Учет влияния мнимого решения на действительную часть.

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с правой частью полиномом конечной степени в случае комплексных координат положения равновесия это сложная задача. Необходимо пересчитывать мнимое решение в действительное. Разработаны решения для полинома 2 степени от многих переменных. Обобщим на произвольную степень.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений с полиномом N степени

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{p_1+...+p_N=0}^{P} a_{kp_1...p_N} x_1^{p_1}...x_N^{p_N}, a_{k0...0} = \frac{T}{k} \qquad (1)$$

Решение в случае k уравнения ищем в виде $x_n = \frac{\alpha_k}{n^2+1}$, причем вычислив коэффициент α_k из k уравнения, получим значение $x_n = \frac{\alpha_n}{n^2+1}$. Как показал расчет гидродинамического коэффициента сопротивления данный метод расчета имеет точность 10%, хотя нелинейное уравнение решено с большей точностью. Но проблема турбулентного решения состоит в учете шероховатостей и для их аппроксимации получена такая точность. Учет следующего приближения $x_n = \frac{\alpha_{n1}}{n^3+1}$ повысит точность расчетов нелинейного уравнения. Подставим решения $x_n = \frac{\alpha_k(t)}{n^2+1}$ в дифференциальное уравнение, получим

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{p=0}^{P} a_{kp}\alpha_k^p / p!, a_{k0} = \frac{T}{k}.$$

При этом ламинарное устойчивое решение $\alpha_k = -\frac{a_{k0}}{a_{k1}} = -\frac{T}{ka_{k1}}, a_{k0} > 0.a_{k1} < 0$. В гидродинамике этому режиму соответствует течение Пуазейля. Но в случае других уравнений в частных производных, соотношение между коэффициентами другое, и течения Пуазейля возможно просто нет. Хотя ламинарный режим существует и в других нелинейных уравнениях, и его простейший случай течение Пуазейля существует, как действительное решение с минимальной скоростью при малом внешнем воздействии T. Учитывается линейный и постоянный члены ряда, при малом внешнем воздействии квадратичный и члены ряда более высокой степени малы. При увеличении внешнего воздействия возникает комплексное решение и турбулентный режим. Это возникновение турбулентного режима определяется видом уравнения, и для каждого уравнения индивидуально. Турбулентный комплексный режим существует у всех нелинейных уравнений в частных производных.

Устойчивым решением является решение квадратного уравнения

$$\frac{dx_k}{dt} = a_{k0} + a_{k1}\alpha_k + \alpha_k^2(a_{k2} + a_{k3}\alpha_k + ... + a_{kP}\alpha_k^{P-2}) =$$
$$= \frac{T}{k} - 2R_{cr}\alpha_k + \alpha_k^2 b_{k2}, b_{k2} = a_{k2} + a_{k3}\alpha_k + ... + a_{kP}\alpha_k^{P-2}; a_{k0} = \frac{T}{k}.$$

Расчет устойчивого решения задачи сводится к решению квадратного уравнения и использования рекуррентной схемы

$$\alpha_k = \frac{R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - \frac{Tb_{k2}}{k}}}{b_{k2}}; b_{k2} = a_{k2} + a_{k3}\alpha_k + ... + a_{kP}\alpha_k^{P-2}, \qquad (2)$$

Ламинарное решение имеет вид $\alpha_k = \frac{T}{2kR_{cr}} + O(T^2)$. Эта рекуррентная схема (2) сходится до определенного предела внешнего воздействия. При этом с ростом величины внешнего воздействия значение α_k убывает, становится комплексной, что говорит о сходимости метода при произвольном внешнем воздействии. При малом внешнем воздействии достигается максимум коэффициента $\alpha_k = \frac{R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - \frac{Ta_{k2}}{k}}}{a_{k2}}$, при его росте возникает мнимое решение и постоянный член $\alpha_k = \frac{2kR_{cr}^2}{Ta_{k3}} + i\sqrt[4]{\frac{2kR_{cr}}{a_{k3}} - \frac{4k^2R_{cr}^4}{T^2a_{k3}^2}}; \frac{Ta_{k3}}{2kR_{cr}^2} > 1; \frac{2kR_{cr}}{a_{k3}} \sim 1$. При стремящемся к бесконечности внешнем воздействии T решение стремится к комплексной малой величине $\alpha_k = i\sqrt{\frac{kR_{vr}^2}{a_{k4}T + ia_{k5}\sqrt{Tk}R_{cr}/\sqrt{a_{k4}}}}[1 + o(\frac{R_{cr}^2}{T})]$. Полученное решение является основным устойчивым решением дифференциального уравнения (1). Кроме него имеются другие координаты положения равновесия, которые определяются из (3).

Можно также свести к уравнению 3 степени, имеющее обязательно действительное решение

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{T}{k} - 2R_{cr}\alpha_k + a_{k2}\alpha_k^2 + \alpha_k^3(a_{k3} + ... + a_{kP}\alpha_k^{P-3}) = -2kR_{cr}\beta_k + a_{k2}(\beta_k + \frac{T}{2kR_{cr}})^2 + (\beta_k + \frac{T}{2kR_{cr}})^3 b_{k3}$$
$$= \beta_k[3\frac{T^2b_{k3}}{4k^2R_{cr}^2} + a_{k2}\frac{T}{kR_{cr}} - 2R_{cr} + (a_{k2} + \frac{3Tb_{k3}}{2kR_{cr}})\beta_k + \beta_k^2 b_{k3}], b_{k3} = a_{k3} + ... + a_{kP}\alpha_k^{P-3}; a_{k0} = \frac{T}{k}$$

Имеем приближенное ламинарное решение $\alpha_k = \frac{T}{2kR_{cr}} < 1$, справедливое при малых внешних воздействиях, или решение $\alpha_k = |\beta_k + \frac{T}{2kR_{cr}}| < 1$ квадратного уравнения

$$\alpha_k = \beta_k + \frac{T}{2kR_{cr}} = \frac{-(a_{k2} + \frac{Tb_{k3}}{2kR_{cr}}) + \sqrt{(a_{k2} + \frac{3Tb_{k3}}{2kR_{cr}})^2 + 4(2R_{cr} - 3\frac{T^2b_{k3}}{4k^2R_{cr}^2} - a_{k2}\frac{T}{kR_{cr}})b_{k3}}}{2b_{k3}} = .$$

Решение $\alpha_k = |\frac{-a_{k2} + \sqrt{(a_{k2})^2 + 8R_{cr}b_{k3}}}{2b_{k3}}[1 + O(\frac{T}{2kR_{cr}})]| < 1$ реализуется, удовлетворяющее условию, что корень по модулю меньше единицы. Тогда величина b_{k3} ограничена. Выбор корней решения зависит от энергии системы.

Заряд расположен на расстоянии, равном 1 в состоянии равновесия.

Преобразуем это уравнение относительно внешнего параметра T

$$\frac{d\alpha_k/T}{(k^2+1)dt} = \sum_{p=0}^{P} \frac{a_{kp}}{T^{1-p/P}}\left(\frac{\alpha_k}{T^{1/P}}\right)^p / p!, a_{k0} = \frac{T}{k}. \quad (3)$$

Находим координаты положения равновесия этого нелинейного уравнения. Если они действительные, то получаем ламинарное действительное нелинейное решение, которое надо исследовать на устойчивость. Если они комплексные, то надо считать вклад мнимой части в действительное решение

$$\frac{\alpha_k}{T^{1/P}} = \beta_{kl} \pm i\sqrt{\gamma_{kl}} = \beta_{kl} + \sqrt[4]{\gamma_{kl}\delta^2}.$$

Извлечение квадратного корня из мнимой части и умножение на множитель δ^2 следует из решения гидродинамической задачи см. [1]. Определим этот множитель. Отметим, что мнимая часть решения определяется степенью шероховатости, как в случае гидродинамического течения, так и в остальных нелинейных задачах. Критическое число Рейнольдса соответствует началу турбулентного потока и началу мнимой части решения. Значит имеем $x_{cr} = \min_k \beta_{kl} T^{1/P} \to \min_k \frac{P}{e}\left(-\frac{a_{k1}}{a_{kP}}\right)^{\frac{1}{P-1}}; \frac{a_{k1}}{a_{kP}} < 0$, причем эта величина действительная пропорциональная степени полинома при условии $\frac{a_{k1}}{a_{kP}} < 0$. Отметим, что мнимая часть решения пропорциональна внешнему воздействию. Мнимая часть решения x пропорциональна росту внешнего воздействия $a_{k0} = T/k$, причем и остальные члены полинома в разложении (3) при росте внешнего воздействия определяют мнимую часть решения.

Но на самом деле критическое число Рейнольдса определяется обратной величиной среднего тангенса наклона молекулярных шероховатостей. Оно возникает в уравнении при вычислении частных производных и их усреднении с помощью ряда, описывающего решение уравнений в частных производных. Коэффициенты этого ряда описываются системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений типа (1). В системе (1) возникает значение критического числа среднего тангенса наклона молекулярных шероховатостей, который в случае гидродинамики определяет критическое число Рейнольдса, в виде коэффициента. Далее из начала комплексного решения системы (1) определяется критическое значение параметра x_{cr}.

Но графики Никурадзе, описывающие коэффициент сопротивления трубопровода с круглым сечением получены при постоянном отношении диаметра трубопровода d к средней высоте шероховатости k. Для получения совпадения с этими экспериментальными графиками, выведены формулы. Автор надеется, что эти формулы являются общими для решения нелинейных уравнений в частных производных для учета влияния мнимой части решения. Эта степень шероховатости зависит от числа Рейнольдса потока и от критического числа Рейнольдса. Имеем уравнение

$$\begin{gathered}\delta = x^{3/8} = (\frac{1.6}{R_{cr}+0.8})^{3/8}\alpha + \frac{1-\alpha}{x^{3/8}}(\frac{1.6}{R_{cr}k/d+0.8})^{3/4} \\ \alpha = \exp[-4|\sqrt{R}-\sqrt{R_{cr}}|\sqrt{k/(dR_{cr})}] \\ x^{3/4} - (\frac{1.6}{R_{cr}+0.8})^{3/8} x^{3/8}\alpha - (1-\alpha)(\frac{1.6}{R_{cr}k/d+0.8})^{3/4} = 0\end{gathered}.$$

Из этого квадратного уравнения определим x

$$x^{3/8} = (\frac{1.6}{R_{cr}+0.8})^{3/8}\alpha/2 + \sqrt{(\frac{1.6}{R_{cr}+0.8})^{3/4}\alpha^2/4 + (1-\alpha)(\frac{1.6}{R_{cr}k/d+0.8})^{3/4}}$$

Откуда имеем значение коэффициента δ

$$\delta = (\frac{1.6}{R_{cr}+0.8})^{3/8}\alpha/2 + \sqrt{(\frac{1.6}{R_{cr}+0.8})^{3/4}\alpha^2/4 + (1-\alpha)(\frac{1.6}{R_{cr}k/d+0.8})^{3/4}} =$$

$$= \begin{cases} (\frac{1.6}{R_{cr}k/d+0.8})^{3/8}, \alpha = 0, R >> R_{cr} \\ (\frac{1.6}{R_{cr}+0.8})^{3/8}, \alpha = 1, R = R_{cr} \end{cases}$$

Для получения влияния внешнего воздействия на коэффициент $\alpha = \exp[-4|\sqrt{R}-\sqrt{R_{cr}}|\sqrt{k/(dR_{cr})}]$, надо зависимость от числа Рейнольдса заменить зависимость от внешнего воздействия и от критического внешнего воздействия, при котором начинается комплексный режим.

Литература

1. Якубовский Е.Г. Исследование решения уравнения Навье – Стокса II. «Энциклопедический фонд России», 2016, 61 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1509211918.pdf