Использование вместо радиуса тела его спектральную функцию для нахождения коэффициентов ряда - решения уравнения Гельмгольца

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

При записи граничных условий у тела с переменным радиусом границы возникают проблемы. Если же вместо радиуса использовать спектр радиуса, то проблемы не возникают, так как каждая компонента спектра - это константа, не зависящая от координат. Удалось получить решение для тела с произвольной гладкой поверхностью, и решение для сферы с произвольным гладким изменением свойств внутри сферы.

Существует координатное и связанное с ним преобразованием Фурье спектральное представление функции. Заменим радиальное представление функции на его спектр $b_{mn} = \int\limits_0^L \int\limits_0^{2\pi} r(\varphi, z) \exp(imz / L + in\varphi) d\varphi dz / 2\pi L$. Но необходимо, чтобы коэффициенты ряда стремились к нулю с ростом индекса. И та, и другая величина имеет одинаковую размерность, если интегрировать по безразмерной величине. Рассматриваем спектральную характеристику радиуса, вместо радиуса для нахождения значения поправок к средним значениям коэффициентов. Тогда в задачах электродинамики, имеем значения коэффициентов все более точное. В случае если радиус поверхности равен константе, эти зависимости совпадают. В случае зависимости радиуса поверхности от угла и от продольной координаты, имеем переменный спектр, зависящий от частоты. Величина b_{00} является средним радиусом тела и при вычислении с ее помощью сигнала определяет среднее значение коэффициента c_{nm00}. Следующая гармоника спектра $b_{\alpha\beta}$ уточнит среднее значение коэффициента $c_{nm\alpha\beta}$. В результате получим значение коэффициентов $c_{nm} = \sum\limits_{\alpha,\beta=0}^{N} c_{nm}(b_{\alpha\beta}) \exp(-i\beta z / L - i\alpha\varphi)$. Таким образом задачу дифракции на произвольном теле сведем к множеству решений на сфере с уменьшающимся радиусом. Ряд получается сходящимся, так как гармоники $b_{\alpha\beta}$ с ростом индекса стремятся к нулю. Причем при нулевом радиусе получаем нулевой член $\lim\limits_{\substack{\alpha\to\infty\\ \beta\to\infty}} c_{nm}(b_{\alpha\beta}) = \lim\limits_{\substack{\alpha\to\infty\\ \beta\to\infty}} c_{nm}(0) = 0$.

Если коэффициенты спектра радиуса для сферических функций не стремятся к нулю, то решение задачи невозможно в сферических функциях. Т.е. коэффициенты ряда $b_{\alpha\beta}$ разложения радиуса тела от углов $r(\theta,\varphi) = \sum\limits_{\alpha=0}^{N}\sum\limits_{\beta=-\alpha}^{\alpha} b_{\alpha\beta}Y_{\alpha\beta}(\theta,\varphi)$ могут не стремиться к нулю. Так в случае разложения функции $\exp(ikr\cos\theta)$ коэффициенты не стремятся к нулю, так как $\theta\in[0,\pi]$ и функция на этом отрезке не непрерывная периодическая. Но в случае цилиндра угловая и продольная зависимость определяют сходящийся ряд и можно решить задачу дифракции с переменным сечением цилиндра.

Имеем формулу для звукового поля в трубопроводе

$$\begin{gathered} u = \sum_{n,m=0}^{N}\sum_{\alpha,\beta=0}^{N} c_{nm}(b_{\alpha\beta})J_n(\frac{\omega_m}{c}r)\exp[i(m-\beta)z/L + i(n-\alpha)\varphi]/N = \\ = \sum_{p,q=0}^{N}\sum_{n,m=0}^{N} c_{nm}[b_{(p-n)(q-m)}]J_n(\frac{\omega_m}{c}r)\exp(iqz/L + ip\varphi)/N, \omega_m^2/c^2 = k^2 - \frac{m^2}{L^2} \end{gathered} \quad (1)$$

В случае трубопровода с сечением, зависящим от угла, граничные условия поставить сложно, так как имеем разный радиус трубопровода. Находим его радиальное представление. Спектральная характеристика формулы (1), равна

$$\begin{gathered} \tilde{u}_{nm(p-n)(q-m)} = c_{nm}[b_{(p-n)(q-m)}]J_n[\frac{\omega_m}{c}b_{(p-n)(q-m)}] = c_{nm}(b_{\alpha\beta})J_n(\frac{\omega_m}{c}b_{\alpha\beta}), \omega_m^2/c^2 = k^2 - \frac{m^2}{L^2}, \\ c_{nm} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{N} c_{nm}(b_{\alpha\beta})\exp(-i\beta z/L - i\alpha\varphi) \end{gathered} . \quad (2)$$

Для каждого значения спектра радиуса $b_{\alpha\beta}$ находим решение в виде коэффициентов $c_{nm}(b_{\alpha\beta})$ из граничных условий. Спектр является константой, зависящей от индексов. В результате получили разложение (1), каждый член которого удовлетворяет граничному условию с радиусом, равным спектру. Но полученный ряд (1) удовлетворяет волновому уравнению, и его спектральная характеристика каждого члена удовлетворяет граничным условиям. Надо использовать комплексную спектральную функцию, т.е. аргумент у функции Бесселя может оказаться отрицательным, что приведет к комплексной скорости. Это не устранимое комплексное значение, действительную часть которого надо интерпретировать как среднее значение, а мнимую часть как среднеквадратичное отклонение с гауссовой функцией плотности вероятности.

В случае не периодического радиуса и сечения, спектр тоже является непрерывным, но решение получается в виде интеграла.

Зная спектральную характеристику решения приближенно можно использовать определение спектральных характеристик радиуса с помощью уравнения

$$u_{nm} = c_{nm}(b_{\alpha\beta}) J_n(\frac{\omega_m}{c} b_{\alpha\beta}), \omega_m^2 / c^2 = k^2 - \frac{m^2}{L^2}$$

При этом имеется счетное количество спектральных характеристик радиуса.

Получить данное представление можно с помощью разложения решения

$$\begin{gathered} u_{nm} = c_{nm} J_n[\frac{\omega_m}{c} r(z,\varphi)] = c_{nm} J_n[\frac{\omega_m}{c} \sum_{\alpha,\beta=0}^{N-1} b_{\alpha\beta} \exp(-i\beta z / L - i\alpha\varphi)] = c_{nm}\{J_n(0) + \ldots + \\ + [\frac{\omega_m}{c} \sum_{\alpha,\beta=0}^{N-1} b_{\alpha\beta} \exp(-i\beta z / L - i\alpha\varphi)]^p \frac{d^p J_n(0)}{d(\frac{\omega_m r}{c})^p} / p! + \} \sim \sum_{\alpha,\beta=0}^{N-1} c_{nm}(b_{\alpha\beta})\{J_n(0) + \ldots + \\ + (\frac{\omega_m}{c} b_{\alpha\beta})^p \exp(-i\beta z / L - i\alpha\varphi) \frac{d^p J_n(0)}{d(\frac{\omega_m r}{c})^p} / p! + \ldots\} = \\ = \sum_{\alpha,\beta=0}^{N-1} c_{nm}(b_{\alpha\beta}) J_n(\frac{\omega_m}{c} b_{\alpha\beta}) \exp(-i\beta z / L - i\alpha\varphi); c_{nm}(b_{\alpha\beta}) = c_{nm} f(\beta, \alpha, b_{\alpha\beta}, z / L, \varphi] \end{gathered} \quad (3)$$

Причем как окажется в дальнейшем коэффициенты $c_{nm}(b_{\alpha\beta})$ являются константами, не зависящими от углов и продольной координаты. Реализовано представление одного члена ряда для получения члена ряда $c_{nm}(b_{\alpha\beta})J_n(\frac{\omega_m}{c}b_{\alpha\beta})\exp(-i\beta z/L-i\alpha\varphi)$ и чтобы скомпенсировать приближение для степени введены коэффициенты, зависящие от дополнительных индексов. Эти коэффициенты определятся из граничных условий.

Можно получить решение для сферы с произвольной непрерывной диэлектрической и магнитной проницаемостью. Для этого надо знать зависимость $k(r,\theta,\varphi)=\sum_{n.m=0}^{N-1}\sum_{k=-m}^{m}\tilde{k}_{nmk}\exp(-inr/a)Y_{mk}^{*}(\theta,\varphi)$. Решение внутри тела описывается формулой

$$\tilde{u}_{nmkp}\exp(-2\pi inr/a)Y_{mk}^{*}(\theta,\varphi)=c_p(\tilde{k}_{nmk}a)J_p(\tilde{k}_{nmk}r)\exp(-2\pi inr/a)Y_{mk}^{*}(\theta,\varphi), r\le a$$

Вывод этой формулы аналогичен выводу формулы (3).

Причем спектр на поверхности сферы описывается формулой

$$\tilde{u}_{nmkp}=c_p(\tilde{k}_{nmk}a)J_p(\tilde{k}_{nmk}a)$$

Коэффициенты $c_p(\tilde{k}_{nmk}a)$ определяются из граничных условий.