По поводу резонансной частоты колебаний звука в трубопроводе

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Трубопровод представляет из себя резонатор, по которому распространяется звук. Причем имеются отдельные участки, разделенные колодцами, в которых звуковая волна частично отражается и частично проходит. Трубопровод это расстроенный музыкальный инструмент. Если бы расстояние между колодцами было постоянным, то он бы имел кратные резонансные частоты, как и всякий музыкальный инструмент. Но какова резонансная частота трубопровода? Ответим на эти вопросы.

При дискретизации сигнала, распространяющегося в трубопроводе, имеется конечное значение интервала между отсчетами. При интервале дискретизации стремящемся к нулю, образуется дельта функция со спектром, равным константе для каждого отсчета. При конечном интервале дискретизации, дельта функция аппроксимируется конечным значением и отсчет равен

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{\rho}\nu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma c_s^2}\exp[-(t-T)^2/2\sigma^2].$$

Где вычислен коэффициент пропорциональности у потенциала поля в трубопроводе. Он определяется зарядом $q = \frac{\sqrt{\rho}\nu^2}{c_s}$ звукового поля, деленным на величину, имеющую размерность длины. Тем самым вычислено безразмерное значение потенциала звукового поля. Напряженность звукового поля равна величине $\sqrt{\rho}\mathbf{V} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$. Где величина σ пропорциональна интервалу дискретизации Δt. Пик сигнала пропорционален величине $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, а ширина величине σ. Чем меньше интервал дискретизации, тем амплитуда сигнала выше и ширина сигнала меньше. Но при этом спектр размазывается, и расстояние между максимами спектра увеличивается и расстояние между максимами стремится к бесконечности, так как спектр дельта функции с запаздыванием равен экспоненте с амплитудой единица. Назовем расстояние между максимами несущей частотой обработки, а период, соответствующий этой частоте несущим периодом.

При этом существует у трубопровода среднее T, которое образует дискретные отсчеты, период которых проявляется в случае резонанса и при отступлении несущей от этого периода приводит к отсутствию резонанса и этих колебаний. Существование этого значения частоты следует из следующих соображений. При координате утечки сигнала запаздывание от разных участков трубопровода, соответствующего разным расстояниям между колодцами равно $\Delta\varphi = 2\pi Z(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_N})/N$, где учтено запаздывание сигнала от разных участков трубопровода, пропорциональное координате утечки. Тогда средних период трубопровода равен $L = \frac{N}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_N}}$, деля на скорость распространения, полученную из постоянной распространения, получим средний период распространения. Назовем этот период распространения резонансным, а частоту, соответствующую этому периоду резонансной.

Но наряду с резонансной частотой имеются частоты, пропорциональные $f_s = \frac{1}{T}(1 + \frac{L_s - L}{L_s + L})$, которые определяют помеху. Причем помеха образует сумму случайных значений с равномерным значением плотности вероятности, зависящим от частоты сигнала f_S. При отступе от этой резонансной частоты частота помехи уменьшается, причем $f_{nS} = n/T, L_s = L$, а на этой резонансной частоте в формулу для частоты входят только резонансные частоты. Потом подключаются более отличающиеся от резонансной частоты, по возрастанию частоты помехи. При резонансе эта частота выделяется из помехи своим острым пиком. Но это только один из видов помех, самый существенный. Имеются и другие помехи, аддитивные и мультипликативные, но они случайные и усредняются путем суммирования сигнала. Почти случайная модуляция частоты не ликвидируется при суммировании.

При увеличении интервала дискретизации несущий сигнал расплывается и уменьшается по амплитуде. В результате несущий сигнал определяется по формуле $\frac{\varphi(t)\sigma c_s^2}{\sqrt{\rho}\nu^2} = \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-(t-nT)^2/2\sigma^2]$

.

При низкой частоте спектра он имеет большее значение и с ростом частоты в спектре он уменьшает свою амплитуду. При этом амплитуда сигнала с несущей стремится к определенному пределу. Частота резонансного спектра имеет значение $f_n = \frac{n}{T}$. Основные признаки сигнала резонансно распространяются на резонансной частоте. Помеха компенсируется и не переносит резонансно сигнал и ее можно исключить путем обработки. Но влияние внешних факторов сказывается на сигнале на резонансной частоте. Если они не детерминированные, то их можно исключить, путем суммирования сигнала на кратной резонансной частоте. Но имеется перспектива выделить расстояние до утечки, используя среднее расстояние между колодцами, т.е. средний резонансный период.

Численная проверка этого соотношения состоит в усреднении сигнала.

$$y_n = \sum_{p=-l}^{l} \frac{[1-|p|/(l+1)]s_{n+p}}{2l+1}.$$

Чем меньше l тем ближе функция $1-|p|/(l+1)=\delta(p)$ к дельта функции и тем острее сигнал.

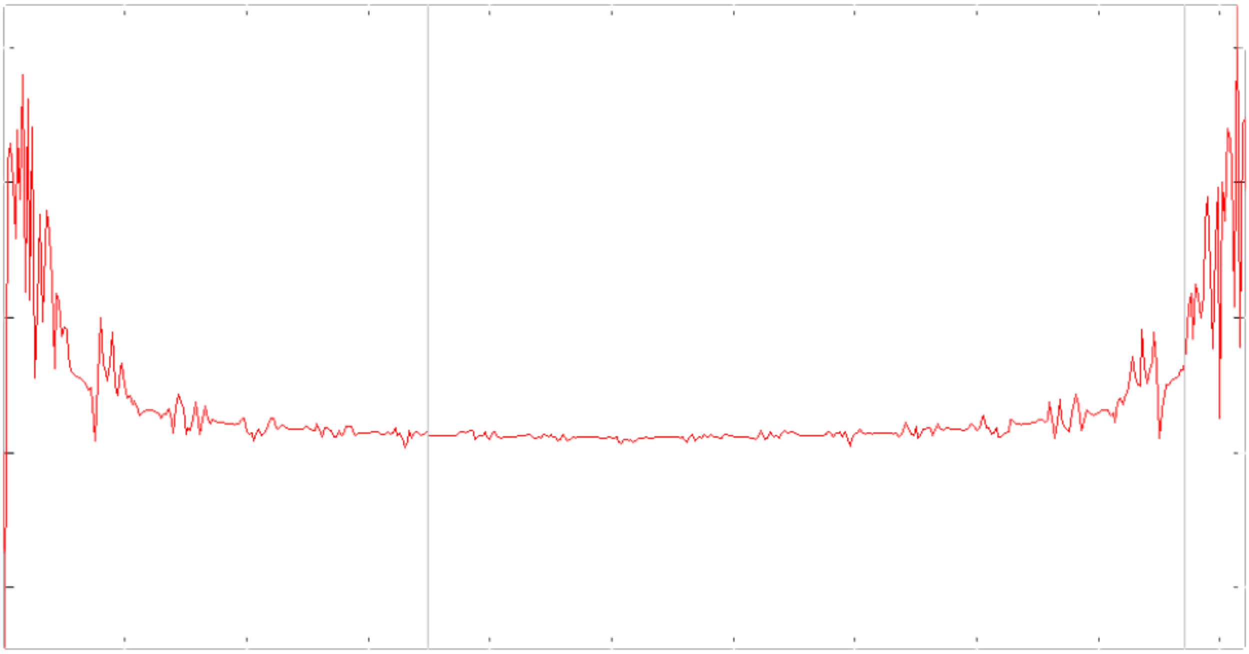

Рис 1. Рисунок соответствует спектру дельта функции с дисперсией l=16

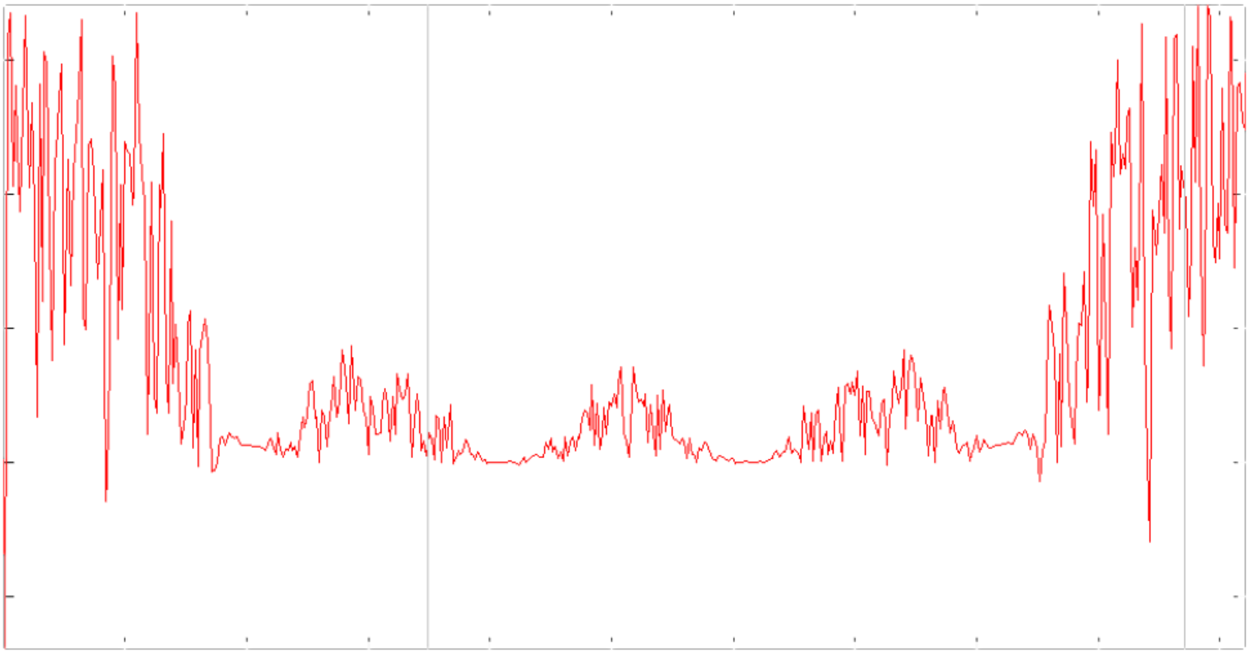

Рис 2. Соответствует спектру дельта функции с дисперсией l=4 с тем же масштабом.

При уменьшении l имеется дельта функция с большей амплитудой, но так это спектр, а спектр дельта функции равен комплексной экспоненте с модулем единица, спектр более размазан при сконцентрированном сигнале.

$$\tilde{s}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \delta(t - nT)\exp(iwt)dt = \sum_n \exp(iwnT) = \frac{\exp(iwNT) - \exp[-iw(N+1)T]}{1 - \exp(-iwT)} =$$

$$= \frac{\sin NwT}{\sin wT/2} = \frac{\sin wconst}{\sin wconst/2N} = \begin{cases} \delta(w) = N/2, T \to 0, NT = const; N = const/T \to \infty \\ 0, \textit{или не определен}, T \to \infty, NT = const, N = const/T \to 0 \end{cases}.$$

И наоборот, при спектре, равном мнимой экспоненте получаем сигнал с запаздыванием

$$s(t) = \frac{\varphi(t)\sigma c_s^2}{\sqrt{\rho}v^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iwnT - iwt)Tdw/2\pi = \delta(t/T - n).$$

Среднее от сигнала в трубопроводе имеет в безразмерном виде $\exp(iwx/c - iwt) = \exp(2\pi inx/L - iwt)$ и при суммировании по частотам определяет сигнал $\delta(t/T - x/L) = \delta(t/T - n), T = L/c, x = nL$, где величина L среднее расстояние между колодцами или резонансная длина волны, где средний период определяется по формуле $T = L/c = 50/1200 = 1/24s, f = 24Hz$, где среднее расстояние между колодцами равно 50м, а скорость распространения звукового сигнала 1200м/сек. Из измерений получено, что при максимальной частоте, или частоте дискретизации равной значению $2^{15} = 32kHz$ несущая частота равна 75.4 Hz. Значит необходима для резонанса частота 10.43kHz при резонансной частоте 24Hz. Величина L определяется по среднему расстоянию между колодцами $L = \dfrac{N}{\dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2} + ... + \dfrac{1}{L_N}}$, так как запаздывание сигнала, зависящее от расстояния Z равно $N\Delta\varphi = 2\pi Z(\dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2} + ... + \dfrac{1}{L_N})$. Чтобы выявить эту частоту нужен резонанс, т.е. определенный интервал дискретизации. При нулевом и бесконечном интервале дискретизации эта частота не выявляется.

С ростом величины T экспоненты в сумме сливаются и образуется непрерывный спектр, равный константе, стремящейся к нулю при периоде, стремящемся к бесконечности и w=0, при $w \neq 0$ и периоде, стремящемся к бесконечности, эта функция не определена, так как аргумент синуса стремится к бесконечности. Величина $\sigma \to \infty$ и значит амплитуда сигнала, пропорциональная $1/\sigma \to 0$. Т.е. может равняться произвольному числу в зависимости случайного малого изменения значения частоты. При периоде, стремящемся к нулю $T \to 0$, имеем $\sigma \to 0$ т.е. суммируя спектр от отдельных отсчетов, который в этом случае равен 1, образуется дельта функция в зависимости от частоты.

Т.е. спектр при сглаживании $\sigma \to \infty$ стремится к нулю или не определен, а при интервале дискретизации, стремящемся к нулю $\sigma \to 0$, равен дельта функции $\delta(w)$. Значит спектр сигнала в трубопроводе не имеет периода при малом и большом интервале дискретизации. Но может резонансно выделить одну резонансную гармонику и кратные ей. Все эти рассуждения хороши, если отсчеты сигнала одинаковы, т.е. безразмерная формула приобретет вид $s(t) = \frac{\varphi(t)\sigma c_s^2}{\sqrt{\rho}v^2} = \sum_n A_n \delta(t/T - n) \sim \sum_n B\delta(t/T - n), B = \sum_n A_n / \sum_n 1$, т.е. для среднего отсчета, равного $B = \sum_n A_n / \sum_n 1$. Для произвольного значения A_n получаем отклонение от среднего значения.

Определим несущую частоту, как расстояние между максимами сигнала. Отношение частоты дискретизации к расстояниями между максимами частоты, равно отношению сигнал помеха T/σ, т.е. отношению среднего значения периода к его среднеквадратичному отклонению. Эта величина для разного интервала дискретизации почти постоянная, и как показал эксперимент она равна

$$a/\sigma = W/w = T/\sigma = 2^{15}/75.4 = 434; w = 75.4Hz; W = 2^{15}Hz.$$

В относительных единицах имеем $a/\Delta t = \Delta w/w, \sigma/\Delta t = \Delta w/W, \Delta w = 1Hz; \Delta t = 2^{-15}s$. Это равенство определяется с точностью до множителя.

Получить цифру 434, равную отношению среднего периода к его среднеквадратичному отклонению, теоретически сложно. Возможно это отношение среднего расстояния между колодцами трубопровода к его радиусу $\frac{a}{\sigma} = \frac{L}{r} = \frac{50}{0.15} = 333$. Причем эта цифра получена без учета помехи, в отличии от цифры 434. Учет помехи добавит множитель $(1 + \frac{\delta^2}{L^2})$ и формула приобретет вид $\frac{a}{\sigma} = \frac{L}{r}(1 + \frac{\delta^2}{L^2}); \delta^2 = \sum_{s=0}^{S} L_s^2 / (S+1) - L^2$ т.е. δ равно среднеквадратичному значению расстояния между колодцами $\sqrt{\frac{ar}{\sigma L} - 1} = \frac{\delta}{L} = \sqrt{\frac{434}{333} - 1} = 0.54$. При этом расстояние между максимами w, определяющими несущую частоту трубопровода уменьшилось, при уменьшении интервала дискретизации $\sigma \sim \Delta t$, т.е. несущий период T уменьшился. Уменьшая интервал дискретизации, т.е. уменьшая сглаживание, тем самым увеличиваем несущую частоту трубопровода и делаем ее равной предельной, бесконечной, дельта функцией от частоты. Увеличивая интервал дискретизации, сглаживаем сигнал, уменьшаем амплитуду несущей частоты до нуля, до произвольного значения сигнала. Для выделения несущей частоты, определяемой периодом трубопровода нужен интервал дискретизации, равный периоду резонансной частоты. Тогда более высокие частоты будут сглажены, а низкие частоты определят детерминированный сигнал. Но при этом нельзя отступать от резонансной частоты, определяемой периодом трубопровода.

Выводы

При малом интервале дискретизации спектр состоит из дельта функции с помехой. При большом интервале дискретизации, спектр на нулевой частоте нулевой, а на остальных частотах произвольный, т.е. малому отклонению частоты соответствует большое изменение спектра. При промежуточном значении интервала дискретизации спектр имеет размытый период, соответствующий интервалу дискретизации. Но возможно резонансное выделение спектра на резонансной частоте. Тогда помеха у спектра будет минимальная.

Среднее значение безразмерного сигнала без утечки имеет вид

$$< \frac{\varphi(t)\sigma c_s^2}{\sqrt{\rho}\nu^2} >= \sum_{n=0}^{N} A\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp[-(t-nT)^2/2\sigma^2]\exp(-2\pi nit/T), A=\sum_{n=0}^{N} A_n/(N+1) .$$

Среднее значение спектра этого сигнала равно $< \frac{\tilde{\varphi}(w)\sigma c_s^2}{\sqrt{\rho}\nu^2} >= \sum_{n=1}^{N} A\exp(2\pi inwT)\{1+o(\frac{\sigma}{A})\}$, т.е. при условии образования дельта функции $\sigma \to 0$ этот спектр описывается точно.

Как показало измерение на частоте 32kHz отношение периода к дисперсии равно $T/\sigma = 434 = \frac{L}{r}(1+\delta^2/L^2) \cong 333(1+0.54^2)$, где используется среднее значение расстояния между колодцами L и радиус трубопровода r, величина $T = L/c$, равна среднему периоду, деленному на скорость распространения нулевой гармоники трубопровода. Величина δ^2 равна дисперсии расстояния между колодцами. Нулевая гармоника получается при индексе функции Бесселя, равной нулю. Функция Бесселя входит в коэффициент A_n и описывает распространение звука в трубопроводе. Накладывается помеха, дисперсия которой равна

$$D(t) = [\psi(t) - <\psi(t)>]^2 .$$

Точное значение сигнала определяется по формуле

$$\psi(t) = \frac{\varphi(t)\sigma c_s^2}{\sqrt{\rho}\nu^2} = \sum_{n=0}^{N} A_n(T_n)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp[-(t-nT_n)^2/2\sigma_n^2]\exp(-2\pi nit/T_n) .$$

$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T}(1+\frac{L_s - L}{L_s + L})$$

Среднее значение сигнала с утечкой отличается множителем

$$<\psi(t)>= \sum_{n=0}^{N} B\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp[-(t-nT)^2/2\sigma^2]\exp(2\pi inZ/L - 2\pi nit/T) .$$

Причем как показали измерения множитель $B = A$, если утечка находится на большом расстоянии от колодца. Если утечка расположена на большом расстоянии от колодца, то размер дыры утечки не сказывается на фазе сигнала.

Причем так как резонансная частота имеет значение $f = \frac{S}{T}$ она возбуждается при любом интервале дискретизации, но помеха минимальна на высокой частоте. Важно для получения резонанса соблюдение условия, период дискретизации должен удовлетворять условию $\Delta t = \frac{T}{S}$. Причем чем меньше S тем коэффициент $A_S \sim J_0(2\pi S\sqrt{\frac{T^2}{c_x^2} - \frac{T^2}{c_1^2}a}) \sim \frac{\cos(2\pi S\sqrt{\frac{T^2}{c_x^2} - \frac{T^2}{c_1^2}a} - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2\pi S\sqrt{\frac{T^2}{c_x^2} - \frac{T^2}{c_1^2}a}}}$ больше.

Литература

1. Якубовский Е.Г. Аналог уравнений Максвелла, описывающего звуковые волны. «Энциклопедический фонд России», 2018, 9 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1530283888.pdf