Квантовые законы гравитации

Е.Г. Якубовский

e-mail yakubovski@rambler.ru

Квантовая механика получается как описание частиц вакуума, которые группируются, образуя элементарные частицы см. [1]. Элементарные частицы группируясь образуют макротела. Элементарные частицы имеют комплексную кинематическую вязкость $\frac{ih}{2m} + (\frac{hG}{c})^{0.5}$. Макротела имеют другое эффективное значение постоянной Планка $\frac{137Gm^2}{c} = \frac{137hm^2}{m_{Pl}^2}$, где величина G это гравитационная постоянная, m_{Pl} это масса Планка и комплексную кинематическую вязкость $\frac{137iGm}{c} + v$, где v кинематическая вязкость среды. Влияние вязкости среды сглаживает квантовые эффекты тел с массой меньше $10^{14}g$ согласно формуле для кинематической вязкости. Макротела состоят из элементарных частиц, их движение в среде описывается комплексной кинематической вязкостью с малой мнимой частью с помощью уравнения Навье - Стокса. Значит, при преобладании мнимого члена кинематической вязкости они описываются уравнением Шредингера см. [1], с эффективным значением постоянной Планка. При этом можно объяснить отсутствие потери энергии согласно классической теории излучения при ускоренном вращении планет и как следствие падение на Солнце. Траектории планет описываются квантовыми законами, и излучение происходит квантами, поэтому падения на Солнце нет.

Решено нелинейное уравнение в частных производных второго порядка, причем энергия и импульс имеет асимптотическую зависимость от обратного целого числа в квадрате. Это решение аналогично решению ОТО. Но не на прямую, дело в том, что уравнение ОТО содержит наряду с ковариантными компонентами метрического тензора и контравариантные. А эта нелинейности плохо описывается. Кроме того, получено увеличения радиуса системы, пропорционально радиусу в степени три четвертые.

При движении тела в среде, среда и силы, действующие на двигающееся тело, описывается уравнением Навье – Стокса. Покажем, что при этом тело подчиняется уравнению Шредингера, причем волновая функция уравнения Шредингера описывает скорость среды, которую можно также определить с помощью уравнения Навье – Стокса. Уравнение Навье – Стокса имеет вид

$$\frac{\partial V_l}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_l}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\rho \partial x_l} + \nu \Delta V_l \,.$$

При этом скорость потока равна $V_l = -2\nu \nabla_l \ln \psi$, где ψ волновая функция системы. При этом решение уравнения Навье – Стокса должно удовлетворять условию $\frac{\partial V_l}{\partial x_k} - \frac{\partial V_k}{\partial x_l} = 0, \mathrm{rot}\mathbf{V} = 0$ в силу потенциальности скорости. Для выполнения этого условия решение уравнения Навье – Стокса должно удовлетворять условию $V_l = V(x^1 + x^2 + x^3)$. Т.е. получается, что решение уравнения Шредингера, это частный случай решения уравнения Навье – Стокса.

Но каким образом описать решение для водородоподобного атома, используя предлагаемую идеологию. Для этого импульс надо представить в виде $p_k = p_k(x_k)$, при этом для волновой функции справедливо разделение переменных. Логарифм волновой функции $\ln \psi(r,\theta) = \ln R_{nl}(r) + \ln P_l^m(\theta) + \ln \exp(i\, m\varphi)$ является потенциалом для значения импульса, и удовлетворяет условию интегрирования. Т.е. градиент волновой функции представляет сумму трех функций $p_r(r) = \frac{\partial \ln R_{nl}(r)}{\partial r}, L_\theta(\theta) = \frac{\partial \ln P_l^m(\theta)}{\partial \theta}, L_\varphi = \frac{\partial i m \varphi}{\partial \varphi} = im$, удовлетворяющих условию интегрирования.

Покажем, что скорость частицы, описываемая законом движения Ньютона для жидкости, непосредственно связана с волновой функцией, описываемой квантовой механикой. Подставим это значение скорости в уравнение Навье – Стокса

$$\frac{\partial 2\nu\nabla \ln\psi}{\partial t} - 4\nu^2 \frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l}\frac{\partial \nabla \ln\psi}{\partial x_l} = \nu \frac{\partial^2 2\nu\nabla \ln\psi}{\partial x_l^2} + \nabla \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial p}{\rho \partial x^k} V_k dt .$$

Где интеграл берется вдоль линии тока частиц $V_k dt = dx_k$, $\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial p}{\rho \partial x^k} V_k dt = \int\limits_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)}^{(x_1, x_2, x_3)} \frac{\partial p}{\rho \partial x^k} dx_k$. Причем частная производная от этого интеграла вдоль линии тока, равна

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \int\limits_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)}^{(x_1, x_2, x_3)} \frac{\partial p}{\rho \partial x^k} dx_k = \frac{d}{V_l dt} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial p}{\rho \partial x^k} V_k dt = \frac{\partial p}{V_l \rho \partial x^k} V_k = \frac{dp}{V_l \rho dt} = \frac{\partial p}{\rho \partial x^l}$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\nabla [\frac{\partial 2\nu \ln\psi}{\partial t} - 4\nu^2 (\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l})^2 / 2 - 2\nu^2 \frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2} - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial p}{\rho \partial x^k} V_k dt] = 0 .$$

Проинтегрируем градиент, получим

$$2\nu \frac{\partial \ln\psi}{\partial t} - 2\nu^2 (\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l})^2 = 2\nu^2 \frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2} + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial p}{\rho \partial x^k} V_k dt = -\frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2} + U / m .$$

Умножим на массу $m\psi$, перенесем второй член в правую часть, получим уравнение Шредингера, причем справедливо $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_l^2} = \psi [\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2} + \frac{1}{\psi^2} (\frac{\partial \psi}{\partial x_l})^2]$

$$2\nu m \frac{\partial \psi}{\partial t} = 2\nu^2 m\psi [\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2} + \frac{1}{\psi^2} (\frac{\partial \psi}{\partial x_l})^2] + \psi \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial p}{\rho \partial x^k} V_k dt =$$

$$= 2\nu^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_l^2} + U\psi ; U = m \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial p}{\rho \partial x^k} V_k dt .$$

Т.е. для скорости частиц вакуума получено уравнение Шредингера, причем волновая функция этого уравнения связанна со скоростью частиц соотношением $V_l = -2\nu\nabla \ln\psi$ или $\psi = c \exp(V_l \Delta x_l / 2\nu)$, где потенциал равен $U = m \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial p}{\rho \partial x^k} V_k dt = m \int\limits_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)}^{(x_1, x_2, x_3)} \frac{\partial p}{\rho \partial x^k} dx_k$. Решение можно представить в виде локальной плоской волны

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}}\exp[(E\Delta t - \mathbf{p}_0\Delta\mathbf{r})/(2m\nu)][1 + 0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^3].$$

При этом локальное решение имеет смысл в силу малого приращения времени и координаты. Эта формула является решением уравнения Шредингера в окрестности точки $\mathbf{r}_0$ и при подстановке ψ в этом виде в уравнение Шредингера

$$2m\nu\frac{\partial\psi}{\partial t} = 2m\nu^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_l^2} + U_0\psi + 0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\psi.$$

Причем если использовать равенство $\nu = i\frac{\hbar}{2m}$, то получим уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_l^2} + U\psi.$$

Получаем равенство

$$E\psi == [\frac{p_0^2}{2m} + U_0 + 0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)]\psi + 0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\psi$$

Это уравнение сводится к тождеству $E = \frac{p_0^2}{2m} + U_0$. А величина скорости равна $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}_0}{m} + 0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2$ в окрестности точки $\mathbf{r}_0$.

Вопрос заключается в том, какова кинематическая вязкость массивных тел. Если для тел со средней массой вопрос ясен, кинематическая вязкость совпадает с обычной кинематической вязкостью тела. Какова кинематическая вязкость вакуума для тел большой массы. Для элементарных частиц кинематическая вязкость вакуума $i\hbar/(2m)$. В случае тел с массой порядка планет и звезд вопрос требует дополнительного исследования. Можно высказать предположение, что она равна для N масс Планка величине $i\frac{\hbar}{2m_{Pl}}N = i\frac{\hbar}{2m_{Pl}}\frac{m}{m_{Pl}}$. С точностью до коэффициента это предположение подтверждается.

При этом радиус электрона $r = \frac{e^2}{mc^2} = \frac{\hbar}{137mc} = \lambda\!\!\!^{-}/137$, заменяется на гравитационный радиус, откуда получаем по формуле

$$137k = \frac{1}{\frac{\hbar}{137mc} + \frac{Gm}{c^2}} = \frac{1}{\frac{\hbar}{137mc} + \frac{\hbar m}{cm_{Pl}^2}} = \frac{137mc}{\hbar_{eff}}.$$

Откуда имеем формулу для эффективного значения постоянной Планка

$$\hbar_{eff} = \hbar + \frac{137Gm^2}{c} = \begin{cases} \frac{137Gm^2}{c} = \frac{137\hbar m^2}{m_{Pl}^2}, m >> m_{Pl}/\sqrt{137} \\ \hbar, m << m_{Pl}/\sqrt{137} \end{cases}.$$

При этом квантовая механика для макротел начинается с предела $m >> m_{Pl}/\sqrt{137}$. Для этого предела кинематическая вязкость среды равна $\frac{137Gm}{2c}i + \nu = \frac{137\hbar m}{2m_{Pl}^2}i + \nu$, где величина ν кинематическая вязкость среды.

Начиная с массы, удовлетворяющей условию $137Gm/c = \nu = 0.1cm^2/s$ справедливо квантовое описание макротел. При массах меньше, чем величина $m = \frac{\nu c}{137G} = 10^{14}g = 10^8 t$, существенную роль играет действительная вязкость, которая преобладает над квантовыми эффектами. Трение гораздо сильнее квантовых эффектов при малых массах, и взаимодействие происходит по законам Ньютона с учетом трения. При промежуточных массах квантовые числа велики и система описывается квазиклассическим приближением, т.е. законами Ньютона.

Характерное время для элементарных частиц $\frac{\hbar}{mc^2} = 10^{-21}s$. Характерное время взаимодействия небесных тел, к примеру Земли, в вакууме $\frac{137Gm}{c^3} = 10^{-9}s$, причем, чем массивнее тела, тем взаимодействие происходит медленнее. В атмосфере Земли, учитывая, что скорость распространения возмущения равна $c = 340m/s$, имеем время взаимодействия $\frac{137Gm}{c^3} = 1.39 \cdot 10^9 s = 1.61 \cdot 10^4 d$, т.е. время взаимодействия 10^4 суток. Поэтому квантовые эффекты на Земле имеют характерное время в 10^{30} раз медленнее, чем эффекты квантовой механики микромира. В вакууме этот эффект 10^{12} раз медленнее, чем эффекты микромира. Т.е. если квантовые эффекты микромира в макромире сказывается через 1 сек, то на планеты оказывается квантовое воздействие через $10^{12}s$. Так квантовый эффект смещения орбиты Меркурия рассчитывается за 100лет. Периоды квантового излучения гравитационной энергии в эксперименте LIGO не проявлялись в течении 20 лет.

Но при мнимой большой кинематической вязкости отсутствуют пульсации, поток, окружающий тело ламинарный. В квантовой механике см. [3]§16 получено условие положительности полинома второй степени при произвольных массах тела. Записываем это условие для частиц с массой меньше массы Планка и для тел с массой больше массы Планка с общим коэффициентом α и суммируем с одинаковыми коэффициентами. Получаем условие для тел с произвольной массой, причем в силу равноправности уравнений с большой и малой массой коэффициент при суммировании одинаков.

$$\alpha^2(\delta x)^2 - \alpha + (\delta p_x)^2[\frac{1}{(\hbar \frac{137m^2}{m_{Pl}^2} + \hbar)^2} + \frac{1}{\hbar^2}]/2 > 0 \cdot$$

Для положительности полинома необходимо, чтобы дискриминант этого уравнения был отрицательный, откуда получаем соотношение неопределенности для тела произвольной массы

$$\delta p_x \delta x > \frac{\hbar}{2\sqrt{[\frac{1}{(\frac{137m^2}{m_{Pl}^2}+1)^2}+1]/2}} = \begin{cases} \hbar/2, m << m_{Pl}/\sqrt{137} \\ \hbar/\sqrt{2}, m >> m_{Pl}/\sqrt{137} \end{cases}$$

При этом при увеличении массы тела, растет кинематическая вязкость, и решение переходит в ламинарный режим. Если квантовое решение микромира содержало большую комптоновскую частоту, и было турбулентным, с большой размазанностью – шероховатостью решения, то квантовое решение для макромира является ламинарным, и размазанности решения нет. Решение в свободном пространстве содержит малый параметр $1/\hbar_{eff} << 1/\hbar$, и волновая функция является плавной, в отличие от пульсирующей волновой функции микромира. Но уравнения те же самые, только постоянная Планка увеличилась.

Если произвести измерение над элементарной частицей, то она изменит свой импульс и координату, и ее собственное значение меняется. Аналогично и тело большой массы при столкновениях меняет свой импульс и координату в соответствии с принципом неопределенности и координата положения равновесия меняется. В случае движения по эллипсу координате положения равновесия соответствует большая и малая полуось эллипса. Координата положения равновесия тела, это аналог собственного значения элементарной частицы.

Для планет Солнечной системы нужно вычислить фазовую скорость звука, которую надо подставлять вместо скорости света в вакууме. Для этого вычислим фазовую скорость в атоме вещества планеты $c_s^2 = \frac{\rho_v c^2}{\rho} = 0.00139^2 cm/s$. Где используется отношение плотности вакуума к плотности электрона в атоме водорода 0.00465г/см^3, умноженное на квадрат скорости света. Тогда фазовая скорость звука в вакууме определяется по формуле $\frac{1}{c_F^2} = \frac{r_e^3}{r_{es}^3}\frac{1}{c_s^2} + \frac{r_{es}^3}{r_e^3}\frac{1}{c^2}$, где используется радиус Земли и расстояние от Земли до Солнца. Фазовая скорость равна 4288см/сек.

Оказывается, что метрический тензор соответствует произведению градиентов скорости частиц вакуума см.[1] стр. 77. Метрический тензор это определенное распределение скорости частиц вакуума и вокруг массивного небесного тела имеется распределение частиц вакуума. Нет необходимости в учете скорости распределения возмущения, частицы вакуума определяют метрический тензор, а значит и потенциал. Причем распределение частиц вакуума соответствует стационарным орбитам небесных тел. Поэтому скорость распространения возмущения является звуковой волной с малой фазовой скоростью.

При этом спин у макротела не постоянный, так же как и скорость распространения возмущения. Это связано с другой формулой связи размера тела и его массы, которые зависят от скорости распространения возмущения в случае элементарных частиц.

Для орбитального квантового числа получим формулу $\frac{L^2}{m_e\alpha} = \frac{h^2 l(l+1)}{m_e e^2} = p$, где величина p радиус вращения вокруг Солнца $r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$. Подставляя $\alpha = e^2 = GmM, h_{eff} = \frac{137Gmm_e}{c_F}\left(\frac{2m_e}{m_e+m}\right)^{0.125}$, получим для орбитального квантового числа l формулу $l = -0.5 + \sqrt{0.25 + \frac{pMc_F^2}{137^2 Gmm_e}(\frac{m_e+m}{2m_e})^{0.25}} = 3.033$. Из численного эксперимента вычислено эффективное значение постоянной Планка, зависящая от массы частицы и массы Земли. Эта величина соответствует квантовому числу земли. За эталонную массу выбрана масса Земли m_e. Это аналог постоянной массы электрона в атоме водорода. Можно выбрать другую массу за эталон, но при этом должно вычисляться целое квантовое число. Кроме того, выбранная планета Земля имеет почти постоянное целое квантовое число и у нее самые благоприятные обстоятельства жизни. Кроме того, Земля имеет минимальное орбитальное квантовое число. Заряд у вращающейся частицы может быть произвольный, что соответствует произвольному заряду ядра атома, при этом формула должна правильно определять квантовое число. Радиус планет описывается формулой $p = \beta_0 l(l+1)m\left(\frac{2m_e}{m_e+m}\right)^{0.25}, \beta_0 = \frac{137^2 Gm_e}{Mc_F^2} = 2.046 \times 10^{-15}$м/кг, где для земли орбитальное квантовое число равно 3. Значение β_0 в таблице и в формуле приведено в разных масштабах единиц, и вычислено по данным таблицы.

$p, 10^{-9}$м	55.45	108.2	149,5	225,9	776,5	1428	2865	4463	5906
e	0.206	0.0068	0.017	0.093	0.048	0.056	0.047	0.0087	0.247
m/m_e	0.053	0.815	1.0	0.107	318	95.22	14.55	17.23	0.9
l	9	3	3	12	0.5	1.5	5	6	22

β_0	10.34	10.8	12.46	11.77	11.6	10.5	10.98	10.8	12.81

Где r большая полуось орбиты $p = r(1-e^2)$. Отличие в значении константы β_0 связано с тем, что у планет есть спутники, и они вращаются не по окружности. Увеличение орбитального квантового числа l не на единицу объясняется не постоянством масс планет Солнечной системы. Планеты Юпитер и Сатурн, имеют большую массу и спиновый момент 0.5 при орбитальном моменте 0,1 соответственно. У них наименьший период вращения. Планеты, определяют орбитальное квантовое число, которое имеет почти постоянное значение β_0.

Величина энергии определится из формулы для эксцентриситета по формуле $e = \sqrt{1 + \frac{2EL}{m\alpha^2}}$, откуда имеем значение энергии $E_n = -\frac{(1-e^2)me^4}{h^2n^2} = -\frac{(1-e^2)M^2c_F^2}{137^2mn^2}(\frac{m_e+m}{2m_e})^{0.25}, n = n_r + l + 1$. Но какова энергия перехода между разными уровнями энергии. Она равна $E_{l+1} - E_l = \frac{(1-e^2)M^2c_F^2}{137^2mn^3}(\frac{m_e+m}{2m_e})^{0.25} = 1.3 * 10^{33}$erg. Причем удары метеоритов массой меньше $10^{13} g = 10^7 t$ не могут изменить орбиту Земли.

Гравитационный радиус Земли вычисленный с использованием фазовой скорости звука 42.88м/сек равен 4.33×10^{11}м при радиусе Земли без учета атмосферы равен 6.38×10^6м. Но фазовая скорость звука во внутренних слоях Земли 11×10^3м/сек, с гравитационным радиусом 6.58×10^6м, получается что радиус земли равен ее гравитационному радиусу с фазовой скоростью звука. Возможно гравитационный радиус небесных тел со средней фазовой скоростью звука совпадает с их размером.

Волновая функция планет близка к единице $\frac{b-a}{r} \ll 1$, так как движение происходит по эллипсу с малой разницей между осями по сравнению с расстоянием до Солнца. Радиальная волновая функция $R_{nl}(r)$ практически не меняется. Плоскость орбиты неизменная, т.е. угол θ постоянный. Меняется угол φ, но от него волновая функция не зависит, т.е. этот угол детерминированный.

Использование квантовой механики для описания движения макротел позволяет объяснить стационарные орбиты планет. Планеты движутся с центростремительным ускорением и должны излучать гравитационную энергию, так как описываются волновым уравнением. Это следует из уравнения ОТО, при малых поправках к метрическому тензору Минковского. Причем гравитационное взаимодействие тел солнечной системы определяется поправками, равными гравитационному радиусу, деленному на радиус планеты, т.е. поправки малы. При этом должно произойти падение на центр, на Солнце. Большая полуось эллипса равна $a = \frac{GMm}{2|E|}$, малая полуось равна $b = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}$ см. [4]§15. Где величина E полная отрицательная энергия тела, величина M равна орбитальному моменту тела. Интенсивность полного излучения ускоренно двигающегося тела $I = \frac{2GMmw^2}{3c^3} = \frac{2GMmV^4}{3c^3R^2}$ см. [5]§67, где величина w ускорение тела. При непрерывном излучении энергии ускоренно двигающегося тела энергия стремится к минус бесконечности, причем значение большой полуоси стремится к нулю, т.е. происходит падение на центр системы. Время, за которое отрицательная энергия удвоится равно $\frac{2GMmV^4}{3c^3R^2}t = \frac{GMm}{2R}$. Откуда имеем время, за которое отрицательная энергия уменьшится по модулю вдвое

$$t = \frac{3c_F^3 R}{4V^4} = 0.001 \text{сек}$$

В этой формуле вместо скорости света в вакууме используется фазовая скорость звука. Это говорит о том, что ускоренное движение планет вызывает их падение на Солнце в течении малого момента времени. Но этого не происходит, так как планеты описываются квантовыми законами, и излучение происходит квантами. Главное квантовое число мало, и так как классическое излучение происходит при больших квантовых числах, требуется сообщить планетам большую энергию, чтобы они перешли в состояние с большим квантовым числом, т.е. с непрерывным квадрупольным излучением. .

Решение систем обыкновенных нелинейных уравнений второго порядка с

учетом дискретного излучения

Аннотация

Системы нелинейных уравнений в частных производных сводятся к системе нелинейных уравнений с счетным количеством неизвестных и уравнений. С помощью редукции удается свести их к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В статье исследуются уравнения с частной производной второго порядка как по времени, так и по координате. Волновое уравнение в частных производных сводится к нелинейному уравнению. Для этого нелинейного уравнения и строилось решение. Удалось построить общую формулу решения относительно функции времени с помощью координат положения равновесия. Получены условия, когда происходит излучение энергии, как непрерывное, так и дискретное.

1. Сведение системы квазилинейных уравнений в частных производных к системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

Решение систем уравнений в частных производных с первой производной по времени исследовано в [6]. Системы уравнений с частной производной по времени второго порядка исследованы в [7].

Рассмотрим систему квазилинейных уравнений второго порядка

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2}+\sum_{l,n=1}^{L}[a_{0nl}(x_1,...,x_3)+\sum_{s=1}^{L}a_{1nls}(x_1,...,x_3)U_s+...]\frac{\partial^2 U_k}{\partial x_l\,\partial x_n}+\\+\sum_{l=1}^{L}[b_{0l}(x_1,...,x_3)+\sum_{s=1}^{L}b_{1ls}(x_1,...,x_3)U_s+...]\frac{\partial U_k}{\partial x_l}+\\+[c_0(x_1,...,x_3)+\sum_{s=1}^{L}c_{1s}(x_1,...,x_3)U_s+...]U_k=d_k(x_1,...,x_3),k=1,...,L\end{gathered}.$$

Решение ищем с помощью подстановки в дифференциальное уравнение функции $\mathbf{U}(t,x_1,...,x_3)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{b}_n(t)\varphi_n(x_1,...,x_3)$. При этом величина $d_k(x_1,...,x_3)$, это внешнее воздействие. Для решения этого уравнения подставляем разложение функции решения в уравнение в частных производных, умножаем на величину $\varphi_s(x_1,...,x_3)$ и интегрируем по пространству. Получим дифференциальное уравнение (1). Функции $\varphi_n(x_1,...,x_3)$ выберем синусоидальными, тогда если решение непрерывная функция, то коэффициенты ряда убывают как величина $1/n^2$, и процесс редукции возможен.

Исследуем нелинейное обыкновенное уравнение со второй производной по времени, где при действительных аргументах $b_1,...,b_N$ уравнение имеет однозначную правую часть

$$\frac{d^2 b_s}{dt^2} = F_s(b_1,...,b_N), s = 1,...,N\,. \qquad (1)$$

Системы уравнений, содержащие первую производную по времени в правой части, приводятся к виду (1). Допустим, имеем уравнение

$$\frac{d^2 b_s}{dt^2} = F_s(b_1,...,b_N,\frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt}), s = 1,...,N\,.$$

Продифференцируем его по времени, получим

$$\frac{d^3 b_s}{dt^3} = \frac{\partial F_s(b_1,...,b_N,\frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt})}{\partial b_k}\frac{db_k}{dt} + \frac{\partial F_s(b_1,...,b_N,\frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt})}{\partial b_k} \times$$

$$\times F_s(b_1,...,b_N,\frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt})$$

Введя новые переменные $y_n = b_n, y_{n+N} = \frac{db_n}{dt}, n = 1,...,N;$, получим систему уравнений с новыми координатами равновесия

$$\frac{d^2 y_s}{dt^2} = F_s(y_1,...,y_{2N}), s = 1,...,2N\,.$$

Если величина $F_s(b_1,...,b_N,0,...,0) = 0, s = 1,...,N$ допускает конечное количество совокупностей корней, то систему можно представить в виде

$$\frac{dy_{s+N}}{dt} = F_s(y_1,...,y_N, y_{N+1},...,y_{2N}), s = 1,...,N$$
$$\frac{dy_s}{dt} = y_{s+N}; y_s = b_s, y_{s+N} = \frac{db_s}{dt}.$$

С координатами положения равновесия

$$F_s(\beta_1^k,...,\beta_N^k,0,...,0) = 0, k = 1,...,K$$
$$y_{s+N} = \beta_{s+N}^1 = 0; s = 1,...,N.$$

Матрица этого преобразования имеет вид

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Собственные числа этого линейного преобразования определятся из уравнения $\lambda^4 - a_{11}\lambda^2 - a_{22}\lambda^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. В случае произвольного порядка матрицы имеем

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b - dc^{-1}a \\ c & d \end{vmatrix} = |c| \cdot |b - dc^{-1}a| = |c||E - c^{-1}\lambda^2|$$

Где матрица $c_{sk} = \frac{\partial F_s}{\partial x^k}, b_{sk} = \delta_{sk}, a_{sk} = d_{sk} = -\lambda\delta_{sk}$. Т.е. корень равен $\lambda = |\Lambda_\alpha^{1/2}| \exp(i\alpha/2 + \pi i p), p = 0,1$ и наряду с корнем $\lambda = |\Lambda_\alpha^{1/2}| \exp(i\alpha/2)$ имеется корень $\lambda = -|\Lambda_\alpha^{1/2}| \exp(i\alpha/2)$ в случае $p = 0$ и $p = 1$. Т.е. в любом случае положение равновесия не устойчиво, кроме случая $\alpha = \pi(2k+1)$, когда наблюдается фазовая траектория типа центр.

2. Решение системы нелинейных уравнений

Теорема 1. Рассматривается задача Коши при произвольных действительных начальных условиях для системы нормальных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (1). Она имеет конечное число не кратных положений равновесия. Случай вырожденного решения задачи Коши –

положения равновесия, не рассматривается. В случае если у системы (1) имеются комплексно-сопряженные положения равновесия с действительной частью, то при конечном аргументе t действительное решение задачи Коши системы (1) при действительных начальных условиях стремится к бесконечности, при этом комплексное решение конечно.

Доказательство.

Приведем правую часть этого уравнение к уравнению в собственных значениях, воспользовавшись преобразованием $b_s(t) = \sum_l g_{sl} c_l(t)$, где величина собственных векторов g_{sl} и собственных чисел Λ_l определяется из уравнений $|\frac{\partial F_s}{\partial b_s} - \Lambda_k^2 \delta_{sn}| = 0, (\frac{\partial F_s}{\partial b_s} - \Lambda_k^2 \delta_{sn}) g_{nk} = 0$.

Где величина $\frac{\partial F_s}{\partial b_n}$ определена в координатах положения равновесия системы дифференциальных уравнений. В новых переменных $c_l(t)$ дифференциальное уравнение запишется в виде

$$\frac{d^2 c_l}{dt^2} = (\Lambda_l^s)^2 (c_l - \alpha_l^s) + (c_l - \alpha_l^s)^2 P_l(c_1,...,c_N) = \Phi_l(c_1,...,c_N). \quad (2)$$

Находим координаты положения равновесия этой системы нелинейных дифференциальных уравнений α_l^s, которые определятся из уравнений $\Phi_l(\alpha_1^s,...,\alpha_N^s) = 0, l = 1,...,N$. Тогда уравнение запишется в виде

$$\frac{d^2 c_l}{dt^2} = \exp[H_l(t)] \prod_{s=1}^{S} (c_l - \alpha_l^s). \quad (3)$$

Где величина

$$\exp[H_l(t)] = \frac{\Phi_l(c_1,...,c_N)}{\prod_{s=1}^{S} (c_l - \alpha_l^s)}.$$

При подстановке этой функции в дифференциальное уравнение (3), получим уравнение (2). Если нет кратных положений равновесия, в точке положения равновесия множитель $\exp[H_l(t)]$ равен

$$\exp[H_l(t)] = \frac{\partial\Phi_l(\alpha_1^s,...,\alpha_N^s)/\partial c_l}{\prod_{n=1}^{s-1}(\alpha_l^s-\alpha_l^n)\prod_{n=s-1}^{S}(\alpha_l^s-\alpha_l^n)} = \frac{(\Lambda_l^s)^2}{\prod_{n=1}^{s-1}(\alpha_l^s-\alpha_l^n)\prod_{n=s-1}^{S}(\alpha_l^s-\alpha_l^n)}.$$

Причем, так как нет кратных положений равновесия, величина Λ_l^s не равна нулю, и значит, множитель $\exp[H_l(t)]$ в ноль не обращается в координатах положения равновесия.

Используя условие

$$\exp[-H_l(c_1,...,c_N)]\frac{d^2c_l}{dt^2} = \frac{d^2c_l}{dh_l^2}.$$

Воспользуемся равенством

$$\frac{d^2c_l[h_l(t)]}{(dt)^2} = \frac{d}{dt}[\frac{dc_l[h_l(t)]}{dh(t)}\frac{dh(t)}{dt}] = \frac{dc_l[h_l(t)]}{dh_l(t)}\frac{d^2h_l(t)}{dt^2} + \frac{d^2c_l[h_l(t)]}{[dh_l(t)]^2}[\frac{dh_l(t)}{dt}]^2 =$$
$$= 2\frac{dc_l[h_l(t)]}{dh_l(t)}[\frac{d\sqrt{h_l(t)}}{dt}]^2 + \frac{d^2c_l[h_l(t)]}{[dh_l(t)]^2}[\frac{dh_l(t)}{dt}]^2 = \quad (4)$$
$$= \frac{dc_l[h_l(t)]}{dh_l(t)}\frac{[dh_l(t)]^2}{2h_l(t)dt^2} + \frac{d^2c_l[h_l(t)]}{[dh_l(t)]^2}[\frac{dh_l(t)}{dt}]^2$$

Тождество (4) получается с помощью равенства $\frac{d^2h_l(t)\}}{2[d\sqrt{h_l(t)}]^2} = 1$. Откуда получим уравнение (5). Интегрируя уравнение (5), получим зависимость $h_l = h_l(t)$.

$$\exp\{-H_l[c_1(h_l),...,c_N(h_l)]\}\{\frac{dc_l[h_l(t)]}{2h_l(t)dh_l(t)} + \frac{d^2c_l[h_l(t)]}{[dh_l(t)]^2}\}[\frac{dh_l(t)}{dt}]^2 = \frac{d^2c_l[h_l(t)]}{[dh_l(t)]^2} \quad (5)$$

При этом, зная из решения дифференциального уравнения зависимость $c_l(h_l)$ определим зависимость $h_l(t)$ из уравнения (5).

Умножаем это уравнение на величину $\frac{dc_l}{dh_l}$ и интегрируем по c_l. Получим величину первого интеграла

$$\mathrm{H}_l = (\frac{dc_l}{dh_l})^2/2 - \int_{c_l^0}^{c_l} D(c_l)dc_l = (\frac{dc_l}{dh_l})^2|_{h_l=h_l^0}/2. \quad (7)$$

При значении скачка от значения c_l^1 до значения c_l^2 и скачка скорости получим выделившуюся энергию излучения

$$\Delta E_k = \sum_{l=1}^{N} [\Delta(\frac{dc_l}{dh_l})^2 / 2 - \int_{c_l^1}^{c_l^2} D(c_l) dc_l] = \sum_{l=1}^{N} (\mathrm{H}_l^2 - \mathrm{H}_l^1)\,. \qquad (8)$$

Разделим дифференциальное уравнение (6) на правую часть и полученную дробь разложим на сумму простых дробей. Получим

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{\lambda_l^s d^2 c_l}{c_l - \alpha_l^s} = dh_l^2 \qquad (9)$$

$$\lambda_l^s = \frac{1}{\prod_{k=1}^{s-1} (\alpha_l^s - \alpha_l^k) \prod_{k=s+1}^{S} (\alpha_l^s - \alpha_l^k)}\,.$$

Следует различать величину $d^2 c_l = c_l(h_l + \Delta h_l) + c_l(h_l - \Delta h_l) - 2c_l(h_l)$ и величину $dh_l^2 = (\Delta h_l)^2$ при условии $\Delta h_l \to 0$.

При этом имеем $\int_{h_l^0}^{h_l} dx \int_{h_l^0}^{x} dy = (h_l - h_l^0)^2 / 2 = p(h_l)$. $\frac{d^2 p(h_l)}{dh_l^2} = 1$. Или $d^2 p(h_l) = dh_l^2$. Причем имеем $\frac{d^2 (c_l)^2 / 2}{dc_l^2} = 1$, запишем это равенство по-другому

$$\frac{d^2 c_l}{d(\sqrt{2c_l})^2} = 1 \qquad (10)$$

Т.е. равенство (9) и (10) получим

$$d^2 g_l = \sum_{s=1}^{S} \frac{\lambda_l^s d(\sqrt{2c_l})^2}{c_l - \alpha_l^s} = dh_l^2 = d^2 p(h_l) \qquad (9а)$$

Двойной интеграл можно представить в виде $g_l(\sqrt{c_l}) = \int_{\sqrt{c_l^0}}^{\sqrt{c_l}} \int_{\sqrt{c_l^0}}^{x} f(y) dy dx$ или имеем в случае положительного значения c_l. В случае отрицательного значения c_l надо брать корень из числа со знаком минус

$$\frac{d^2 g_l(\sqrt{c_l})}{d(\sqrt{c_l})^2} = f(\sqrt{c_l}) = \frac{2\lambda_l^s}{(\sqrt{c_l} - \sqrt{\alpha_l^s})(\sqrt{c_l} + \sqrt{\alpha_l^s})} = \frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}} (\frac{1}{\sqrt{c_l} - \sqrt{\alpha_l^s}} - \frac{1}{\sqrt{c_l} + \sqrt{\alpha_l^s}})\,. \qquad (11)$$

Проверяется это равенство путем подстановки $g_l(\sqrt{c_l}) = \int\limits_{\sqrt{c_l^0}}^{\sqrt{c_l}} \int\limits_{\sqrt{c_l^0}}^{x} f(y)dydx$ в дифференциальное уравнение (11). Значение интеграла равно

$$g_l(x) = \int\limits_{x_0}^{x} [\ln(y-a) - \ln(x_0 - a) + 2\pi i\Delta n]dy = (y-a)[\ln(y-a) + 2\pi i\Delta n - 1]|_{y=x_0}^{y=x} -$$

$$-(x-x_0)\ln(x_0 - a)$$

Из равенства (9а), получим $d^2 g_l(c_l) = d^2 p(h_l)$, откуда имеем $g_l(c_l) = p(h_l), g_l(c_l^0) = p(h_l^0) = 0$,

$$\frac{dg_l}{dh_l}|_{h_l=h_l^0} = \sum_{s=1}^{S} \frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}}[\ln(\sqrt{c_l} - \sqrt{\alpha_l^s}) - \ln(\sqrt{c_l} + \sqrt{\alpha_l^s})]\frac{dc_l}{2\sqrt{c_l}dh_l}|_{h_l=h_l^0} = \frac{dp}{dh_l}|_{h_l=h_l^0} = a_l$$

Откуда следует начальное условие для величины $\frac{dp_l}{dh_l}|_{h_l=h_l^0}$. Записав это равенство для произвольного значения h_l, получим формулу для определения dc_l / dh_l.

Интегрируя (11), получим

$$g(c_l) = \sum_{s=1}^{S} \{\frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}}[(\sqrt{c_l} - \sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l} - \sqrt{\alpha_l^s}) + 2\pi i p_l^s - 1] -$$

$$-(\sqrt{c_l^0} - \sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l^0} - \sqrt{\alpha_l^s}) + 2\pi i q_l^s - 1] -$$

$$-(\sqrt{c_l} + \sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l} + \sqrt{\alpha_l^s}) + 2\pi i p_l^s - 1] +$$

$$+(\sqrt{c_l^0} + \sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l^0} + \sqrt{\alpha_l^s}) + 2\pi i q_l^s - 1] -$$

$$-(\sqrt{c_l} - \sqrt{c_l^0})[\ln(\sqrt{c_l^0} - \sqrt{\alpha_l^s}) - \ln(\sqrt{c_l^0} + \sqrt{\alpha_l^s})\} = (h_l - h_l^0)^2 / 2 + a_l(h_l - h_l^0) = p(h_l)$$

Где имеющие одинаковую структуру значения логарифма имеют одинаковую мнимую часть. Произведя элементарные преобразования по суммированию коэффициентов при целых числах, получим

$$g(c_l)=\sum_{s=1}^{S}\ [\frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}}[(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}-\sqrt{\alpha_l^s})]+$$

$$+4\pi i\sqrt{\alpha_l^s}\Delta n_l^s-(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}+\sqrt{\alpha_l^s})]\}=.\quad(12)$$

$$=(h_l-h_l^0)^2/2+a_l(h_l-h_l^0)=p(h_l),$$

$$n_l^s=q_l^s-p_l^s$$

Эта формула получена в предположении, что состояния в начальный и текущий момент времени не одинаковы, и поэтому может быть разная мнимая ветвь логарифма. Это происходит в случае, если система может излучить энергию и тогда, начальное и конечное состояние имеют разную ветвь логарифма и решение зависит от целого числа.

Определим первый интеграл, зависящий от времени

$$\sum_{s=1}^{S}\ [\frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}}[(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}-\sqrt{\alpha_l^s})]+$$

$$+4\pi i\sqrt{\alpha_l^s}\Delta n_l^s-(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}+\sqrt{\alpha_l^s})]\}=$$

$$=(h_l-h_l^0)^2/2+a_l(h_l-h_l^0)$$

Выведем формулу для решения в действительной плоскости. Опуская индексы, преобразуем формулу, суммируя с комплексно сопряженной формулой

$$2\operatorname{Re}\lambda(\sqrt{c}/\sqrt{\alpha}-1)\ln(\sqrt{c}-\sqrt{\alpha})=\operatorname{Re}2(\lambda_r+i\lambda_i)[\sqrt{c(\alpha_r-i\alpha_i)/(\alpha_r^2+\alpha_i^2)}-1]\times$$

$$\times\{\ln[(\sqrt{c}-\beta_r)^2+\beta_i^2]^{1/2}+i\frac{\pi}{2}+i\arctan\frac{\sqrt{c}-\beta_r}{\beta_i}\}=$$

$$=2[\lambda_r(\sqrt{c}\gamma_r-1)+\lambda_i\sqrt{c}\gamma_i]\ln[(\sqrt{c}-\beta_r)^2+\beta_i^2]-2[\lambda_i(\sqrt{c}\gamma_r-1)-\lambda_r\sqrt{c}\gamma_i]\times$$

$$\times[\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{\sqrt{c}-\beta_r}{\beta_i}],\beta_r+i\beta_i=\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha_r^2+\alpha_i^2}+\alpha_r}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha_r^2+\alpha_i^2}-\alpha_r}{2}}$$

$$\gamma_r+i\gamma_i=\frac{\beta_r-i\beta_i}{\sqrt{\alpha_r^2+\alpha_i^2}}$$

Разрешая это уравнение относительно величины аргумента $\arctan\frac{\sqrt{c}-\beta_r}{\beta_i}$, получим

$$\frac{\sqrt{c_l}-\beta_{lr}^s}{\beta_{li}^s}=\tan[-\frac{(h_l-h_l^0)^2/2+a_l(h_l-h_l^0)}{2[\lambda_{li}^s(\sqrt{c_l}\gamma_r-1)-\lambda_{lr}^s\sqrt{c_l}\gamma_i]}+\delta_l] \quad (13)$$

Эта функция при наличии комплексных координат положения равновесия стремится к бесконечности при решении в действительной плоскости. При этом комплексное решение конечно. Допустим, левая часть ограничена. Для этого необходимо, чтобы $|\frac{(h_l-h_l^0)^2/2+a_l(h_l-h_l^0)}{2[\lambda_{li}^s(\sqrt{c_l}\gamma_r-1)-\lambda_{lr}^s\sqrt{c_l}\gamma_i]}|<\frac{\pi}{2}-\delta_l$. Т.е. необходимо, чтобы $\lim\limits_{h_l\to\infty}\sqrt{c_l}=\infty$, приходим к противоречию с ограниченностью левой части.

Но уравнения движения небесных тел имеют точку ветвления. Если записать уравнение движения

$$\begin{gathered}\frac{d\mathbf{V}_l}{dt}=\mathbf{F}_l(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N)\\ \frac{d\mathbf{r}_l}{dt}=\mathbf{V}_l\end{gathered}. \qquad (14)$$

То при скорости $\mathbf{V}_l=0$ движения они допускают точку ветвления

$$\begin{gathered}-\frac{d\mathbf{V}_l}{dt}=\mathbf{F}_l(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N)\\ \frac{d\mathbf{r}_l}{dt}=-\mathbf{V}_l\end{gathered}, \qquad (15)$$

приводящую к замкнутости траектории тел с отрицательной энергией. Уравнения движения для обоих уравнений (14) и (15) имеет вид

$$\frac{d^2\mathbf{r}_l}{dt^2}=\mathbf{F}_l(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N)$$

Т.е. получается, что точка ветвления этого уравнения делает возможным действительное решение. Если же ветвление решения не учитывать и считать одну ветвь решения, то получается бесконечное действительное решение.

У решения системы (6) можно понизить порядок интегрирования, для чего умножим его на величину $V_l=\frac{dc_l}{dh_l}$, получим

$$\frac{d}{dh_l}[V_l^2/2-\int D_l(c_l)dc_l]=0 .$$

Разрешая это уравнение относительно V_l, получим

$$\frac{dc_l}{dh_l}=V_l=\sqrt{(\frac{dc_l}{dt})^2|_{t=t_0}+2\int\limits_{c_l^0}^{c_l}D_l(x_l)dx_l}=\sqrt{\prod_{k=1}^{K}(c_l-\beta_l^k)} . \quad (16)$$

Где действительные значения β_l^k растут с ростом индекса k. Причем возможны две ветви решения, положительная и отрицательная. Причем величина $c_l\in[\beta_l^k,\beta_l^{k+1}]$, где решение действительно. Если знак корня положителен, то величина c_l растет, достигает значения β_l^{k+1}. Знак корня становится отрицателен, и величина c_l убывает, до значения β_l^k, чтобы вновь расти.

Причем, так как для уравнения движения в гравитационном поле достижение нуля для величины подкоренного выражения в гравитационном поле при большой скорости требует большого времени, будет долго продолжаться счет в действительной плоскости. Необходимо изменить знак квадратного корня для увеличения значения подкоренного выражения, в противном случае решение станет комплексным, и так как счет идет в действительной плоскости, будет стремиться к бесконечности. Численное решение будет несколько проскакивать через ноль, меняя знак корня, при этом будет расти кинетическая энергия, и в результате тело будет обладать положительной энергией и покинет эллиптическую траекторию. Если же тело будет точно менять в нуле скорости знак корня, то тело будет иметь стационарную орбиту.

Какое решение будет реализовываться в эксперименте, зависит от случайных флуктуаций решения в окрестности нуля скорости в некоторой системе координат. При многократном повторении нуля скорости в результате будет реализовано комплексное решение, а численный счет в действительной плоскости приведет к бесконечному решению. В этом случае нужно переходить к комплексному конечному решению.

Используя тождество $\sum_{s=1}^{S} \lambda_l^s = 0$ и рассматривая большие значения c_l получим равенство

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}} (\sqrt{c_l} - \sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l^0} + \sqrt{\alpha_l^s}) - \ln(\sqrt{c_l^0} - \sqrt{\alpha_l^s})] + \\ + 4\pi i \lambda_l^s \Delta n_l^s = (h_l - h_l^0)^2 / 2 + a_l (h_l - h_l^0).$$

из этого равенства следует, что при росте времени модуль переменной c_l растет, т.е. происходит расширение Вселенной. При длительном расширении величина $c_l = (h_l - h_l^0)^4 / \Lambda_l^2$. Взяв производную по времени от координаты получим, производную от радиуса расширения материи

$$\frac{dc_l}{dt} = 4c_l^{3/4} \frac{dh_l}{dt} / \Lambda_l^{1/2}$$

$$\Lambda_l = \sum_{s=1}^{S} \frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}} [\ln(\sqrt{c_l^0} + \sqrt{\alpha_l^s}) - \ln(\sqrt{c_l^0} - \sqrt{\alpha_l^s})] >> 1.$$

Но при переходе с одной ветви решения на другую по формуле (15) или (16) координата уравнения движения в среднем не растет. При использовании одной ветви решения координата растет. Если рассматриваются галактики на большом расстоянии, то разность между координатами положения равновесия велика, и система не доходит до точки ветвления и наблюдается одна ветвь решения и значит координата растет. Если расстояния малы, то другая ветвь решения достигается быстро, скорость разбегания мала и постоянна по модулю и разбегание не наблюдается, и координата в среднем не растет.

Потенцируя выражение (12), получим

$$\prod_{s=1}^{S} \frac{(\sqrt{c_l} - \sqrt{\alpha_l^s})^{\lambda_l^s(\sqrt{c_l}/\sqrt{\alpha_l^s} - 1)} (\sqrt{c_l^0} + \sqrt{\alpha_l^s})^{\lambda_l^s(\sqrt{c_l}/\sqrt{\alpha_l^s} + 1)}}{(\sqrt{c_l} + \sqrt{\alpha_l^s})^{\lambda_l^s(\sqrt{c_l}/\sqrt{\alpha_l^s} + 1)} (\sqrt{c_l^0} - \sqrt{\alpha_l^s})^{\lambda_l^s(\sqrt{c_l}/\sqrt{\alpha_l^s} - 1)}} \times \\ \times \exp(4\pi i \lambda_l^s n_l^s) = \exp[(h_l - h_l^0)^2 / 2 + a_l (h_l - h_l^0)] \quad (17)$$

Это уравнение может привести к изменению монотонности у функции $h_l(t)$, вместо возрастания будет убывание функции $h_l(t)$ или наоборот. Величина $h_l(t)$ может быть периодической функцией времени.

Действие для каждого дифференциального уравнения определяется по формуле

$$S_l = \int\limits_{h_l^0}^{h_l} (-\mathrm{H}_l dh_l + p_l dq_l);$$

При этом приращение действия в случае комплексного решения равно $dS_l = d\arg c_l$. Значит, в случае ламинарного действительного решения функция Гамильтона H_l, вычисленная по этим безразмерным формулам, где вместо времени используется $h_l(t)$, равна нулю, что и является первыми интегралами. Из этих формул имеем $\mathrm{H}_l = -\dfrac{\partial S_l}{\partial h_l}, p_l = \dfrac{\partial S_l}{\partial c_l}$.

Действие для каждого дифференциального уравнения определяется по формуле

$$S_l = \int\limits_{h_l^0}^{h_l} (-\mathrm{H}_l dh_l + p_l dq_l);$$

При этом приращение действия в случае комплексного решения равно $dS_l = d\arg c_l$. Значит, в случае ламинарного действительного решения функция Гамильтона H_l, вычисленная по этим безразмерным формулам, где вместо времени используется $h_l(t)$, равна нулю, что и является первыми интегралами.

Из этих формул имеем $\mathrm{H}_l = -\dfrac{\partial S_l}{\partial h_l}, p_l = \dfrac{\partial S_l}{\partial c_l}$.

$$\mathrm{H}_l = -\frac{\partial \arg c_l}{\partial h_l} = -\frac{\partial \arctan \dfrac{\operatorname{Im} c_l}{\operatorname{Re} c_l}}{\partial h_l} = \frac{\operatorname{Im} c_l \dfrac{\partial \operatorname{Re} c_l}{\partial h_l} - \operatorname{Re} c_l \dfrac{\partial \operatorname{Im} c_l}{\partial h_l}}{(\operatorname{Re} c_l)^2 + (\operatorname{Im} c_l)^2}.$$

$$p_l = \frac{\partial \arg c_l}{\partial c_l} = \frac{\partial \arctan \dfrac{\operatorname{Im} c_l}{\operatorname{Re} c_l}}{\partial c_l} = \frac{1}{2[1 + (\dfrac{\operatorname{Im} c_l}{\operatorname{Re} c_l})^2]} \left(\frac{\partial \dfrac{\operatorname{Im} c_l}{\operatorname{Re} c_l}}{\partial \operatorname{Re} c_l} + \frac{\partial \dfrac{\operatorname{Im} c_l}{\operatorname{Re} c_l}}{\partial i \operatorname{Im} c_l}\right) =$$

$$= \frac{-\operatorname{Im} c_l - i \operatorname{Re} c_l}{2[(\operatorname{Re} c_l)^2 + (\operatorname{Im} c_l)^2}$$

Где воспользовались формулой $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \operatorname{Re} z}+\frac{\partial}{\partial i \operatorname{Im} z})$, см. [8] раздел 2.1. Разрешая относительно $h_l-h_l^0$ уравнение (17), продифференцируем полученное значение по величине h_l, получим $F_l(c_l)\frac{dc_l}{dh_l}=1$, откуда имеем N первых интегралов, содержащий функцию Гамильтона

$$\mathrm{H}_l(c_l,h_l,a_l,H_l)=\frac{\operatorname{Im} c_l \operatorname{Re}\frac{1}{F_l(c_l)}-\operatorname{Re} c_l \operatorname{Im}\frac{1}{F_l(c_l)}}{(\operatorname{Re} c_l)^2+(\operatorname{Im} c_l)^2}, \quad (18)$$

$$p_l=\frac{-\operatorname{Im} c_l-i\operatorname{Re} c_l}{2[(\operatorname{Re} c_l)^2+(\operatorname{Im} c_l)^2};$$

Т.е. имеется N первых интегралов, зависящих от h_l.

Из второго уравнения (18) определим импульс p_l. Левую часть первого уравнения (18) назовем материальным значением энергии (так как она равна значениям суммы кинетической и потенциальной энергии), а правую часть полевым значением энергии, так как она определяется мнимой фазой решения. При этом первый интеграл зависит от 2 констант H_l, a_l. В случае действительного положительного значениях c_l, H_l, α_l^s имеем первый интеграл - функцию Гамильтона

$$\mathrm{H}_l=\mathrm{H}_l(c_l,h_l,a_l,H_l), l=1,\dots,N.$$

Первая формула (17) это закон сохранения энергии с учетом излучения, причем формула для значения излучения зависит от $h_l-h_l^0$.

При этом правая и левая часть первого уравнения (17) может быть комплексной. Но при скачкообразном изменении левой части (18), скачком изменится и правая часть, причем величины H_l, a_l останутся неизменными, т.е. константы первого интеграла останутся неизменными.

Эта формула получена в предположении, что начальное и конечное состояние решения не одинаковы. Если между ними произошло излучение, то энергия системы изменится в соответствии со значением логарифма и появится зависимость от целого числа n_l^s, соответствующая разным ветвям логарифма.

При этом определится значение c_l как функция квантового числа n_l^s из уравнений (17). Определение решения по формуле (17) может содержать точки ветвления решения. Но при этом вторая производная от решения стремится к бесконечности в силу наличия точки ветвления, и значит, нарушаются условия единственности и существования решения задачи Коши этого обыкновенного дифференциального уравнения. При этом сходящийся ряд, описывающий решения в точке ветвления не существует, значит, решение задачи Коши в комплексной плоскости в точке ветвления не существует, а происходит скачок решения.

Переход с одного значения целого числа на другое связан с изменением фазы аргумента

$$\begin{gathered}\{(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}-\sqrt{\alpha_l^s})]-\\ -(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}+\sqrt{\alpha_l^s})]\}/(4\pi\sqrt{\alpha_l^s}i)\}=n_l^s \quad (19)\\ \sqrt{c_l}[\ln(\sqrt{c_l^0}+\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}-\sqrt{\alpha_l^s})]/(4\pi i)\}=n_l^s-i\eta;\end{gathered}$$

При условии $c_l \to \infty$ получаем асимптотическую формулу

$$\sqrt{c_l}=\frac{\pm 4\pi i n_l^s+4\pi\eta}{\ln(\sqrt{c_l^0}+\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}-\sqrt{\alpha_l^s})}=i\alpha(n_l^s-i\eta)$$

Значение координаты, при котором образуется скачок. Причем нужно учитывать разные листы римановой поверхности ветви логарифма.

При этом безразмерный импульс излучения пропорционален

$$p_{n_l^s}=\frac{1}{c_l}\sim-\frac{1}{\alpha^2(n_l^s-i\eta)^2},$$

$$\begin{gathered}\mathrm{H}_l(c_l,h_l,a_l,H_l)=\frac{\operatorname{Im}c_l\operatorname{Re}\dfrac{1}{F_l(c_l)}-\operatorname{Re}c_l\operatorname{Im}\dfrac{1}{F_l(c_l)}}{(\operatorname{Re}c_l)^2+(\operatorname{Im}c_l)^2}=\\ =\frac{2n_l^s\eta\operatorname{Re}\dfrac{1}{F_l[\alpha^2(n_l^s-i\eta)^2]}-[(n_l^s)^2-\eta^2]\operatorname{Im}\dfrac{1}{F_l[\alpha^2(n_{0l}^s-i\eta)^2]}}{\alpha^2[(n_l^s)^2+\eta^2]^2}.\end{gathered}$$

Как только телу сообщают энергию, происходит перестройка целого числа, изменение на единицу, и как следствие скачок решения задачи при неизменном первом интеграле (18) проявится зависимость $c_l = c_l(n_l^s)$. Скачок решения определяется зависимостью $c_l = c_l(n_l^s)$ при неизменных константах H_l, a_l в первом интеграле (18). При этом как скачкообразное, так и непрерывное изменение материальной части энергии H_l компенсируется изменением излучения. В случае положительных, а значит, действительных значений c_l, α_l^s материальная часть энергии H_l сохраняется и никаких скачков и излучений не будет, правая часть (19) равна нулю, значит, величина n_l^s неизменна.

Литература

1. *Якубовский Е.Г.* ЧАСТИЦЫ ВАКУУМА, ОПИСЫВАЮЩИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И ПОЛЯ Реферативный журнал «Научное обозрение» 2016,т.2, стр.58-80, http://science-review.ru/abstract/pdf/2016/2/662.pdf
2. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики М.: Наука , 1978г, 320стр.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика Нерелятивистская теория. Т. III, М.: Наука, 1989г., 768стр.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. Т. I, М.: Наука, 1965г., 203стр.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. Т. II, М.: Наука, 1973г.,503стр.
6. Якубовский Е.Г. Комплексные ограниченные решения уравнений в частных производных. Материалы международной научно-практической конференции. Теоретические и практические аспекты естественных и математических наук. Новосибирск: Изд. «Сибак», 2012, с. 19-30. http://sibac.info/index.php/2009-07-01-10-21-16/5809-2013-01-17-07-57-12
7. Якубовский Е.Г. Комплексные решения уравнений в частных производных. Международный независимый институт Математики и Систем «МиС», №8, 2014, с. 60-66 http://math-systems.ru/files/Arhiv/19-20.09.2014/mis8.pdf#page=66

8. Вергелес С.Н. Лекции по квантовой электродинамике М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008г., 248стр