Описание собственного вращения в ОТО

Якубовский Е.Г.
e-mail yakubovski@rambler.ru

Пользуясь аналогией между ОТО и СТО вычислим значение четырехмерной скорости, и на этой основе определим метрический тензор ОТО поступательно и вращательно двигающегося тела. Имея метрический тензор неподвижного тела можно вычислить метрический тензор поступательно и вращательно двигающегося тела путем замены аргументов. Решение Керра справедливо при малом моменте импульса, и не описывает решение за горизонтом событий. Кроме того, хотя имеется момент импульса, значение угловой частоты и ее направление не известно, так как метрика Керра не зависит от радиуса тела. Кроме того, удалось построить счетное количество решений ОТО в соответствии с [4].

Определение метрического тензора сводится к уравнению, где метрический тензор зависит от гравитационного и электромагнитного поля (см. [1], более подробно [2])

$$g_{nm}u^n u^m = g_{nm}\frac{p^n}{mc}\frac{p^m}{mc} = 1$$

$$g_{00}(p^0)^2 + 2\sum_{n=1}^{3} g_{n0}p^n p^0 + \sum_{n,m=1}^{3} g_{nm}p^n p^m =$$

$$= \sum_{n=0}^{3} p_n p^n = m^2c^2 = g_{00}(p^0)^2 + \sum_{\beta=1}^{3}[g_{k0}(a_\beta^k)^{-1}]^2(p^0)^2/\lambda_\beta - . \qquad (1)$$

$$-\sum_{\beta=1}^{3}[\sqrt{\lambda_\beta}a_k^\beta p^k + g_{k0}(a_\beta^k)^{-1}p^0/\sqrt{\lambda_\beta}]^2 = m^2c^2;$$

$$(g_{nm}-\lambda_\beta\delta_{nm})a_\beta^n = 0; |g_{nm}-\lambda_\beta\delta_{nm}| = 0$$

Где собственные числа $\lambda_\beta > 0$. Причем справедливо определение обобщенной энергии E по формуле $\frac{E^2}{c^2} = g_{00}(p^0)^2 + \sum_{\beta=1}^{3} [g_{k0}(a_\beta^k)^{-1}]^2 (p^0)^2 / \lambda_\beta$ так как нулевая проекция импульса p^0 ответственна за энергию. При этом величина обобщенного импульса равна $P^\beta = \sum_{k=1}^{3} [\sqrt{\lambda_\beta} a_k^\beta p^k + g_{k0}(a_\beta^k)^{-1} p^0 / \sqrt{\lambda_\beta}]$, так как содержит линейную комбинацию четырехмерного импульса. При этом имеется связь между обобщенной энергией E и обобщенным импульсом P^β

$$\frac{E^2}{c^2} = \sum_{\beta=1}^{3} (P^\beta)^2 + m^2 c^2$$

Аналогом этой формулы в СТО является формула $\frac{E^2}{c^2} = \sum_{\beta=1}^{3} (p^k)^2 + m^2 c^2$ см. [3].

Величина $(E/c, P^\beta)$ соответствует четырехмерному импульсу тела с учетом гравитационного и электромагнитного поля. При этом можно ввести четырехмерную обобщенную скорость, зависящую от электромагнитного и гравитационного поля

$$U^k / c = \frac{P^k / mc}{\sqrt{1 + \sum_{l=1}^{3} (P^l / mc)^2}}, \qquad (2)$$

которая определяется с помощью формулы $P^\beta / mc = \frac{U^\beta / c}{\sqrt{1 - \sum_{k=1}^{3} (U^k / c)^2}}$.

Предварительно надо связать величины скоростей $V^l / c = dx^l / cdt$, полученных дифференцированием по времени, с четырехмерными скоростями $u^l = dx^l / ds$ по формуле $V^l / c = u^l \alpha, l = 0,...,3, V^0 = c$, где необходимо определить коэффициент пропорциональности α. Причем это нужно сделать для каждой частицы или тела. Назовем скорость V^l / c трехмерной скоростью в системе координат. Скорость u^l называется четырехмерной скоростью. Это скорость движения тела. Тогда имеем связь собственной скорости с четырехмерной скоростью, полученной, по аналогии с СТО, при этом будем записывать и формулы СТО для сравнения

$$u^n = \frac{V^n / c}{\sqrt{g_{00} + 2g_{k0}V^k / c + g_{kn}V^k V^n / c^2}}$$
$$u^n = \frac{V^n / c}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}} \qquad (3)$$

Формулу можно преобразовать к виду, она получается умножением формулы двух скоростей, вычисленных по формуле (3), умноженных на соответствующий метрический тензор и эта величина суммируется

$$\frac{2g_{k0}V^k / c + g_{kn}V^k V^n / c^2}{g_{00} + 2g_{k0}V^k / c + g_{kn}V^k V^n / c^2} = 2g_{k0}u^k u^0 + g_{kn}u^k u^n .$$

Преобразуем это уравнение, получив из равенства $\frac{a}{b} = \frac{c}{1}$ соотношение $\frac{a}{b-a} = \frac{c}{1-c}$

$$\frac{2g_{k0}V^k / c + g_{kn}V^k V^n / c^2}{g_{00}} = \frac{2g_{k0}u^k u^0 + g_{kn}u^k u^n}{1 - 2g_{k0}u^k u^0 - g_{kn}u^k u^n}$$

Подставляя значение скорости, полученной с помощью собственного времени, выраженное через компоненту четырехмерной скорости, получим уравнение по определению α

$$\frac{2g_{k0}u^k u^0 + \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^k u^n}{g_{00}}\alpha^2 = \frac{2g_{k0}u^k u^0 + \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^k u^n}{1 - 2g_{k0}u^k u^0 - \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^k u^n}$$

Откуда находим

$$\alpha = \sqrt{\frac{g_{00}}{1 - 2g_{k0}u^k u^0 - \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^k u^n}} .$$

При условии $g_{k0}=0$, получаем значение $\alpha=\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-\sum\limits_{k,n=1}^{3}g_{kn}u^k u^n}}$. При этом значение трехмерной собственной скорости равно $V^l/c=u^l\sqrt{\frac{g_{00}}{1-2g_{k0}u^k u^0-\sum\limits_{k,n=1}^{3}g_{kn}u^k u^n}}$, которая является аналогом формулы $V^l/c=\frac{u^l}{\sqrt{1+\sum\limits_{l=1}^{3}(u^l)^2}}<1$. При значении $u^l=1$, получаем значение скорости $\frac{V^l}{c}=\sqrt{\frac{g_{00}}{1-2\sum\limits_{k=1}^{3}g_{k0}-\sum\limits_{k,n=1}^{3}g_{kn}}}$. В пространстве Минковского эта скорость равна $V^l/c=1/2$.

Подставляя в формулу для импульса частицы $p^0=mcu^0, p^k=mcu^k$, значение u^n из формулы (3), получим четырехмерный импульс тела

$$\begin{gathered}P^0=H(x_i,V^i)/c=mc\sqrt{\frac{[g_{k0}(a_\beta^k)^{-1}/\sqrt{\lambda_\beta}]^2+g_{00}}{g_{00}+2g_{k0}V^k/c+g_{kn}V^k V^n/c^2}}\\ P^\beta=mc\frac{\sqrt{\lambda_\beta}a_k^\beta V^k/c+g_{k0}(a_\beta^k)^{-1}/\sqrt{\lambda_\beta}}{\sqrt{g_{00}+2g_{k0}V^k/c+g_{kn}V^k V^n/c^2}}\end{gathered} \qquad (4)$$

Эти формулы аналогичны формулам СТО

$$P^0=\frac{mc}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, P^\beta=\frac{mV^\beta}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

И соответствуют импульсу движения тела с учетом электромагнитного и гравитационного поля.

Опишем собственное вращение тела. Для этого запишем изменение импульса

$$P^1 = P\sin\theta\sin\varphi$$
$$P^2 = P\sin\theta\cos\varphi.$$
$$P^3 = P\cos\theta$$

Имеем два импульса, в зависимости от P,φ,θ

$$P^{\varphi} = (L^2 + iL^1)/R_{\max} = P^2 + iP^1 = P\sin\theta\exp(i\varphi)$$
$$P^3 = P\cos\theta$$
$$x = x^2 + ix^1 = R\sin\theta\exp(i\varphi)$$
$$x^3 = R\cos\theta$$

Где L^k компонента момента импульса, $R_{\max}$ радиус тела. Угол θ зафиксируем, а угол $\varphi = \omega\cdot\tau$. Ставится задача, описать вращающийся метрический тензор, начало координат которого поступательно двигается вдоль радиуса под углом θ_0 и вращается относительно 3 координаты. Получается движение в пространстве Минковского. Для одиночного тела декартова система координат описывает поступательное и вращательное движение по инерции. Для вычисления метрического тензора двигающегося тела надо определить, как меняются декартовы координаты тела при заданном импульсе и моменте импульса тела. Приравнивая эти декартовы координаты, с декартовыми координатами неподвижного тела получим значение метрического тензора для двигающегося тела. Тело движется поступательно вдоль радиуса, причем вращается. Решение Шварцшильда можно записать относительно декартовых координат. Подстановка решения движения по инерции в декартовой системе координат в значение метрического тензора статической системы координат, решает проблему движения по инерции.

Имеем функцию Гамильтона $H^2 = P^{\beta}P^{\beta *}c^2 + m^2c^4$. Уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{dP^{\varphi}}{d\tau} = \frac{\partial H}{R\sin\theta\partial\exp(-i\varphi)} = \frac{\exp(i\varphi)|P|^2 c\sin\theta}{R\sqrt{|P|^2 + m^2c^2}}, \frac{dP^3}{d\tau} = 0,$$

$$P^{\varphi} - P_0^{\varphi}\sin\theta = -\frac{i\exp(i\omega\tau)|P|^2 c\sin\theta}{\omega R\sqrt{|P|^2 + m^2c^2}}, P^3 = P_0\cos\theta, P = P_0 = L/R_{\max}$$

Где величина L собственный момент импульса тела, спин тела.

$$\frac{d(x_2+ix_1)}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial P^{\varphi}}=-c\frac{P_0^{\varphi}\sin\theta_0-iP_0{}^2\sin\theta\exp(i\varphi)c/[\omega R\sqrt{P_0{}^2+m^2c^2}\,]}{\sqrt{P_0{}^2+m^2c^2}},$$

$$\frac{dx_3}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial P^3}=-\frac{P_0c\cos\theta_0}{\sqrt{P_0{}^2+m^2c^2}}.$$

Откуда получаем решение

$$x_1=x_1^0-\frac{\operatorname{Im}P_0^{\varphi}c\tau\sin\theta_0}{\sqrt{P_0^2+m^2c^2}}+\frac{P_0^2c^2\sin\theta\sin\omega\tau}{\omega^2R(P_0^2+m^2c^2)},$$

$$x_2=x_2^0-\frac{\operatorname{Re}P_0^{\varphi}c\tau\sin\theta_0}{\sqrt{P_0{}^2+m^2c^2}}+\frac{P_0{}^2c^2\sin\theta\cos\omega\tau}{\omega^2R(P_0{}^2+m^2c^2)}$$

$$x_3=x_3^0-\frac{P_0c\tau\cos\theta_0}{\sqrt{P_0{}^2+m^2c^2}}+\frac{P_0{}^2c^2\cos\theta}{\omega^2R(P_0{}^2+m^2c^2)},(\operatorname{Re}P_0^{\varphi})^2+(\operatorname{Im}P_0^{\varphi})^2=P_0{}^2$$

Отнимем от координаты метрического тензора, член, описывающий вращательное движение тела, возведем в квадрат и просуммируем, получим поступательное движение вдоль радиуса.

$$[x_1-x_1^0-\frac{P_0{}^2c^2\sin\theta\sin\omega\tau}{\omega^2R(P_0{}^2+m^2c^2)}]^2+[x_2-x_2^0-\frac{P_0{}^2c^2\sin\theta\cos\omega\tau}{\omega^2R(P_0{}^2+m^2c^2)}]^2+$$

$$+[x_3-x_3^0-\frac{P_0{}^2c^2\cos\theta}{\omega^2R(P_0{}^2+m^2c^2)}]^2=\frac{(P_0c\tau)^2}{P_0{}^2+m^2c^2}$$

Определим связь между частотой вращения и радиусом тела

$$\sqrt{[x_2-x_2^0+\frac{\operatorname{Re}P_0^{\varphi}c\tau\sin\theta_0}{\sqrt{P_0{}^2+m^2c^2}}]^2+[x_1-x_1^0+\frac{\operatorname{Im}P_0^{\varphi}c\tau\sin\theta_0}{\sqrt{P_0{}^2+m^2c^2}}]^2}=$$

$$=\frac{P_0{}^2c^2\sin\theta\sqrt{(\cos\omega\tau)^2+\sin^2\omega\tau}}{\omega^2(R)R(P_0{}^2+m^2c^2)}=\frac{P_0{}^2c^2\sin\theta}{\omega^2(R)R(P_0{}^2+m^2c^2)}=R\sin\theta.$$

$$\omega(R)=\begin{cases}\dfrac{P_0c}{R\sqrt{P_0{}^2+m^2c^2}},R>|R_{\max}|\\ \dfrac{P_0c}{R_{\max}\sqrt{P_0{}^2+m^2c^2}},R<|R_{\max}|\end{cases}$$

Частота вращения определяется из равенства $P_0 = \int\limits_0^{R_{\max}} \frac{\omega(R_{\max})}{R_{\max}} dJ(R) = \frac{\omega(R_{\max})}{R_{\max}} J_{\max}$, откуда имеем формулу для изменения

$$\omega(R_{\max}) = \frac{c}{R_{\max}} \sqrt{1 - \frac{m^2 R_{\max}^4}{J_{\max}^2}}.$$

Скорость вращения поверхности Земли $V = c \sin\theta \sqrt{1 - \frac{m^2 R_{\max}^4}{J_{\max}^2}}$. Величина среднего момента инерции не однородного тела равна по порядку величины в случае линейного роста плотности

$$\begin{gathered} J_{\max} = (N+1)m/2 \cdot R_{\max}^2 / 4 = m R_{\max}^2 (1 + \alpha/8), \\ \rho = \rho_0[(N-1)(R_{\max} - R)/R_{\max} + 1], \rho_{\max} = \rho_0 N \end{gathered}.$$

Формула для момента инерции получается, как средняя плотность между граничной и центральной областью, при массе сосредоточенной на половине радиуса. Для Земли отношение максимальной плотности к плотности на поверхности Земли равно $N = 7 + \alpha$. К сожалению данные о плотности Земли противоречивы. Поэтому используем приближенное отношение плотности до половины радиуса и для области большей половины радиуса. Должно определиться значение $\alpha << 4$. Скорость вращения поверхности земли равна $V = c \sin\theta \sqrt{\alpha/4}$. Откуда получаем правильную формулу для частоты вращения $\omega(R_{\max}) = \frac{V}{R_{\max} \sin\theta}$.

Имеем правильную формулу для изменения координаты вне поверхности Земли

$$\begin{gathered} x - x_0 = R \sin\theta \exp(i\varphi) - \frac{P_0^{\varphi} c\tau \sin\theta_0}{\sqrt{P_0{}^2 + m^2 c^2}} \\ x^3 - x_0^3 = R\cos\theta - \frac{P_0\, c\tau \cos\theta_0}{\sqrt{P_0{}^2 + m^2 c^2}} \end{gathered}.$$

Внутри поверхности Земли метрический тензор меняется по закону

$$x - x_0 = \frac{R_{\max}^2}{R}\sin\theta\exp(i\varphi) - \frac{P_0^{\varphi} c\tau\sin\theta_0}{\sqrt{P_0{}^2 + m^2c^2}}$$
$$x^3 - x_0^3 = \frac{R_{\max}^2}{R}\cos\theta - \frac{P_0\, c\tau\cos\theta_0}{\sqrt{P_0{}^2 + m^2c^2}}.$$

Общая формула для всего пространства, где радиус определяется по формуле (5)

$$x - x_0 = r\sin\theta\exp(i\varphi) - \frac{P_0^{\varphi} c\tau\sin\theta_0}{\sqrt{P_0{}^2 + m^2c^2}}$$
$$x^3 - x_0^3 = r\cos\theta - \frac{P_0\, c\tau\cos\theta_0}{\sqrt{P_0{}^2 + m^2c^2}}.$$

При каждом значении радиуса имеется постоянная скорость вращения $V_x = ic\sin\theta\exp(i\varphi)\sqrt{1 - \frac{m^2R_{\max}^4}{J^2}} - \frac{P_0^{\varphi} c\sin\theta_0}{\sqrt{P_0{}^2 + m^2c^2}}, V_3 = -\frac{P_0^{\varphi}\cos\theta_0}{\sqrt{P_0{}^2 + m^2c^2}}$ вне тела и $V_x = \frac{icR_{\max}\sin\theta\exp(i\varphi)}{R}\sqrt{1 - \frac{m^2R_{\max}^4}{J^2}} - \frac{P_0^{\varphi}\sin\theta_0}{\sqrt{P_0{}^2 + m^2c^2}}, V_3 = -\frac{P_0^{\varphi}\cos\theta_0}{\sqrt{P_0{}^2 + m^2c^2}}$ скорость вращения метрического тензора внутри тела.

Частота оказывается действительной только для неоднородного тела с ростом плотности по мере уменьшения радиуса. Внутри тела частота равна $\omega(R) = \frac{c}{R}\sqrt{1 - \frac{m^2R_{\max}^4}{J^2}}$. Радиус тела определяется по формуле

$$r = \begin{cases} \dfrac{P_0^2 R}{(P_0{}^2 + m^2c^2)\sqrt{1 - \dfrac{m^2R_{\max}^4}{J_{\max}^2}}}, R > |R_{\max}| \\ \dfrac{P_0^2 R_{\max}^2}{R(P_0{}^2 + m^2c^2)\sqrt{1 - \dfrac{m^2R_{\max}^4}{J_{\max}^2}}}, R < |R_{\max}| \end{cases} = \begin{cases} R, R > |R_{\max}| \\ \dfrac{R_{\max}^2}{R}, R < |R_{\max}| \end{cases}. \qquad (5)$$

Справедлива формула для изменения угла

$$\varphi-\varphi_0=\int_0^\tau \omega(\tau)d\tau=\begin{cases}\dfrac{c}{R}\sqrt{1-\dfrac{m^2R_{\max}^4}{J_{\max}^2}}\tau, R>|R_{\max}| \\ \omega_0\tau=\dfrac{c}{R_{\max}}\sqrt{1-\dfrac{m^2R_{\max}^4}{J_{\max}^2}}\tau, R<|R_{\max}|\end{cases}$$

При условии отсутствия движения $P_0\to 0$, получаем неподвижный центр тела и исправленную метрику Шварцшильда.

Допустим, имеем значение метрического тензора для неподвижного не вращающегося тела $g_{lk}=g_{lk}(x^1,x^2,x^3)$.

Запишем метрику решения Шварцшильда $r=f_n(R)$

$$ds^2=c^2(1-\frac{r_g}{r})dt^2-dr^2/(1-\frac{r_g}{r})-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2).$$

Где для функции $f_n(R)$ имеем представление $f_n(R)=\begin{cases}R+i\varepsilon_n, R>R_{\max} \\ (R_{\max}+i\varepsilon_n)^2/(R+i\varepsilon_n), R>R_{\max}\end{cases}$. Получаем счетное количество решений с разной степенью шероховатости ε_n см. [4]. Где центр системы координат движется вдоль радиуса под углом θ_0, со скоростью $\dfrac{P_0c}{\sqrt{P_0^{\ 2}+m^2c^2}}$.

При этом угол

$$\varphi-\varphi_0=\begin{cases}\dfrac{c}{R+i\varepsilon_n}\sqrt{1-\dfrac{m^2R_{\max}^4}{J_{\max}^2}}\tau, \sqrt{R^2+\varepsilon_n^2}<|R_{\max}| \\ \omega_0\tau=\dfrac{c}{R_{\max}+i\varepsilon_n}\sqrt{1-\dfrac{m^2R_{\max}^4}{J_{\max}^2}}\tau, \sqrt{R^2+\varepsilon_n^2}>|R_{\max}|\end{cases}.$$

Получилось счетное количество комплексных решений Шварцшильда см [4], одно с радиусом $r=R+i\varepsilon_n$ при условии $\sqrt{R^2+\varepsilon_n^2}>|R_{\max}|$, а в другом радиус равен $r=(R_{\max}+i\varepsilon_n)^2/(R+i\varepsilon_n)$ при условии $\sqrt{R^2+\varepsilon_n^2}<|R_{\max}|$. Эти два решения сопрягаются, образуя решение во всем пространстве. Вычислена и скорость вращения тела. Отметим, что данная метрика не имеет особенности и тензоры g_{00}, g_{rr} непрерывны и в ноль не обращаются.

Но имеется действительное решение Керра с метрикой

$$ds^2 = (1 - \frac{r_g r}{\rho^2})c^2 dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - (r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\rho^2})\sin^2\theta d\varphi^2 +$$

$$+ \frac{2 r_g r a c}{\rho^2} \sin^2\theta d\varphi dt; \Delta = r^2 - r_g r + a^2; \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta$$

Момент равен $L = mac$. При моменте, равном нулю, получается метрика Шварцшильда. Предлагаемое решение не совпадает с решением Керра наличием дисперсии радиуса тела и связи с поступательным движением тела и имеет счетное количество комплексных решений см. [4]. Решение Керра определяется гравитационным радиусом и не имеет радиуса тела. Поэтому определить угловую частоту вращения и направление момента импульса тела невозможно, хотя имеется момент импульса. Предлагаемое решение содержит гравитационный радиус для неподвижного тела и зависит от радиуса тела для двигающегося тела. Кроме того, решение Керра справедливо при малых моментах импульса $a = \frac{L}{mc} < r_g / 2$. В случае решения Керра внутренность объема за горизонтом не имеет физического смысла и не описывается.

На поверхности множитель $R = R_{\max}(1 + i\alpha)$ постоянен и в силу малой шероховатости Земли имеет малую мнимую часть, т.е. поверхность вращается с комплексным радиусом с малой мнимой частью. В среднем Земля имеет форму

$$\begin{aligned} x^1 / R_{\max} &= (\sin\varphi + \alpha\cos\varphi)\sin\theta \\ x^2 / R_{\max} &= (\cos\varphi - \alpha\sin\varphi)\sin\theta \\ x^3 / R_{\max} &= (1 + i\alpha)\cos\theta, \alpha = 0.0588 = \sqrt{\frac{R_{\max} - R_{\min}}{(R_{\max} + R_{\min})0.5}} \end{aligned}.$$

Мнимая величина имеет положительный и отрицательный знак. Поэтому для вычисления вклада мнимой части надо извлечь корень из безразмерного среднеквадратичного отклонения. Среднеквадратичное отклонение равно

$\frac{R_{\max} - R_{\min}}{(R_{\max} + R_{\min})0.5}$. Угол вращается с постоянной угловой скоростью $\varphi = \varphi_0 + \omega\tau$.

Это приводит к не постоянной скорости вращения Земли. Вычислим радиус по известным координатам. Тогда мнимая часть квадрата вертикальной компоненты уйдет, так как имеет положительный и отрицательный знак и линейна, получим

$$r^2 / R_e^2 = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2] / R_e^2 = 1 - < [\alpha(\theta)]^2 > \cos 2\theta = 1 - 0.003455 \cos 2\theta$$

Вычисленное с помощью учета потенциальной энергии Земли ее форма определяется по формуле см. [5], раздел 4.2

$$r^2 = R_e^2(1 - 2\varepsilon \cos^2\theta) = R(1 - \varepsilon - \varepsilon \cos 2\theta), \varepsilon = 3.354 \cdot 10^{-3}.$$

Теоретический и экспериментальный коэффициент совпали с точностью 3%.

Выводы

На основании решения уравнения ОТО относительно гравитационного и электромагнитного поля можно построить систему координат, в которой тело движется с постоянной скоростью и вращается. Для этого достаточно знать метрический тензор неподвижного тела относительно координат. Образуется счетное количество комплексных решений уравнения ОТО.

Литература

1. *Якубовский Е.Г.* Описание электромагнитного поля с помощью уравнений общей теории относительности. Инженерная физика. 2015.№4, стр. 33-39
2. *Якубовский Е.Г.* Общая теория гравитационного и электромагнитного поля. «Энциклопедический фонд России», 2014, http://russika.ru/sa.php?s=434
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля т.II, Наука, М.,1973,564с.

4. *Якубовский Е.Г.* Счетное количество решений уравнений ОТО. «Энциклопедический фонд России», 2014, 5 стр. http://russika.ru/sa.php?s=1032
5. *Жаров В.Е.* Сферическая астрономия. М.: 2002г. http://www.astronet.ru/db/msg/1190817/node24.html