Проблема получения метрического тензора многих тел

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Проблема получения решения для нескольких тел до сих пор не решена в ОТО. Она осложняется тем, что функция Лагранжа в 4 порядке малости для нескольких тел зависит от величины метрического тензора g_{ok}, что приводит к сложному виду контравариантного тензора и связанным с этим сложными вычислениями. Задача упрощается, если ввести зависимость от одной переменной, равной метрическому интервалу. Тогда получим уравнение не в частных производных, а систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим задачу вычисления контравариантного метрического тензора в случае не диагонального метрического тензора. Для этого подсчитаем определитель метрического тензора

$$|g_{lk}| = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & 0 & 0 \\ g_{20} & 0 & g_{22} & 0 \\ g_{30} & 0 & 0 & g_{33} \end{vmatrix} = -g_{30}g_{11}g_{33}g_{03} + g_{33}(g_{00}g_{11}g_{22} - g_{10}g_{01}g_{22} - g_{20}g_{02}g_{11}) = .$$

$$= g_{00}g_{11}g_{22}g_{33}(1 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2), u_l^2 = -\frac{g_{l0}^2}{g_{ll}g_{00}} > 0$$

Вычислим диагональные контравариантные компоненты метрического тензора

$$g^{00}g_{00}=\frac{1}{1+u^2}=\frac{1}{u_0^2};u^2=u_1^2+u_2^2+u_3^2$$
$$u_0^2=1+u^2;u_0^2-u^2=1$$
$$g^{11}g_{11}=\frac{1+u_2^2+u_3^2}{1+u^2}=1-\frac{u_1^2}{1+u^2}=1-\beta_1^2$$
$$g^{22}g_{22}=\frac{1+u_1^2+u_3^2}{1+u^2}=1-\frac{u_2^2}{1+u^2}=1-\beta_2^2 \quad .$$
$$g^{33}g_{33}=\frac{1+u_1^2+u_2^2}{1+u^2}=1-\frac{u_3^2}{1+u^2}=1-\beta_3^2$$
$$\beta_l=\frac{u_l}{\sqrt{1+u^2}};u_l=\frac{\beta_l}{\sqrt{1-\beta^2}};\beta^2=\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2$$

Компоненты $u_0^2-u^2=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2=1$ образуют четырехмерные скорости пространства Минковского и является определением величины u_0^2.

При этом величина $g^{11}g_{11}+g^{22}g_{22}+g^{33}g_{33}=2+g^{00}g_{00}$.

Вычислим пространственно-временные компоненты контравариантного метрического тензора

$$g^{10}g_{10}=-\frac{u_1^2}{1+u^2}=-\beta_1^2$$
$$g^{20}g_{20}=\frac{u_2^2}{1+u^2}=\beta_2^2$$
$$g^{30}g_{30}=-\frac{u_3^2}{1+u^2}=-\beta_3^2$$

Причем справедливо $g_{l0}=\sqrt{-g_{ll}g_{00}}\beta_l$. Вычислим пространственные не диагональные компоненты контравариантного метрического тензора

$$g^{21}\sqrt{g_{11}g_{22}}=-\frac{u_1u_2}{1+u^2}=-\sqrt{\beta_1\beta_2}$$
$$g^{31}\sqrt{g_{11}g_{33}}=-\frac{u_3u_1}{1+u^2}=-\sqrt{\beta_1\beta_3}$$
$$g^{32}\sqrt{g_{22}g_{33}}=-\frac{u_3u_2}{1+u^2}=-\sqrt{\beta_2\beta_3}$$

При этом производная от величины метрического интервала равна

$$\frac{\partial s}{\partial x_\beta^p} = \frac{\partial\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{N} g_{ik\alpha} dx_\alpha^i dx_\alpha^k}}{\partial x_\beta^p} = \frac{g_{ik\beta}(\delta_p^i dx_\beta^k + \delta_p^k dx_\beta^i) + \frac{\partial g_{ik\alpha}}{\partial x_\beta^p} dx_\alpha^i dx_\alpha^k}{2\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{N} g_{ik\alpha} dx_\alpha^i dx_\alpha^k}} =$$

$$= g_{pk\beta}\frac{dx_\beta^k}{ds} + \frac{\partial g_{ik\alpha}}{\partial x_\beta^p}\frac{dx_\alpha^k}{ds} dx_\alpha^i = g_{pk\beta}\frac{dx_\beta^k}{ds}.$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x_\beta^p \partial x_\gamma^q} = \frac{\partial g_{pk\beta}}{\partial x_\gamma^q}\frac{dx_\beta^k}{ds} + \frac{\partial g_{qk\gamma}}{\partial x_\beta^p}\frac{dx_\gamma^k}{ds} = \frac{dg_{pk\beta}}{ds}\frac{\partial s}{\partial x_\gamma^q}\frac{dx_\beta^k}{ds} + \frac{dg_{qk\gamma}}{ds}\frac{\partial s}{\partial x_\beta^p}\frac{dx_\gamma^k}{ds}$$

Воспользуемся условием выбора произвольной системы отсчета и положим 4 условия $g_{00} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, g_{21} = g_{12} = 0, g_{31} = g_{13} = 0, g_{32} = g_{23} = 0$. Но каково уравнение ОТО в случае зависимости метрического тензора от $4N$ координат. Для этого надо записать тензор кривизны, зависящий от одного вида метрического тензора, но являющимся функцией 4N переменных

$$R_{ik\gamma} = \sum_{\beta=1}^{N} \left(\frac{\partial \Gamma_{ik\gamma}^l}{\partial x_\beta^l} - \frac{\partial \Gamma_{il\gamma}^l}{\partial x_\beta^k}\right) + \Gamma_{ik\gamma}^l \Gamma_{lm\gamma}^m - \Gamma_{il\gamma}^m \Gamma_{km\gamma}^l$$

Решаем задачу для гравитационного поля в пустоте, имеется 6N независимых уравнений ОТО и шесть неизвестных $g_{\alpha\alpha}, \beta_\alpha, \alpha = 1,\dots,3$, зависящих от $4N$ координат. Причем для каждого тела имеется свое уравнение ОТО с метрическим тензором $g_{ik\alpha}, \alpha = 1,\dots,N$. Причем начальные условия на бесконечности $g_{\alpha\alpha} = -1 - \frac{r_g}{r} n_\alpha^2, g_{\alpha 0} = 0, r_g = \frac{2Gm}{c^2}, \beta_\alpha = 0, \alpha = 1,\dots,3$ см. [1]. Для определения координат используем уравнение $\frac{dx_\gamma^\alpha}{ds} = u_\gamma^\alpha = \frac{\beta_\gamma^\alpha}{\sqrt{1-\beta_\gamma^2}}, \alpha = 0,\dots,3; \gamma = 1,\dots,N$. Получим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, решая которую получим $g_{\alpha\alpha}(s), \beta_\alpha(s), \alpha = 1,\dots,3, x_\gamma^k(s), k = 0,\dots,3; \gamma = 1,\dots,N$.

Тогда имеем $\sum_{\alpha=1}^{N} g_{ik\alpha}(s) u_\alpha^i u_\alpha^k = 1; s = s(u_1^0,\dots,u_1^3,\dots,u_N^0,\dots,u_N^3), u_{0\alpha}^2 = 1 + u_\alpha^2$.

Таким образом можно описать метрический тензор для каждого из N тел, получится метрический тензор каждого тела $g_{ik\alpha} = g_{ik\alpha}(u_1^0,....,u_1^3,...,u_N^0,....,u_N^3)$.

Имеем зависимость $x_\gamma^k = x_\gamma^k(s) = \int\limits_{s_0}^{s} u_\gamma^k(s)ds + x_\gamma^k(s_0), \gamma = 1,...,N; k = 0,...,3$.

Метрический тензор определяется 3N независимыми компонентами скорости, причем эти 3N независимые скорости определяют координаты. Получается, что можно определить метрический тензор, при определенных значениях координат, т.е. задание метрического тензора с помощью параметров.

Можно определить переменные импульс и энергию материи, связанные соотношением $(E_\gamma)^2 = (p_\gamma^k)^2 c^2 + m_\gamma^2 c^4$. Причем переменные импульс и энергия материи определяются по формуле

$$E_\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta_\gamma^2(s)}}; p_\gamma^k = \frac{mc\beta_\gamma^k(s)}{\sqrt{1-\beta_\gamma^2(s)}}, \beta_{k\gamma} = -\beta_\gamma^k, k = 1,...,3.$$

Подставляем в уравнение для связи энергии и импульса, и используя уравнение для суммарного импульса $P^k = \sum\limits_\gamma p_\gamma^k + \frac{e}{c}A^k, k = 0,...,3$ и энергии $E = \sum\limits_\gamma E_\gamma + e\varphi$ поля и материи

$$E^2 = (P^k)^2 c^2 + (\sum_\gamma m_\gamma)^2 c^4 \tag{1}$$

получим уравнение

$$(e\varphi)^2 + 2e\varphi\sum_\gamma E_\gamma + \sum_{\substack{\gamma,\delta \\ \gamma\neq\delta}} E_\gamma E_\delta = \sum_{k=1}^{3} [(\frac{e}{c}A^k)^2 + 2\frac{e}{c}A^k \sum_\gamma p_\gamma^k + \sum_{\substack{\gamma,\delta \\ \gamma\neq\delta}} p_\gamma^k p_\delta^k]c^2 + \sum_{\substack{\gamma,\delta \\ \gamma\neq\delta}} m_\gamma m_\delta c^4$$

Потенциалы поля определятся по формулам

$$\begin{gathered} \varphi = [-\sum_\gamma E_\gamma(s) + \sqrt{\sum_\gamma [E_\gamma(s)]^2 + \sum_{\substack{\gamma,\delta \\ \gamma\neq\delta}} m_\gamma m_\delta c^4}\,]/e \\ A^k = \frac{c}{e}[-\sum_\gamma p_\gamma^k(s) + \sqrt{\sum_\gamma [p_\gamma^k(s)]^2}\,] \end{gathered} . \tag{2}$$

В случае одного тела векторный потенциал равен нулю, а скалярный потенциал определится в зависимости от энергии системы. Суммарная энергия и импульс материи и поля (1), определенного в соответствии с формулами (2), сохраняется. Суммарный импульс и энергия определится по формулам

$$P^k = \sqrt{\sum_\gamma [p_\gamma^k(s)]^2}$$
$$E = \sqrt{\sum_\gamma [E_\gamma(s)]^2 + \sum_{\substack{\gamma,\delta \\ \gamma\neq\delta}} m_\gamma m_\delta c^4}$$

Из (1) следует уравнение движения центра инерции

$$\frac{dP_k}{dt} = 0, P_k = P_k^0$$
$$\frac{dx_k}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial P_k} = -\frac{P_k^0 c}{\sqrt{(P_k^0)^2 + (\sum_\gamma m_\gamma)^2 c^2}}$$
$$x_k = x_k^0 - \frac{P_k^0 c(t-t_0)}{\sqrt{(P_k^0)^2 + (\sum_\gamma m_\gamma)^2 c^2}}$$

Сохраняется суммарная величина энергии и импульса материи и поля, т.е. имеем $E = e\varphi + \sum_\gamma E_\gamma = \sqrt{(P_0^\alpha)^2 c^2 + (\sum_\gamma m_\gamma)^2 c^4}, P^\alpha = \frac{e}{c} A^\alpha + \sum_\gamma p_\gamma^\alpha = P_0^\alpha$.

В криволинейной траектории частицы $x_\gamma^k = x_\gamma^k(s), k = 0,...,3; \gamma = 1,..., N; u_\gamma^0 = \sqrt{1+u_\gamma^2}$ определится касательный скорость частицы $u_\gamma(s), \gamma = 1,..., N$, вдоль координаты s, имеем движение по инерции

$$\frac{dp_\gamma}{dt} = \frac{\partial E_\gamma}{\partial s} = \frac{p_\gamma \frac{dp_\gamma}{ds} c}{\sqrt{(p_\gamma)^2 + (\sum_\gamma m_\gamma)^2 c^2}} = -\frac{dp_\gamma}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad (3)$$

Из уравнения (3) имеем $p_\gamma = p_\gamma^0$. Из уравнения (4) имеем

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\partial E_\gamma}{\partial p_\gamma} = -\frac{p_\gamma^0 c}{\sqrt{(p_\gamma^0)^2 + (\sum_\gamma m_\gamma)^2 c^2}}$$

$$s = s^0 - \frac{p_\gamma^0 c(t - t_0)}{\sqrt{(p_\gamma^0)^2 + (\sum_\gamma m_\gamma)^2 c^2}} \qquad (4)$$

Энергия при движения по инерции равна $E_\gamma = \sqrt{(p_\gamma^0)^2 c^2 + m_\gamma^2 c^4}$.

Имеем уравнение для движения вдоль криволинейной траектории $s = s^0 - \frac{p_\gamma^0 c(t - t_0)}{\sqrt{(p_\gamma^0)^2 + (\sum_\gamma m_\gamma)^2 c^2}}$ с постоянной скоростью. Траектории определяется уравнение $x_\gamma^k(t) = x_{\gamma 0}^k + x_\gamma^k[s^0 - \frac{p_\gamma^0 c(t - t_0)}{\sqrt{(p_\gamma^0)^2 + (\sum_\gamma m_\gamma)^2 c^2}}]$, причем с постоянной касательной скоростью $\frac{dx_\gamma^k}{dt} = -\frac{dx_\gamma^k(s)}{ds} \frac{p_\gamma^0 c}{\sqrt{(p_\gamma^0)^2 + (\sum_\gamma m_\gamma)^2 c^2}}$.

Для неподвижного одного тела получаем диагональный метрический тензор и решение Шварцшильда.

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля т. II, Наука, М.,1973,564с.