В случае свободного состояния энергия образуется как сумма двух комплексно-сопряженных энергий, и является действительной с положительной, непрерывной действительной частью, так как мнимая часть постоянной Планка мала. Волновая функция состоит из двух комплексно-сопряженных частей и является действительной.

Имеется еще одна область применения комплексного решения, уравнение ОТО. Черные дыры имеют критическую массу, выше которой решение обретает мнимую часть. При массе больше критической, должны измениться принципы, описывающие черную дыру, подходит мнимое значение массы. С ростом массы черной дыры ее действительная часть уменьшается, а мнимая часть растет. Растет как мнимая часть плотности черной дыры, так и мнимая часть массы.

Причем в турбулентном режиме в случае отсутствия мнимой части действительное непрерывное решение не существует, и образуется дельта функция, а в случае учета шероховатости решение непрерывно с большим значением в полюсе $il/(\beta\delta)$, определяемым степенью шероховатости. Образуются решения, определяющее при заданных внешних условиях один коэффициент сопротивления. Значит одно из решений определится в точке минимума функции $\sum_{s=1}^{2N} |F_s(y_1,...,y_{2N})|^2$. При уравнении первого порядка относительно производной по времени минимум этой функции соответствует координате положения равновесия. Безразмерный шаг интегрирования должен равняться $h = \delta / l$.

Выводы

Система нелинейных дифференциальных уравнений может иметь непрерывное ламинарное решение. Но может иметь турбулентное, комплексное решение. Если турбулентное решение считать в действительной плоскости, то получим бесконечное решение в виде дельта функции. Если считать в комплексной плоскости, то получим конечное комплексное решение. Комплексное решение является вероятностным, описывая среднее решение – действительная часть и среднеквадратичное отклонение – мнимая часть.