Новый базис N мерного комплексного пространства описывающий дополнительные члены стандартной модели

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Определен базис в N мерном действительном пространстве, состоящий из 1 с остальными нулями. В комплексном пространстве базис должен быть комплексный. Определим его. В результате получим скалярное и векторное произведение, которое обобщает стандартную модель новыми членами. Получается обобщение стандартной модели вплоть до членов третьего порядка и возможно 4 порядка в комплексном пространстве.

Базис в N мерном комплексном пространстве определяется как корень степени из размерности пространства из экспоненты с мнимым показателем, с переменным аргументом, с проекцией соответствующей аргументу $\varphi = 2\pi$ $e_k = \exp(\frac{ik\varphi}{N}); k = 0,...,(N-1); \varphi \in [0, 2\pi N]$. Скалярное произведение векторов определим по формуле

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) = \int\limits_0^{2\pi N} (x_k e_k, y_n^* e_n^*) d\varphi / 2\pi N = x_k y_n^* \int\limits_0^{2\pi N} \exp[\frac{i(k-n)\varphi}{N}] d\varphi / 2\pi N = x_k y_n^* \delta_{kn} = x_n y_n^* .$$

Это скалярное произведение удовлетворяет всем свойствам скалярного произведение. Если произведение одинаковых векторов равно нулю, значит вектор нулевой. Это скалярное уравнение определяет оператор Лапласа, где время величина мнимая

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_m [(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^m} + \frac{e}{c} A_m)\mathbf{e}_m, (i\hbar \frac{\partial}{\partial x^{m*}} + \frac{e}{c} A_m^*)\mathbf{e}_m^*] =$$
$$= \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^{m*}} - ih\frac{e}{c}(\frac{\partial A_m^*}{\partial x^m} - A_m \frac{\partial}{\partial x^{m*}}) + \frac{e^2}{c^2} A_m A_m^*$$

Можно определить и векторное произведение векторов

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2^*] = \exp[i\frac{(n_1-n_2)\varphi}{N}] = \mathbf{e}_{n_1-n_2}$$
$$[\mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_1] = -\exp[i\frac{(n_1-n_2)\varphi}{N}] = -\mathbf{e}_{n_1-n_2}.$$

Векторное произведение двух векторов

$$[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \sum_{n,k} [x_m\mathbf{e}_m, (y_k\mathbf{e}_k)^*] = \sum_{n,k} (x_m y_k^* - y_k^* x_m)\mathbf{e}_{m-k}.$$

При замене индексов получим комплексно-сопряженное значение выражения. При действительных коэффициентах получаем действительное векторное произведение. В четырехмерном пространстве вектор импульса равен

$$\mathbf{x} = (-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{e}{c}A_k)\mathbf{e}_k.$$

Векторное произведение двух векторов равно

$$[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \sum_{m,k} [(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^m} + \frac{e}{c}A_m)\mathbf{e}_m, (i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{k*}} + \frac{e}{c}A_k^*)\mathbf{e}_k^*] =$$
$$= \sum_{m,k} [\hbar^2(\frac{\partial^2}{\partial x^m\partial x^{k*}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{m*}\partial x^k}) - i\hbar\frac{e}{c}(\frac{\partial A_k^*}{\partial x^m} - \frac{\partial A_m}{\partial x^{k*}} - A_m\frac{\partial}{\partial x^{k*}} + A_k^*\frac{\partial}{\partial x^m}) + \frac{e^2}{c^2}(A_m A_k^* - A_k^* A_m)]\mathbf{e}_{m-k} =$$
$$= \sum_k [\hbar^2(\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^{k+p*}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{k*}\partial x^{k+p}}) - i\hbar\frac{e}{c}(\frac{\partial A_{k+p}^*}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^{k+p*}} - A_k\frac{\partial}{\partial x^{k+p*}} + A_{k+p}^*\frac{\partial}{\partial x^k}) +$$
$$+ \frac{e^2}{c^2}(A_k A_{k+p}^* - A_{k+p}^* A_k)]\mathbf{e}_p,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^{k+p}\partial x^{k*}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{(k+p)*}\partial x^k} = \frac{i}{2}(\frac{\partial^2}{\partial \operatorname{Re} x^{k+p}\operatorname{Im} x^k} - \frac{\partial^2}{\partial \operatorname{Re} x^k \operatorname{Im} x^{k+p}})$$

В результате получится 4 выражения для векторного произведения, по числу базисный векторов. Для индексов справедливо $3=0,4=1;5=2,6=3$.

Можно определить двумерный тензор с его базисом

$$\mathbf{G}_{mk} = [\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_k] = [(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^m} + \frac{e}{c}A_m)\mathbf{e}_m, (i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{k*}} + \frac{e}{c}A_k^*)\mathbf{e}_k^*] =$$

$$= [\hbar^2(\frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^{k*}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{m*}\partial x^k}) - i\hbar\frac{e}{c}(\frac{\partial A_k^*}{\partial x^m} - \frac{\partial A_m}{\partial x^{k*}} - A_m\frac{\partial}{\partial x^{k*}} + A_k^*\frac{\partial}{\partial x^m}) + \frac{e^2}{c^2}(A_m A_k^* - A_k^* A_m)]\mathbf{e}_{m-k} =$$

$$= [\hbar^2(\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^{k+p*}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{k*}\partial x^{k+p}}) - i\hbar\frac{e}{c}(\frac{\partial A_{k+p}^*}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^{k+p*}} - A_k\frac{\partial}{\partial x^{k+p*}} + A_{k+p}^*\frac{\partial}{\partial x^k}) +$$

$$+ \frac{e^2}{c^2}(A_k A_{k+p}^* - A_{k+p}^* A_k)]\mathbf{e}_p,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{k+p}\partial x^{k*}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{(k+p)*}\partial x^k} = \frac{i}{2}(\frac{\partial^2}{\partial \operatorname{Re} x^{k+p}\operatorname{Im} x^k} - \frac{\partial^2}{\partial \operatorname{Re} x^k \operatorname{Im} x^{k+p}})$$

В стандартной модели используется только два члена из этого разложения в действительной плоскости без указания базиса, к которому они относятся

$$G_{mk} = \frac{\partial A_k}{\partial x^m} - \frac{\partial A_m}{\partial x^k} + i\frac{e}{\hbar c}(A_m A_k - A_k A_m)$$

Выведем классическое уравнение стандартной модели с помощью векторного произведения в новом базисе. Оно имеет вид

$$\frac{\partial F_a^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} - gC_{abc}A_{b\mu}F_c^{\mu\nu} = J_a^\nu.$$

См. [1]. Кроме того, имеются уравнение Клейна-Гордона для бозонов и уравнение Дирака для фермионов с калибровочными производными, т.е. при учете импульса электромагнитного поля. Имеется проблема к калибровочными производными. Согласно моим исследованиям нет произвола при использовании потенциалов электромагнитного поля. «Произвольный» калибровочный потенциал определяется по массам элементарных частиц, см. [2]. Левая часть этого уравнения равна смешанному произведению оператора импульса

$$((\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-igA_{b\mu})e_{b}^{\mu},[(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}+igA_{c}^{\mu})e_{c\mu},(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}-igA_{c}^{\nu})e_{c\nu}])=$$

$$=((\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-igA_{b\mu})(L_bL_c-L_cL_b),[(\frac{\partial^2}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}-\frac{\partial^2}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}}-ig(\frac{\partial A_c^{\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial A_c^{\mu}}{\partial x^{\nu}})-g^2(A_c^{\mu}A_c^{\nu}-A_c^{\nu}A_c^{\mu})]e_{c\nu})=$$

$$=-((\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}igF_c^{\mu\nu}-igA_{b\mu}(L_bL_c-L_cL_b),igF_c^{\mu\nu})e_{c\nu}=g[\frac{\partial F_c^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}}+ig(A_{b\mu}F_c^{\mu\nu}-F_c^{\mu\nu}A_{b\mu})]e_{c\nu}=$$

$$=g[\frac{\partial F_a^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}}e_{a\nu}-gC_{abc}A_{b\mu}F_c^{\mu\nu}e_{c\nu}];L_bL_c-L_cL_b=iC_{bc}^{a}L_a$$

.

Получено с точностью до множителя выражение для уравнения стандартной модели. Попробуем ввести дополнительный член $A^{\delta}=L_aA_a^{\delta}$, где L_a генератор пространства.

$$((\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-igA_{b\mu})e_{b}^{\mu},[(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}+igA_{c}^{\mu})e_{c\mu},(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}-igA_{c}^{\nu})e_{c},\sum_{\delta=0}^{3}A^{\delta}e_{-\delta}])=$$

$$=-((\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-igA_{b\mu})(L_bL_c-L_cL_b),igF_c^{\mu\nu},\sum_{\delta=0}^{3}A^{\delta})e_{-\delta}e_{c\nu}==$$

$$=-\sum_{\delta=0}^{3}((\frac{\partial A^{\delta}}{\partial x^{\mu}}e_{a(\nu-\delta)}-gC_{abc}A_{b\mu}F_c^{\mu\nu}A^{\delta}e_{c(\nu-\delta)}+g\frac{\partial F_a^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}}A^{\delta}e_{a(\nu-\delta)}=$$

$$=\sum_{\delta=0}^{3}(-(\frac{\partial A^{\delta}}{\partial x^{\mu}}e_{ap}+g\frac{\partial F_a^{\mu(p+\delta)}}{\partial x^{\mu}}A^{\delta}e_{ap}-gC_{abc}A_{b\mu}F_c^{\mu(p+\delta)}A^{\delta}e_{cp},0\le p+\delta\le 3;p=0,...,3$$

Векторное произведение трех векторов равно

$$[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}]=\sum_{n,k,m}[x_n\mathbf{e}_n,(y_k\mathbf{e}_k)^*,z_m\mathbf{e}_m]=$$
$$=\sum_{n,k,m}[(x_ny_k^*-y_n^*x_k)z_m+(y_n^*z_k-z_ny_k^*)x_m+(z_nx_k-x_nz_k)y_m^*]\mathbf{e}_{n-k+m}.$$

В случае четырехмерного пространства перестановка пары индексов с разным знаком приведет к новому значению векторного произведения. Перестановка индексов одинакового знака приведет к нулю части выражения, содержащего эти индексы. Останется одномерный вектор измененного знака. В случае векторного произведения четырех векторов, имеется по два индекса одинакового знака. При этом индексы разного знака определят векторное произведение.

Векторное произведение двух векторов содержит члены, входящие в стандартную модель, плюс дополнительные члены.

В стандартной модели имеются квадратичные члена от тензора второго порядка. Они получаются при использовании векторного произведения двух членов, оператора дифференцирования и потенциала поля. Но имеется еще тензор, состоящий из векторного произведения трех членов. Он определяет оператор дифференцирования с производными третьего порядка. Кроме того, имеются кубические члены по полю. Никаких калибровочных производных уравнение не содержит, так как нет никакого произвола в определяемых уравнениях. Разве что, в операторе импульса содержится член, содержащий импульс поля.

В случае произвольного количества векторов, меньшего чем размерность пространства, имеем (используется антисимметричный тензор $e_{n_1 \dots n_k}$, равный 1 если перестановка индексов четная, -1 если перестановка индексов нечетная и равен нулю если имеются совпадающие индексы).

$$[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k] = \sum_{n_1, \dots, n_k} [x_{n_1} \mathbf{e}_{n_1}, \dots, (x_{n_k} \mathbf{e}_{n_k})^*] =$$
$$= \sum_{n_1, \dots, n_k} e_{n_1 \dots n_k} x_{n_1} \dots x_{n_k}^* \mathbf{e}_{-n_1 - \dots + n_k}$$

Решение уравнения третьей степени в этом базисе записывается в виде (ветвь кубического корня в данной формуле главная)

$$x_1 = e_0(\sqrt[3]{R_1} + \sqrt[3]{R_2}); x_2 = e_1\sqrt[3]{R_1} + e_2\sqrt[3]{R_2}); x_3 = e_2\sqrt[3]{R_1} + e_1\sqrt[3]{R_2});$$
$$e_k = \exp(ik\varphi / 3), k = -1{,}0{,}1; \varphi = 2\pi$$

Решение квадратного уравнения (рассматривается главное значение квадратного корня)

$$\begin{aligned} x_1 &= -e_0 p/2 + e_0\sqrt{p^2/4 - q} \\ x_2 &= -e_0 p/2 + e_1\sqrt{p^2/4 - q} \\ e_k &= \exp(ik\pi), k = 0,1; \varphi = 2\pi \end{aligned} .$$

Уравнение $x^N = a$ имеет решение в этом базисе $x_k = e_k \sqrt[N]{a}$, где используется главное значение корня.

Литература

1. К.Хуанг Кварки, лептоны и калибровочные поля. изд. «Мир», 1985г. 382 стр.
2. Якубовский Е.Г. Точность аппроксимации калибровочных производных в стандартной модели. «Энциклопедический фонд России», 2017, 23 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1503396076.pdf