

Проблема получения метрического тензора многих тел

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Проблема получения решения для нескольких тел до сих пор не решена в ОТО. Она осложняется тем, что функция Лагранжа в 4 порядке малости для нескольких тел зависит от величины метрического тензора g_{ok} , что приводит к сложному виду контравариантного тензора и связанным с этим сложными вычислениями. Задача упрощается, если ввести зависимость от одной переменной, равной метрическому интервалу. Тогда получим уравнение не в частных производных, а систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим задачу вычисления контравариантного метрического тензора в случае не диагонального метрического тензора. Для этого подсчитаем определитель метрического тензора

$$\begin{aligned}
 |g_{ik}| &= \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & 0 & 0 \\ g_{20} & 0 & g_{22} & 0 \\ g_{30} & 0 & 0 & g_{33} \end{vmatrix} = -g_{30}g_{11}g_{33}g_{03} + g_{33}(g_{00}g_{11}g_{22} - g_{10}g_{01}g_{22} - g_{20}g_{02}g_{11}) = \\
 &= g_{00}g_{11}g_{22}g_{33}(1 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2), u_i^2 = -\frac{g_{i0}^2}{g_{ii}g_{00}} > 0
 \end{aligned}$$

Вычислим диагональные контравариантные компоненты метрического тензора

$$\begin{aligned}
g^{00}g_{00} &= \frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{u_0^2}; u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \\
u_0^2 &= 1+u^2; u_0^2 - u^2 = 1 \\
g^{11}g_{11} &= \frac{1+u_2^2+u_3^2}{1+u^2} = 1 - \frac{u_1^2}{1+u^2} = 1 - \beta_1^2 \\
g^{22}g_{22} &= \frac{1+u_1^2+u_3^2}{1+u^2} = 1 - \frac{u_2^2}{1+u^2} = 1 - \beta_2^2 \\
g^{33}g_{33} &= \frac{1+u_1^2+u_2^2}{1+u^2} = 1 - \frac{u_3^2}{1+u^2} = 1 - \beta_3^2 \\
\beta_l &= \frac{u_l}{\sqrt{1+u^2}}; u_l = \frac{\beta_l}{\sqrt{1-\beta^2}}; \beta^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2
\end{aligned}$$

Компоненты $u_0^2 - u^2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = 1$ образуют четырехмерные скорости пространства Минковского и является определением величины u_0^2 .

При этом величина $g^{11}g_{11} + g^{22}g_{22} + g^{33}g_{33} = 2 + g^{00}g_{00}$.

Вычислим пространственно-временные компоненты контравариантного метрического тензора

$$\begin{aligned}
g^{10}g_{10} &= -\frac{u_1^2}{1+u^2} = -\beta_1^2 \\
g^{20}g_{20} &= \frac{u_2^2}{1+u^2} = \beta_2^2 \\
g^{30}g_{30} &= -\frac{u_3^2}{1+u^2} = -\beta_3^2
\end{aligned}$$

Причем справедливо $g_{l0} = \sqrt{-g_{ll}g_{00}}\beta_l$. Вычислим пространственные недиагональные компоненты контравариантного метрического тензора

$$\begin{aligned}
g^{21}\sqrt{g_{11}g_{22}} &= -\frac{u_1u_2}{1+u^2} = -\sqrt{\beta_1\beta_2} \\
g^{31}\sqrt{g_{11}g_{33}} &= -\frac{u_3u_1}{1+u^2} = -\sqrt{\beta_1\beta_3} \\
g^{32}\sqrt{g_{22}g_{33}} &= -\frac{u_3u_2}{1+u^2} = -\sqrt{\beta_2\beta_3}
\end{aligned}$$

При этом производная от величины метрического интервала равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x_\beta^p} &= \frac{\partial \sqrt{\sum_{\alpha=1}^N g_{ik\alpha} dx_\alpha^i dx_\alpha^k}}{\partial x_\beta^p} = \frac{g_{ik\beta} (\delta_p^i dx_\beta^k + \delta_p^k dx_\beta^i) + \frac{\partial g_{ik\alpha}}{\partial x_\beta^p} dx_\alpha^i dx_\alpha^k}{2 \sqrt{\sum_{\alpha=1}^N g_{ik\alpha} dx_\alpha^i dx_\alpha^k}} = \\ &= g_{pk\beta} \frac{dx_\beta^k}{ds} + \frac{\partial g_{ik\alpha}}{\partial x_\beta^p} \frac{dx_\alpha^k}{ds} dx_\alpha^i = g_{pk\beta} \frac{dx_\beta^k}{ds} . \\ \frac{\partial^2 s}{\partial x_\beta^p \partial x_\gamma^q} &= \frac{\partial g_{pk\beta}}{\partial x_\gamma^q} \frac{dx_\beta^k}{ds} + \frac{\partial g_{qk\gamma}}{\partial x_\beta^p} \frac{dx_\gamma^k}{ds} = \frac{dg_{pk\beta}}{ds} \frac{\partial s}{\partial x_\gamma^q} \frac{dx_\beta^k}{ds} + \frac{dg_{qk\gamma}}{ds} \frac{\partial s}{\partial x_\beta^p} \frac{dx_\gamma^k}{ds} \end{aligned}$$

Воспользуемся условием выбора произвольной системы отсчета и положим 4 условия $g_{00} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, g_{21} = g_{12} = 0, g_{31} = g_{13} = 0, g_{32} = g_{23} = 0$. Но каково уравнение ОТО в случае зависимости метрического тензора от $4N$ координат. Для этого надо записать тензор кривизны, зависящий от одного вида метрического тензора, но являющимся функцией $4N$ переменных

$$R_{ik\gamma} = \sum_{\beta=1}^N \left(\frac{\partial \Gamma_{ik\gamma}^l}{\partial x_\beta^l} - \frac{\partial \Gamma_{il\gamma}^l}{\partial x_\beta^k} \right) + \Gamma_{ik\gamma}^l \Gamma_{lm\gamma}^m - \Gamma_{il\gamma}^m \Gamma_{km\gamma}^l$$

Решаем задачу для гравитационного поля в пустоте, имеется $6N$ независимых уравнений ОТО и шесть неизвестных $g_{\alpha\alpha}, \beta_\alpha, \alpha = 1, \dots, 3$, зависящих от $4N$ координат. Причем для каждого тела имеется свое уравнение ОТО с метрическим тензором $g_{ik\alpha}, \alpha = 1, \dots, N$. Причем начальные условия на

бесконечности $g_{\alpha\alpha} = -1 - \frac{r_g}{r} n_\alpha^2, g_{\alpha 0} = 0, r_g = \frac{2Gm}{c^2}, \beta_\alpha = 0, \alpha = 1, \dots, 3$ см. [1]. Для

определения координат используем уравнение

$$\frac{dx_\gamma^\alpha}{ds} = u_\gamma^\alpha = \frac{\beta_\gamma^\alpha}{\sqrt{1 - \beta_\gamma^2}}, \alpha = 0, \dots, 3; \gamma = 1, \dots, N. \quad \text{Получим систему нелинейных}$$

обыкновенных дифференциальных уравнений, решая которую получим $g_{\alpha\alpha}(s), \beta_\alpha(s), \alpha = 1, \dots, 3, x_\gamma^k(s), k = 0, \dots, 3; \gamma = 1, \dots, N$.

$$\text{Тогда имеем } \sum_{\alpha=1}^N g_{ik\alpha}(s) u_\alpha^i u_\alpha^k = 1; s = s(u_1^0, \dots, u_1^3, \dots, u_N^0, \dots, u_N^3), u_{0\alpha}^2 = 1 + u_\alpha^2.$$

Таким образом можно описать метрический тензор для каждого из N тел, получится метрический тензор каждого тела $g_{ik\alpha} = g_{ik\alpha}(u_1^0, \dots, u_1^3, \dots, u_N^0, \dots, u_N^3)$.

Имеем зависимость $x_\gamma^k = x_\gamma^k(s) = \int_{s_0}^s u_\gamma^k(s) ds + x_\gamma^k(s_0), \gamma = 1, \dots, N; k = 0, \dots, 3$.

Метрический тензор определяется $3N$ независимыми компонентами скорости, причем эти $3N$ независимые скорости определяют координаты. Получается, что можно определить метрический тензор, при определенных значениях координат, т.е. задание метрического тензора с помощью параметров.

Можно определить переменные импульс и энергию материи, связанные соотношением $(E_\gamma)^2 = (p_\gamma^k)^2 c^2 + m_\gamma^2 c^4$. Причем переменные импульс и энергия материи определяются по формуле

$$E_\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta_\gamma^2(s)}}; p_\gamma^k = \frac{mc\beta_\gamma^k(s)}{\sqrt{1-\beta_\gamma^2(s)}}, \beta_{k\gamma} = -\beta_\gamma^k, k = 1, \dots, 3.$$

Подставляем в уравнение для связи энергии и импульса, и используя уравнение для суммарного импульса $P^k = \sum_\gamma p_\gamma^k + \frac{e}{c} A^k, k = 0, \dots, 3$ и энергии

$$E = \sum_\gamma E_\gamma + e\varphi \text{ поля и материи}$$

$$E^2 = (P^k)^2 c^2 + (\sum_\gamma m_\gamma)^2 c^4 \quad (1)$$

получим уравнение

$$(e\varphi)^2 + 2e\varphi \sum_\gamma E_\gamma + \sum_{\substack{\gamma, \delta \\ \gamma \neq \delta}} E_\gamma E_\delta = \sum_{k=1}^3 [(\frac{e}{c} A^k)^2 + 2\frac{e}{c} A^k \sum_\gamma p_\gamma^k + \sum_{\substack{\gamma, \delta \\ \gamma \neq \delta}} p_\gamma^k p_\delta^k] c^2 + \sum_{\substack{\gamma, \delta \\ \gamma \neq \delta}} m_\gamma m_\delta c^4$$

Потенциалы поля определяются по формулам

$$\varphi = [-\sum_\gamma E_\gamma(s) + \sqrt{\sum_\gamma [E_\gamma(s)]^2 + \sum_{\substack{\gamma, \delta \\ \gamma \neq \delta}} m_\gamma m_\delta c^4}] / e$$

$$A^k = \frac{c}{e} [-\sum_\gamma p_\gamma^k(s) + \sqrt{\sum_\gamma [p_\gamma^k(s)]^2}] \quad (2)$$

В случае одного тела векторный потенциал равен нулю, а скалярный потенциал определится в зависимости от энергии системы. Суммарная энергия и импульс материи и поля (1), определенного в соответствии с формулами (2), сохраняется. Суммарный импульс и энергия определится по формулам

$$P^k = \sqrt{\sum_{\gamma} [p_{\gamma}^k(s)]^2}$$

$$E = \sqrt{\sum_{\gamma} [E_{\gamma}(s)]^2 + \sum_{\substack{\gamma, \delta \\ \gamma \neq \delta}} m_{\gamma} m_{\delta} c^4}$$

Из (1) следует уравнение движения центра инерции

$$\frac{dP_k}{dt} = 0, P_k = P_k^0$$

$$\frac{dx_k}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial P_k} = -\frac{P_k^0 c}{\sqrt{(P_k^0)^2 + (\sum_{\gamma} m_{\gamma})^2 c^2}}$$

$$x_k = x_k^0 - \frac{P_k^0 c(t-t_0)}{\sqrt{(P_k^0)^2 + (\sum_{\gamma} m_{\gamma})^2 c^2}}$$

Сохраняется суммарная величина энергии и импульса материи и поля, т.е.

$$\text{имеем } E = e\varphi + \sum_{\gamma} E_{\gamma} = \sqrt{(P_0^{\alpha})^2 c^2 + (\sum_{\gamma} m_{\gamma})^2 c^4}, P^{\alpha} = \frac{e}{c} A^{\alpha} + \sum_{\gamma} p_{\gamma}^{\alpha} = P_0^{\alpha}.$$

В криволинейной траектории частицы $x_{\gamma}^k = x_{\gamma}^k(s), k = 0, \dots, 3; \gamma = 1, \dots, N; u_{\gamma}^0 = \sqrt{1 + u_{\gamma}^2}$ определится касательный скорость частицы $u_{\gamma}(s), \gamma = 1, \dots, N$, вдоль координаты s , имеем движение по инерции

$$\frac{dp_{\gamma}}{dt} = \frac{\partial E_{\gamma}}{\partial s} = \frac{p_{\gamma} \frac{dp_{\gamma}}{ds} c}{\sqrt{(p_{\gamma})^2 + (\sum_{\gamma} m_{\gamma})^2 c^2}} = -\frac{dp_{\gamma}}{ds} \frac{ds}{dt} \quad (3)$$

Из уравнения (3) имеем $p_{\gamma} = p_{\gamma}^0$. Из уравнения (4) имеем

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\partial E_\gamma}{\partial p_\gamma} = -\frac{p_\gamma^0 c}{\sqrt{(p_\gamma^0)^2 + (\sum_\gamma m_\gamma)^2 c^2}} \quad (4)$$

$$s = s^0 - \frac{p_\gamma^0 c (t - t_0)}{\sqrt{(p_\gamma^0)^2 + (\sum_\gamma m_\gamma)^2 c^2}}$$

Энергия при движения по инерции равна $E_\gamma = \sqrt{(p_\gamma^0)^2 c^2 + m_\gamma^2 c^4}$.

Имеем уравнение для движения вдоль криволинейной траектории

$s = s^0 - \frac{p_\gamma^0 c (t - t_0)}{\sqrt{(p_\gamma^0)^2 + (\sum_\gamma m_\gamma)^2 c^2}}$ с постоянной скоростью. Траектории определяется

уравнение $x_\gamma^k(t) = x_{\gamma 0}^k + x_\gamma^k [s^0 - \frac{p_\gamma^0 c (t - t_0)}{\sqrt{(p_\gamma^0)^2 + (\sum_\gamma m_\gamma)^2 c^2}}]$, причем с постоянной

касательной скоростью $\frac{dx_\gamma^k}{dt} = -\frac{dx_\gamma^k(s)}{ds} \frac{p_\gamma^0 c}{\sqrt{(p_\gamma^0)^2 + (\sum_\gamma m_\gamma)^2 c^2}}$.

Для неподвижного одного тела получаем диагональный метрический тензор и решение Шварцшильда.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля т. II, Наука, М., 1973, 564с.