Вычисление метрического тензора взаимодействующих тел

и построение сохраняющегося тензора

энергии-импульса материи и гравитационного поля

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Пользуясь доказанной в статье аналогией между ОТО и СТО вычислим значение четырехмерной скорости, и на этой основе определим метрический тензор ОТО поступательно двигающихся тел. Имея метрический тензор неподвижных тел можно вычислить метрический тензор поступательно двигающихся тел путем замены аргументов. В результате, зная статический метрический тензор взаимодействия тел, можно определить метрический тензор для двигающихся тел. Удалось построить тензор энергии-импульса как для материи, так и для гравитационного поля. Причем сумма тензора энергии-импульса материи и гравитационного поля сохраняется.

Определение метрического тензора одного главного тела в взаимодействии с другими телами сводится к уравнению, где метрический тензор зависит от гравитационного поля. Причем каждое тело, относительно которого записано уравнение является главным. Метрический тензор g_{nm} зависит от координат всех тел, величина Δg_{nm}, зависящая от координат остальных тел, без учета главного тела. Получается метрический тензор, зависящий от координат одного тела

$$(g_{nm}-\Delta g_{nm})u^n u^m = (g_{nm}-\Delta g_{nm})\frac{p^n}{mc}\frac{p^m}{mc}=1$$

$$\begin{gathered}(g_{00}-\Delta g_{00})(p^0)^2 + 2\sum_{n=1}^{3}(g_{n0}-\Delta g_{n0}))p^n p^0 + \sum_{n,m=1}^{3}(g_{nm}-\Delta g_{nm})p^n p^m = \\ = (\sqrt{\lambda_0}\sum_{k=0}^{3} h_{k0}p^k)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3}(\sqrt{-\lambda_\alpha}\sum_{k=0}^{3} h_{k\alpha}p^k)^2 = \\ = [(\sqrt{\Lambda_{0\xi}}\sum_{k=0}^{3}\xi_{k0} - \sqrt{\Lambda_{0\eta}}\sum_{k=0}^{3}\eta_{k0})p^k]^2 - \sum_{\alpha=1}^{3}[(\sqrt{-\Lambda_{\alpha\xi}}\sum_{k=0}^{3}\xi_{k\alpha} - \sqrt{-\Lambda_{\alpha\eta}}\sum_{k=0}^{3}\eta_{k\alpha})p^k]^2 = m^2c^2\end{gathered} \quad . (1)$$

$$(\sqrt{\Lambda_{0\xi}}\sum_{k=0}^{3}\ \xi_{k0}-\sqrt{\Lambda_{0\eta}}\sum_{k=0}^{3}\ \eta_{k0})p^k=\sqrt{\lambda_0}\sum_{k=0}^{3}\ h_{k0}p^k;q^0=P^0-\frac{e}{c}A^0;$$
$$(\sqrt{-\Lambda_{\alpha\xi}}\sum_{k=0}^{3}\ \xi_{k\alpha}-\sqrt{-\Lambda_{\alpha\eta}}\sum_{k=0}^{3}\ \eta_{k\alpha})p^k=\sqrt{-\lambda_\alpha}\sum_{k=0}^{3}\ h_{k\alpha}p^k;q^\alpha=P^\alpha-\frac{e}{c}A^\alpha$$

Где решена задача на собственные значения и векторы

$$(g_{kn}-\Delta g_{nm}-\lambda_\alpha\delta_{kn})h_{n\alpha}=0$$
$$|g_{kn}-\Delta g_{nm}-\lambda_\alpha\delta_{kn}|=0$$
$$(g_{kn}-\Lambda_{\alpha\xi}\delta_{kn})\xi_{n\alpha}=0$$
$$|g_{kn}-\Lambda_{\alpha\xi}\delta_{kn}|=0$$

Имеем определение величин, зависящих от координат всех тел, кроме главного члена. Эта величина определяет «электрическое поле». Оно описывается как электрическое поле, имеет потенциал, напряженности, создающие силу Лоренца, описывает сохраняющийся тензор энергии-импульса поля и материи, и подчиняется волновому уравнению и обусловлено гравитационным полем

$$\sqrt{\Lambda_{0\eta}}\sum_{k=0}^{3}\ \eta_{k0}=\sqrt{\Lambda_{0\xi}}\sum_{k=0}^{3}\ \xi_{k0}-\sqrt{\lambda_0}\sum_{k=0}^{3}\ h_{k0}$$
$$\sqrt{-\Lambda_{\alpha\eta}}\sum_{k=0}^{3}\ \eta_{k\alpha}=\sqrt{-\Lambda_{\alpha\xi}}\sum_{k=0}^{3}\ \xi_{k\alpha}-\sqrt{-\lambda_\alpha}\sum_{k=0}^{3}\ h_{k\alpha}.$$

Уравнение ОТО записано для одного из тел и содержит потенциал этого тела. Метрический тензор с символом Δ определяет потенциал остальных тел и является аналогом внешнего «электромагнитного поля».

Где собственные числа $\lambda_0>0,\lambda_\beta<0,\Lambda_0>0,\Lambda_\beta<0,\beta=1,...,3$. Причем справедливо определение обобщенной энергии E по формуле $\frac{(E-e\varphi)^2}{c^2}=(P^k-\frac{e}{c}A^k)^2+m^2c^2$ так как нулевая проекция импульса p^0 ответственна за энергию. При этом величина обобщенного импульса равна $P^\beta=\sqrt{-\Lambda_{\beta\xi}}\sum_{k=0}^{3}\ \xi_k^\beta p^k;P^0=\sqrt{\Lambda_{0\xi}}\sum_{k=0}^{3}\ \xi_k^0 p^k$, так как содержит линейную комбинацию четырехмерного импульса. Выделена зависимость от координат тела, причем $q^\beta=(q^0,q^k)$ обозначаем как импульс тела. Члены, зависящие от координат других тел, определяем, как потенциал «электромагнитного поля». При этом имеется связь между обобщенной энергией E и обобщенным импульсом P^β

$$(P^0-\frac{e}{c}\varphi)^2=\sum_{\beta=1}^{3}(P^\beta-\frac{e}{c}A^\beta)^2+m^2c^2;(q^0)^2=\sum_{\beta=1}^{3}(q^\beta)^2+m^2c^2. \qquad (2)$$

Аналогом этой формулы в СТО является формула $\frac{(E-e\varphi)^2}{c^2}=\sum_{\beta=1}^{3}(P^k-\frac{e}{c}A^k)^2+m^2c^2$ см. [1]. Причем определится знак выражения $\frac{e}{c}\varphi,\frac{e}{c}A^\beta$ из условия, что суммарная энергия E должна быть положительная. Как будет доказано в дальнейшем знак потенциала определяется знаком заряда «электромагнитного поля». Это означает, что в формуле СТО (2) поле определяется квадратом заряда. Т.е. знак заряда не существенен. В результате получится уравнения Максвелла с не существенным знаком заряда, т.е. «электромагнитное поля» является гравитационным, и заряд равен $e=m\sqrt{G}$ в единицах СГС, где G - гравитационная постоянная, и взаимодействие между зарядами только притяжение.

Функция Лагранжа для этого гамильтониана равна

$$L=-mc^2\sqrt{1-V^2/c^2}+\sum_{\beta=1}^{3}eA_\beta V^\beta/c-e\varphi$$

Величина (q^0,q^β) соответствует четырехмерному импульсу тела с учетом собственного гравитационного поля. Суммарный импульс и энергия тела и «электромагнитного поля» равен $P^\beta=\frac{e}{c}A^\beta+q^\beta;E=q^0+e\varphi$. При этом можно ввести четырехмерную обобщенную скорость, зависящую от собственного гравитационного поля

$$U^k/c=\frac{q^k/mc}{\sqrt{1+\sum_{l=1}^{3}(q^l/mc)^2}},$$

которая определяется с помощью формулы $q^\beta/mc=\frac{U^\beta/c}{\sqrt{1-\sum_{k=1}^{3}(U^k/c)^2}}$.

Предварительно надо связать величины скоростей $V^l/c=dx^l/cdt$, полученных дифференцированием по времени, с четырехмерными скоростями $u^l=dx^l/ds$ по формуле $V^l/c=u^l\alpha,l=0,...,3,V^0=c$, где необходимо определить коэффициент пропорциональности α. Причем это нужно сделать для каждой частицы или тела. Назовем скорость V^l/c трехмерной скоростью в системе координат. Скорость u^l называется четырехмерной скоростью. Это скорость движения тела. Тогда имеем четырехмерную скорость, полученную, по аналогии с СТО, при этом будем записывать и формулы СТО для сравнения

$$u^n = \frac{V^n/c}{\sqrt{g_{00} + 2g_{k0}V^k/c + g_{kn}V^kV^n/c^2}}$$
$$u^n = \frac{V^n/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \qquad (3)$$

Формулу можно преобразовать к виду, она получается умножением формулы двух скоростей, вычисленных по формуле (3), умноженных на соответствующий метрический тензор и эта величина суммируется

$$\frac{2g_{k0}V^k/c + g_{kn}V^kV^n/c^2}{g_{00} + 2g_{k0}V^k/c + g_{kn}V^kV^n/c^2} = 2g_{k0}u^ku^0 + g_{kn}u^ku^n .$$

Преобразуем это уравнение, получив из равенства $\frac{a}{b} = \frac{c}{1}$ соотношение

$\frac{a}{b-a} = \frac{c}{1-c}$

$$\frac{2g_{k0}V^k/c + g_{kn}V^kV^n/c^2}{g_{00}} = \frac{2g_{k0}u^ku^0 + g_{kn}u^ku^n}{1 - 2g_{k0}u^ku^0 - g_{kn}u^ku^n}$$

Подставляя значение скорости, полученной с помощью собственного времени, выраженное через компоненту четырехмерной скорости, получим уравнение по определению α

$$\frac{2g_{k0}u^ku^0 + \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^ku^n}{g_{00}}\alpha^2 = \frac{2g_{k0}u^ku^0 + \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^ku^n}{1 - 2g_{k0}u^ku^0 - \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^ku^n}$$

Откуда находим

$$\alpha = \sqrt{\frac{g_{00}}{1 - 2g_{k0}u^k u^0 - \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^k u^n}}.$$

При условии $g_{k0} = 0$, получаем значение $\alpha = \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^k u^n}}$. При этом значение трехмерной скорости равно $V^l / c = u^l \sqrt{\frac{g_{00}}{1 - 2g_{k0}u^k u^0 - \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}u^k u^n}}$, которая является аналогом формулы $V^l / c = \frac{u^l}{\sqrt{1 + \sum_{l=1}^{3} (u^l)^2}} < 1$. При значении $u^l = 1$, получаем значение скорости $\frac{V^l}{c} = \sqrt{\frac{g_{00}}{1 - 2\sum_{k=1}^{3} g_{k0} - \sum_{k,n=1}^{3} g_{kn}}}$. В пространстве Минковского эта скорость равна $V^l / c = 1/2$.

Подставляя в формулу для импульса частицы $q^0 = mcu^0, q^k = mcu^k$, значение u^n из формулы (3), получим четырехмерный импульс тела

$$q^0 = H(x_i, V^i)/c = \sqrt{\lambda_0}\sum_{k=0}^{3} h_{k0}p^k$$
$$q^\beta = \sqrt{-\lambda_\beta}\sum_{k=0}^{3} h_{k\beta}p^k \qquad (4)$$

Эти формулы аналогичны формулам СТО

$$q^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - U^2/c^2}} = mcu^0, q^\beta = \frac{mU^\beta}{\sqrt{1 - U^2/c^2}} = mcu^\beta$$

И соответствуют импульсу движения тела с учетом собственного гравитационного поля. Аналогично выводу влияния электромагнитного поля на массы тел, получаем уравнение см. [1]

$$mc\frac{du_l}{ds} = \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l}{\partial x^k}\right)u^k = F_{lk}u^k, A_0 = -\varphi$$

Откуда получаем значение напряженности «электромагнитного поля» и силу Лоренца. Но эти потенциалы основаны на волновом уравнении и имеют структуру решения волнового уравнения. Для тензора электромагнитного поля F_{ik} справедливо

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{il}}{\partial x^k}=0$$

Которое сводится к четырем уравнениям, совпадающим с первыми двумя уравнениями Максвелла.

Варьируя действие см. [1] § 30

$$\delta S=-\frac{1}{c}\int\left(\frac{1}{c}j^i\delta A_i+\frac{1}{8\pi}F^{ik}\delta F_{ik}\right)d\Omega=0\,.$$

Получим вторую пару уравнений Максвелла

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}=-\frac{4\pi}{c}j^i$$

Аналогично вводим тензор энергии-импульса «электромагнитного поля»

$$T^{ik}=\frac{1}{4\pi}\left(-F^{il}F_l^{\ k}+\frac{1}{4}g^{ik}F_{lm}F^{lm}\right)$$

Тензор энергии импульса обладает всеми свойствами электромагнитного поля. Причем его свертка равна нулю $T_i^i=0$. Введем тензор энергии-импульса материальных тел. Он равен

$$T^{lk}=\mu c u^l u^k\frac{ds}{dt}=\sum_\alpha m_\alpha c u^l u^k\frac{ds}{dt}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha)\,.$$

Причем сумма тензора энергии импульса «электромагнитного поля» и материи сохраняется см. [1].

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(T_{le.f}^k+T_{lm}^k)=0$$

Обращаю внимание, что построен сохраняющийся тензор энергии-импульса для «электрического поля» и материи с собственным полем. «Электрическое поле» соответствует внешней энергии и импульсу гравитационного поля. Если псевдотензор энергии импульса гравитационного поля и материи не сохраняется, то построенный тензор энергии-импульса сохраняется.

Введем новые координаты по формуле

$$R_\sigma = \frac{1}{\sum_\alpha 1/R_\alpha}, \sin^2\theta_\sigma = \sum_\alpha \sin^2\theta_\alpha R_\sigma^2/R_\alpha^2, \exp(i\varphi_\sigma) = \sum_\alpha \exp(i\varphi_\alpha) R_\sigma/R_\alpha, R_\alpha = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha| \quad (5)$$

Имеем связь между координатами

$$\frac{\sum_\alpha [(x_{1\alpha})^2 + (x_{2\alpha})^2]/R_\alpha^2}{(\sum_\alpha 1/R_\alpha)^2} = R_\sigma^4 \sum_\alpha \sin^2\theta_\alpha / R_\alpha^2 = R_\sigma^2 \sin^2\theta$$

$$y_1 + iy_2 = \sum_\alpha (x_{1\alpha} + ix_{2\alpha}) \sin\theta_\sigma R_\sigma / (R_\alpha^2 \sin\theta_\alpha) = \sin\theta_\sigma \sum_\alpha \exp(i\varphi_\alpha) R_\sigma / R_\alpha = \sin\theta_\sigma \exp(i\varphi_\sigma)$$

$$\frac{\sum_\alpha (x_{1\alpha}^2 + x_{2\alpha}^2 + x_{3\alpha}^2)/R_\alpha^2}{(\sum_\alpha 1/R_\alpha)^2} = R_\sigma^2$$

$$y_3 = \sqrt{\sum_\alpha x_{3\alpha}^2 R_\sigma^2 / R_\alpha^2} = R_\sigma \cos\theta$$

Тогда метрический интервал запишется в виде

$$ds^2 = \exp(\nu) c^2 dt^2 - R_\sigma^2 [d\theta_\sigma^2 + \sin^2\theta_\sigma d\varphi_\sigma^2] - \exp(\lambda) dR_\alpha^2 \quad (6)$$

Тогда решение в новых координатах запишется в виде

$$g_{00} = 1 - \frac{r_{g\sigma}}{R_\sigma}, g_{RR} = -\frac{1}{1 - \frac{r_{g\sigma}}{R_\sigma}}, g_{\theta\theta} = -R_\sigma^2, g_{\varphi\varphi} = -R_\sigma^2 \sin^2\theta_\sigma . r_{g\sigma} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha / R_\alpha}{\sum_\beta 1/R_\beta} \frac{2G}{c^2} .$$

В результате решения получим статическое распределение N тел. Нужно для описания распределения N тел ввести скорости их движения.

Решая уравнение движения в «электромагнитном поле» получим изменение координаты

$$y_1 + iy_2 = y_1^0 + iy_2^0 + \int_0^s \sum_\alpha \frac{(u_{1\alpha} + iu_{2\alpha}) \sin\theta_\sigma R_\sigma / (R_\alpha \sin\theta_\alpha)}{\sqrt{(u_{1\alpha}/\sin\theta_\alpha)^2 + (u_{2\alpha}/\sin\theta_\alpha)^2}} ds = y_1^0 + iy_2^0 + \Delta(y_1 + iy_2)$$

$$y_3 = y_3^0 + \sqrt{\frac{\sum_\alpha (\int_0^s u_{3\alpha}(s) ds / R_\alpha)^2}{\sum_\alpha 1/R_\alpha^2}} = y_3^0 + \Delta y_3$$

и получаем метрический тензор двигающегося тела по статическому значению метрического тензора $g_{lk}(x^1,...,x^3) = g_{lk}(y_0^1 + \Delta y^1,..., y_0^3 + \Delta y^3)$.

В случае двигающихся тел метрический тензор определяется по формуле

$$ds^2 = g_{nm}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r})dx^n dx^m\ .$$

Где величина $\mathbf{u}_l(s), l = 1,..., N$ определена в рамках построенной СТО.

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля т.II, Наука, М.,1973,564с.