Физический смысл мнимой координаты и скорости

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Описан физический смысл мнимой части комплексной координаты. Дана интерпретация в случае постоянной мнимой части и переменной мнимой части. Приведена ссылка на описания виртуальных частиц в реакциях между элементарными частицами.

Опишем физический смысл комплексного турбулентного решения. Итак, рассмотрим действительное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений $x_\alpha(t)$. Пусть начальные данные имеют среднее x_α^0 и дисперсию $<[\Delta x_\alpha^0]^2>$(дисперсия начальных данных в случае уравнения Навье – Стокса определяется шероховатостью поверхности или не точно заданными начальными данными). Тогда для дисперсии решения имеем

$$<[\Delta x_l]^2>=<[x_l-<x_l>]^2>=<x_l^2>-2<x_l><x_l>+<x_l>^2=<x_l^2>-<x_l>^2.$$

Значит имеем

$$<x_l^2>=<x_l>^2+<[\Delta x_l]^2>=|<x_l>+i\sqrt{<[\Delta x_l]^2>}|^2 \qquad (1)$$

Приведу формулировку обратной теоремы Пифагора. Для всякой тройки положительных чисел a,b и c, такой, что $a^2+b^2=c^2$, существует прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c. Значит, математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение образуют катеты, а гипотенузой является корень из среднего квадрата величины. Т.е величина среднего $<x_l>$ ортогональна среднеквадратическому отклонению $\sqrt{<[\Delta x_l]^2>}$, которое образует мнимую часть координаты тела. Таким образом, полученное в результате усреднения во времени декартово пространство с колебательной скоростью высокой частоты (период колебания меньше времени измерения) становится комплексным пространством. Т.е. в случае большой дисперсии величины действительного пространства, его нужно рассматривать как комплексное трехмерное пространство, где мнимая часть соответствует среднеквадратическому отклонению. При этом имеется следующая связь между переменными $\sqrt{< x_l^2 >} = (< x_l > + i\sqrt{< [\Delta x_l]^2 >})\alpha, |\alpha| = 1$, причем комплексное число α выбирается из условия, чтобы мнимая часть имела положительное или отрицательное значение. Этому удовлетворяет среднеквадратичное отклонение. Но иногда среднеквадратичное отклонение положительно, например, в случае диэлектрической проницаемости, где вмешиваются положительные и отрицательные заряды. Тогда имеем формулу $\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{4\pi i\sigma}{\omega}$, где действительная часть пропорциональна положительному среднеквадратичному отклонению диполя, а проводимость пропорциональна среднему значению. Но зато проводимость делится на частоту, которая имеет положительный и отрицательный знак.

Следовательно, алгоритм нахождения среднего решения, или среднего в фазовом пространстве решения, и его дисперсию сводится к нахождению комплексного решения. Среднее решение соответствует действительной части решения, а квадрат комплексной части соответствует дисперсии решения. Таков физический смысл комплексного решения, действительная часть - это среднее решение, а мнимая часть – это его среднеквадратическое отклонение. Причем действительная и мнимая часть ортогональны, и образуют комплексное пространство. В самом деле, согласно обратной теореме Пифагора в силу формулы (1) математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение образуют катеты, а средний квадрат является гипотенузой.

Трехмерную скорость потока можно представить в виде

$$V_l = V_{tl} + iV_{nl} = V_l \exp(i\varphi_l), \varphi_l = \arg(V_{tl} + iV_{nl}).$$

Причем скорости определяются в виде интеграла от касательного ускорения, по формуле

$$V_{tl} = \int_{t_0}^{t} t_l(u) w_t(u) du + V_{tl}(t_0) = \int_{t_0}^{t} t_l(u) \frac{d\sqrt{\sum_{k=1}^{3} V_k(u) V_k^*(u)}}{du} du + V_{tl}(t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} t_l(u) \frac{d\sqrt{\sum_{k=1}^{3} [V_{tk}^2(u) + V_{nk}^2(u)]}}{du} du + V_{tl}(t_0),$$

Интеграл от нормального ускорения определяется по нормальной компоненте мнимой скорости, по формуле (действительная постоянная поступательная скорость соответствует бесконечному радиусу кривизны)

$$V_{nl} - V_{nl}^0 = \int_{\tau_0}^{\tau} w_{nl}(u) du = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{n_l(u)(|\mathbf{V}_{\mathrm{Im}}|^2 + \mathbf{V}_{\mathrm{Re}}{}^2)}{\rho(u)} du = \int_{s_0}^{s} (|\mathbf{V}_{\mathrm{Im}}(u)| \frac{n_l(u)}{\rho(u)} + \frac{\mathbf{V}_t{}^2}{\rho_\infty}) ds =$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau} |\mathbf{V}_{\mathrm{Im}}| dt_l = \begin{cases} |\mathbf{V}_{\mathrm{Im}}| [t_l(\tau) - t_l(\tau_0)], |\mathbf{V}_{\mathrm{Im}}| = const; \dfrac{n_l(u)}{\rho(u)} = \dfrac{dt_l}{ds} \\ \int_{\tau_0}^{\tau} |\mathbf{V}_{\mathrm{Im}}| dt_l, |\mathbf{V}_{\mathrm{Im}}| \neq const \end{cases},$$

$$V_{\mathrm{Im}\,l}(\tau) = |\mathbf{V}_{\mathrm{Im}}| t_l(\tau)$$

$$\sum_{k=1}^{3} [V_{tk}^2(u) + V_{nk}^2(u)] = \sum_{k=1}^{3} [V_{tk}^2(u) + V_{k\,\mathrm{Im}}^2(u)] = |\mathbf{V}|^2$$

Докажем равенство

$$\mathrm{Im}\, x_l(\tau) = \mathrm{Im}\, r t_l(\tau)$$

Для этого вычислим разность

$$\mathrm{Im}\, x_l(\tau) - \mathrm{Im}\, x_l(\tau_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathrm{Im}\, r n_l d\varphi = \int_{s_0}^{s} \frac{\mathrm{Im}\, r n_l}{\rho} ds = \int_{s_0}^{s} \mathrm{Im}\, r dt_l = \mathrm{Im}\, r[t_l(\tau) - t_l(\tau_0)]$$

Тогда справедливо

$$\frac{\operatorname{Im} x_l}{V_{\operatorname{Im} l}} = \frac{\operatorname{Im} r}{\operatorname{Im} V}; \operatorname{Im} r = const; |V_{\operatorname{Im}}| = const .$$

В случае переменной скорости и радиуса данная формула не работает.

Мнимая часть скорости определяет частоту вращения, равную мнимой компоненте скорости, деленной на мнимую координату. Справедлива формула

$$\mathbf{V} = [\mathbf{w}, \mathbf{r}]$$

Справедливы равенства

$$u_{1\operatorname{Re}} = V_1^0, u_{1\operatorname{Im}} = \omega(n_2 t_3 - n_3 t_2) \operatorname{Im} r = \operatorname{Im} V(n_2 t_3 - n_3 t_2)$$
$$u_{2\operatorname{Re}} = V_2^0, u_{2\operatorname{Im}} = \omega(n_3 t_1 - n_1 t_3) \operatorname{Im} r = \operatorname{Im} V(n_3 t_1 - n_1 t_3)$$
$$u_{3\operatorname{Re}} = V_3^0; u_{3\operatorname{Im}} = \omega(n_1 t_2 - n_2 t_1) \operatorname{Im} r = \operatorname{Im} V(n_1 t_2 - n_2 t_1)$$
$$\operatorname{Im} V = \operatorname{Im} \sqrt{(\frac{dr}{dt})^2 + r^2 (\frac{d\theta}{dt})^2 + r^2 \sin^2 \theta (\frac{d\varphi}{dt})^2} = \operatorname{Im} \sqrt{(\frac{dx_1}{dt})^2 + (\frac{dx_2}{dt})^2 + (\frac{dx_3}{dt})^2}$$
$$\operatorname{Im} x_l = \operatorname{Im} r t_l; \omega_l = \omega n_l = \frac{\operatorname{Im} V_l}{\operatorname{Im} x_l}; u_l = \sqrt{u_{l\operatorname{Re}}^2 + u_{l\operatorname{Im}}^2};$$

Орты системы координат являются действительные и определяются по действительной поверхности

$$x_l = x_l(s_1, s_2), t_{lk} = \frac{\partial x_l}{\partial s_k}, l = 1,...,3; k = 1,2; n_p = e_{pqs} t_{q1} t_{s2}; t_l = \sqrt{t_{l1}^2 + t_{l2}^2}$$

Физический смысл одномерной комплексной скорости, это колебание с амплитудой, равной мнимой части координаты частицы, и частотой, равной мнимой части скорости, деленной на мнимую координату частиц.

При постоянной мнимой части скорости и координаты частицы имеем

$$\operatorname{Im} x_l = \operatorname{Im} x_l \sin(\int_0^t \operatorname{Im} V_l(u) du / \operatorname{Im} x_l + \varphi_l) = \operatorname{Im} x_l \sin(\operatorname{Im} V_l t / \operatorname{Im} x_l);$$
$$\operatorname{Im} V_l / \operatorname{Im} x_l = const$$

При постоянной мнимой части скорости частицы, фаза у разных компонент мнимой скорости одинакова, амплитуда синуса равна максимальной за период вращения и образуется вращение по эллипсу. При переменной мнимой части скорости фаза φ_l произвольная, и среднеквадратичное отклонение, равное мнимой части, имеет случайное значение. При большой величине $\operatorname{Im} x_l$ имеем постоянную скорость движения мнимой части на конечном малом интервале времени. Это описывает виртуальные частицы при столкновении частиц см. [1].

Величина мнимой координаты образует эллипс в случае постоянства мнимой части скорости. В случае переменной мнимой части скорости он дает вклад в поступательную скорость. Так в случае движения в трубопроводе решение имеет вид $(R_{cr} + i\sqrt[4]{\alpha T^2 - R_{cr}^2 T})(1 - r^2 / a^2)$ и является переменным см. [2].

Литература

1. Якубовский Е.Г. Дополнение к 1 тому ЛЛ Механика. «Энциклопедический фонд России», 2018, 13 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1524400118.pdf
2. *Якубовский Е.Г.* Исследование решения уравнения Навье – Стокса, «Реферативный журнал. Научное обозрение», т.1, 2016, стр. 46-80 http://science-review.ru/abstract/pdf/2016/1/632.pdf