По поводу корней полинома и решение задачи гидродинамики

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Проблема нахождения корней полинома имеет длительную историю. Не существует решения для полинома степени выше 4. Взглянем на эту проблему с другой стороны, с помощью приближенных методов решения уравнений. Кроме установления соответствия между нахождением корней полинома и нахождением собственных значений матрицы, получено среднее решение и вычислен коэффициент сопротивления потока. Зная коэффициент сопротивления можно определить и скорость тела по перепаду давления. Коэффициент сопротивления определяется комплексный для турбулентного течения, значит определится комплексная скорость потока, которую надо пересчитывать в действительную скорость см. [1]. Получаются формулы, описывающие распределение скорости потока для двигающегося с постоянной скоростью тела. Т.е. распределение скорости потока в любой фиксированный момент времени.

Существуют эффективные методы разбиения полинома произвольной степени на произведение полиномов 2 степени. При этом находятся все корни полинома произвольной степени. Свяжем эту проблему с нахождением собственных значений матриц.

Рассмотрим квадратную матрицу и попытаемся найти ее собственные значения и собственные векторы. Для этого необходимо решить два уравнения

$$\begin{gathered}(a_{lk}-\lambda_\alpha \delta_{lk})g_{k\alpha}=0 \\ |a_{lk}-\lambda_\alpha \delta_{lk}|=0\end{gathered}. \qquad (1)$$

Из первого уравнения следует формула для собственного значения

$$\lambda_\alpha = g^{-1}_{\alpha l} a_{lk} g_{k\alpha}.$$

Это приводит к численной схеме по нахождению собственного значения, начальное значение которой $\lambda_\alpha = a_{\alpha\alpha}$, вычисления собственных векторов из 1 уравнения (1) и к нахождению всех корней уравнения из решения линейной задачи.

Кроме того, это приводит к определению формулы решения полинома произвольной степени, ведь диагональная матрица сводится к полиному степени, равному размеру матрицы

$$| a_{lk} |=| (x+\lambda_l)\delta_{lk} |= x^n + (\lambda_1 + ... + \lambda_n) x^{n-1} + ... + \lambda_1 ... \lambda_n = 0$$

Аналогично для произвольной матрицы.

$$| a_{lk} + \lambda_\alpha \delta_{lk} |= \lambda_\alpha^n + (a_{11} + ... + a_{nn}) \lambda_\alpha^{n-1} + ... + | a_{lk} |= \lambda_\alpha^n + b_1 \lambda_\alpha^{n-1} + ... + b_n = 0. \qquad (2)$$

Задаем произвольным образом коэффициенты, кроме первой строки и столбца, которые зададим как эрмитовые, получаем систему линейных уравнений относительно элементов строки и столбца, определяя которые, сведем задачу к нахождения собственных значений матрицы. Из значения коэффициента при b_1 определится однозначно диагональный элемент строки или столбца. Из следующего коэффициента b_2 определится второй элемент строки и столбца. Т.е. система линейных уравнений сведется к последовательной системе отдельных уравнений, из которых элементы первой строки или столбца определятся. При этом нахождение собственных значений полученной матрицы будет соответствовать нахождению корней полинома. Причем построенная матрица будет не вырожденной, так как ее определитель не равен нулю.

Возможны кратные корни этого уравнения, которые определятся при вычислении собственных значений. Если матрицу определить, как эрмитовую, то корни полинома должны быть действительные, так как собственные значения эрмитовой матрицы действительны. Эрмитовая матрица получается при решении задач квантовой механики, если рассматривать собственные значения как действительные. Если определить матрицу как не эрмитовую, но комплексную, то возможно определение комплексных корней уравнения по приближенной схеме решения.

Возможна система уравнений

$$\frac{d^n x_l}{dt^n}+b_{1lk}\frac{d^{n-1}x_k}{dt^{n-1}}+...b_{Nlk}x_k=0. \qquad (3)$$

Решение ищем в виде $x_l=g_{l\alpha}\exp[\lambda_\alpha(t-t_0)]c_\alpha.l=1,...,N;\alpha=1,...,N^2$. Уравнение по вычислению собственных векторов и чисел имеет вид

$$\begin{gathered}(\lambda_\alpha^n\delta_{lk}+b_{1lk}\lambda_\alpha^{n-1}+...+b_{Nlk})g_{k\alpha}=0\\ |\lambda_\alpha^n\delta_{lk}+b_{1lk}\lambda_\alpha^{n-1}+...+b_{Nlk}|=0\end{gathered}.$$

Если для системы уравнений первого порядка матрица приводится к растяжению и поворотам, то для системы уравнений (3) происходит нелинейное преобразование матрицы b_{Nlk}.

Константы c_α определятся из уравнений

$$\frac{d^k x_l}{dt^k}|_{t=t_p}=g_{l\alpha}\lambda_\alpha^k c_\alpha, l=1,...,N;k=0,...,N-1;\alpha=1,...,N^2.$$

Если же коэффициенты $b_{slk}=b_l\delta_{lk}$, где $b_l,l=1,...,N$ из формулы (2), то решение имеет N одинаковых собственных чисел и имеет вид

$$z_{\alpha 1}=e_{1\alpha}\exp[\lambda_\alpha(t-t_0)]c_{\alpha 1},...,z_{\alpha N}=\exp[\lambda_\alpha(t-t_0)][e_{N\alpha}+\frac{t-t_0}{1!}e_{(N-1)\alpha}+...+\frac{(t-t_0)^N}{N!}e_{1\alpha}]c_{\alpha N}$$

В случае системы полиномов четной степени относительно $\Lambda_\alpha,\alpha=1,...,N$ его надо аппроксимировать матричным уравнением

$$\begin{gathered}(a_{lk}+\Lambda_\alpha\delta_{lk})g_{k\alpha}=0\\ |a_{lk}+\Lambda_\alpha\delta_{lk}|=0;-\Lambda_\alpha=\lambda_\alpha^2-2R_{cr}\lambda_\alpha\end{gathered}$$

Матрицу надо задавать эрмитовой, определяя первый столбец и эрмитово сопряженную строку и получается действительное собственное значение. Тогда имеем собственное значение из рекуррентной схемы

$$-\Lambda_\alpha T = T g_{\alpha l}^{-1} a_{lk} g_{k\alpha} = \lambda_\alpha^2 - 2R_{cr}\lambda_\alpha .$$

Откуда имеем квадратное уравнение по определению собственного числа с действительной частью, равной критическому числу Рейнольдса $\lambda_\alpha = R_{cr} \pm \sqrt{R_{cr}^2 - \Lambda_\alpha T}$. При условии $\Lambda_\alpha T = R_{c\kappa}^2$ получается собственное число, умноженное на внешнее давление, равно критическому числу Рейнольдса и начинается комплексное решение, т.е. турбулентный режим. Причем коэффициенты матрицы выбираем с точностью до множителя, при этом Λ_α определяется с точностью до множителя.

Но как определить коэффициенты a_{lk}. Для этого надо получить из уравнения Навье-Стокса коэффициенты в виде полинома. Скорость среды на поверхности тела равна скорости тела. Поэтому надо методом наименьших квадратов решить уравнение

$$\min_{a_k} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\sum_{k=0}^N a_k x^k - V_x e_x)^2 \sin\theta d\varphi d\theta, e_x = \sin\theta\sin\varphi, U_1 = r(\theta,\varphi)\sin\theta\sin\varphi$$
$$\min_{b_k} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\sum_{k=0}^N b_k y^k - V_y e_y)^2 \sin\theta d\varphi d\theta, e_y = \sin\theta\cos\varphi, U_2 = r(\theta,\varphi)\sin\theta\cos\varphi$$
$$\min_{c_k} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [\sum_{k=0}^N c_k z^k - mgz^2 e_z/2]^2 \sin\theta d\varphi d\theta, e_z = \cos\theta, U_{3k} = r(\theta,\varphi)\cos\theta$$
$$x^k = \frac{U_{1k} a^{k+1}}{R_k^{k+2}} = \frac{[X_k - X_{k0} - V_x(t-t_0)]a^{k+1}}{R_k^{k+2}}, k = 1,\ldots,N; a^2 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2(\theta,\varphi)\sin\theta d\varphi d\theta / 4\pi$$
$$y^k = \frac{U_{2k} a^{k+1}}{R_k^{k+2}} = \frac{[Y_k - Y_{k0} - V_y(t-t_0)]a^{k+1}}{R_k^{k+2}}, k = 1,\ldots,N$$
$$z^k = \frac{U_{3k} a^{k+1}}{R_k^{k+2}} = \frac{[Z_k - Z_{k0} - V_z(t-t_0)]a^{k+1}}{R_k^{k+2}}; k = 1,\ldots,N; U_{1k}^2 + U_{2k}^2 + U_{3k}^2 = R_k^2 \ge R^2(\theta,\varphi)$$

Имеется формула связи между декартовыми координатами x, y, z которые связаны со множеством координат, зависящими от индекса k.

Определим формулу связи с декартовыми координатами

$$(x^{2k}+y^{2k}+z^{2k})^{\frac{1}{2k+2}}=\frac{a}{R_k}$$

$$\frac{x^k}{(x^{2k}+y^{2k}+z^{2k})^{1/2}}=\frac{X_k-X_{k0}-V_x(t-t_0)}{R_k}$$

Величина x соответствует распространяющейся волне. Форма тела должна быть такой, чтобы обеспечить подъемную силу, откуда определятся коэффициенты c_k. Из уравнения Навье-Стокса обеспечим равенство

$$V_x\frac{dV_x}{dx}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\frac{d^2V_x}{dx^2};P=P_0+\rho\nu(\frac{dV_x}{dx}-\frac{dV_{x0;}}{dx})-\rho(V_x^2-V_{x0}^2)/2;$$

$$V_x=\sum_{k=1}^{N}a_kx^k;$$

Умножим уравнение Навье-Стокса на величину $a^3/R_{cr}\nu^2$, получим $R_x\frac{dR_x}{dy}=-\frac{\partial T}{\partial y}+R_{cr}\frac{d^2R_x}{dy^2},y=xR_{cr}/a,R_x=V_xa/\nu;T=pa^2/\rho\nu^2$. Будем решать уравнение Навье-Стокса в безразмерных переменных.

Значение величин $\frac{dV_{x0;}}{dx}=0,V_{x0}^2=0$ берется равным значению на бесконечности, т.е. нулевому значению. Имеем равенство нулю полинома при равенстве $T=T_0+R_{cr}\frac{dR_x}{dy}$

$$R_x=\sum_{k=1}^{N}a_k\Lambda_\alpha^k=0. \quad (5)$$

Из этого уравнения определим среднюю координату потока, и значит среднюю скорость

$$\begin{gathered}[A_{lk}-(x_\alpha^2-2R_{cr}x_\alpha)\delta_{lk}]g_{k\alpha}=0;\\ |A_{lk}-(x_\alpha^2-2R_{cr}x_\alpha)\delta_{lk}|=|A_{lk}+\Lambda_\alpha\delta_{lk}|0\end{gathered} \quad (6)$$

Где A_{lk} определяется из уравнения (5), считая неизвестными эрмитово сопряженные элементы первого столбца и строки матрицы A_{lk}, а саму матрицу определим как эрмитовую, чтобы собственные значения были действительные. Эта матрица как и собственное число Λ_α определится с точностью до множителя, соответствующего внешнему давлению. Тогда определится решение A_{lk}, из условия, что определитель второго уравнения (6) совпадет с полиномом (5) .

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \Lambda_\alpha^k = \Lambda_\alpha^n - (A_{11} + ...A_{NN})\Lambda_\alpha^{n-1} + ... + |A_{lk}| = 0$$

Тогда имеем безразмерное решение $x_\alpha / \sqrt{T} = R_{cr} / \sqrt{T} - \sqrt{R_{ск}^2 / T - \Lambda_\alpha}$ определяющее среднее значение числа Рейнольдса потока в виде координаты волны, где безразмерная координата Λ_α определено с точностью до множителя и коэффициент пропорциональности соответствует внешнему давлению, которое должно быть положительное. Эта величина не зависит от выбора значений матрицы A_{lk} и определяется корнем полинома. Величина Λ_α соответствует разным режимам течения и определяется по ламинарному течению, формула которого известна и однозначна. По устойчивому ламинарному режиму выбирается единственный устойчивый с минимумом энергии режим течения. Отрицательное значение этой величины не имеет физического смысла, так ламинарное решение должно быть положительное $x_\alpha / \sqrt{T} = \dfrac{\Lambda_\alpha \sqrt{T}}{2R_{cr}}$. Комплексное значение числа Рейнольдса определяется по формуле $x_\alpha / \sqrt{T} = R_{cr} / \sqrt{T} - i\sqrt[4]{\Lambda_\alpha - R_{ск}^2 / T}$ см. [1].

Переход между разными значениями энергии осуществляется с помощью звуковых волн. Энергия звуковой волны плюс кинетическая энергия жидкости равна

$$\begin{gathered} E_n = -m\nu\omega(n_0 + 1/2) + \int \rho V_{n_0}^2 d^3x / 2 \\ \min_n E_n = E_{n_0} \end{gathered}.$$

При ламинарном течении жидкости кинетическая энергия положительная, причем звук имеет квантовое число, т.е. $n = n_0$. При этом квантовом числе реализуется минимум энергии. Если мы подействуем звуковой волной с частотой Ω на поток, то величина звуковой энергии увеличится на величину $m\nu\Omega(n+1/2)$, а кинетическая энергия останется неизменной. Если мы подействуем на поток с частотой $m\nu\omega$, то произойдет квантовый переход, и кинетическая энергия жидкости изменится.

$$E_n + m\nu\omega = -m\nu\omega(n_0 - 1/2) + \int \rho V_{n_0-1}^2 d^3x/2 + Q$$
$$Q = \int \rho(V_{n_0}^2 - V_{n_0-1}^2) d^3x/2$$
.

Причем максимальная звуковая энергия равна

$$E_n + m\nu\omega n_0 = -m\nu\omega/2 + \int \rho V_0^2 d^3x/2 + Q$$

Причем часть энергии превратится в тепловую энергию $Q = \int \rho(V_0^2 - V_{n_0}^2) d^3x/2$ и среда будет охлаждаться. Обратный переход к минимуму энергии будет сопровождаться выделением тепловой энергии.

В случае турбулентной среды, как только мнимая часть числа Рейнольдса потока сделается больше действительной части, оба члена будут отрицательные, звуковая энергия и кинетическая энергия. Минимума энергии не будет, скорость сделается мнимой, звуковая и кинетическая энергия будут скачками уменьшаться, грея среду. Имеется минимум энергии при изменении индекса n. Находим значение индекса при экстремуме $m\nu\omega = \int \rho \frac{d[(\mathrm{Re}\,V_n)^2 - (\mathrm{Im}\,V_n)^2]}{dn} d^3x$ и проверяем максимум или минимум $\int \rho \frac{d^2[(\mathrm{Re}\,V_n)^2 - (\mathrm{Im}\,V_n)^2]}{dn^2} d^3x > 0$. Но турбулентный режим не устойчивый, при флуктуациях локальный минимум система может покинуть и найти другой локальный минимум при меньшей энергии. Это все происходит при постоянном перепаде давления.

Подставляя полученное среднее значение числа Рейнольдса в уравнение для скорости, получим среднюю скорость потока и определим коэффициент сопротивления $\lambda = \frac{P - P_0}{\rho V^2 / 2} = \frac{[P(x_\alpha / \sqrt{T}) - P_0]a^2}{\rho v^2 (\sum_{k=1}^{N} a_k x_\alpha^k / T^{k/2})^2 / 2}$. Тогда зная перепад давления, можно определить скорость потока. Коэффициент сопротивления в общем случае комплексный, где мнимая часть означает колебание, с амплитудой, равной мнимой части. Пересчет комплексной скорости, или комплексного числа Рейнольдса потока в действительное значение см. [1].

Аналогично строится решение и для остальных координат.

При соответствующей скорости тела справедливы формулы для распределения скорости и давления в зависимости от координат.

Литература

1. Якубовский Е.Г. Исследование решения уравнения Навье – Стокса II. «Энциклопедический фонд России», 2016, 61 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1509211918.pdf