Связь гидродинамических течений с звуковыми волнами

Якубовский Е.Г.

Гидродинамические течения сопровождаются звуковыми волнами. Вычислим фазовую скорость, частоту, энергию и амплитуду этих звуковых волн.

В волноводах имеется формула, описывающая распространяющуюся моду

$$\beta_{nm}^2 = (\frac{\pi n}{a})^2 + (\frac{\pi m}{b})^2 - (\frac{2\pi}{\lambda})^2$$

Причем волна затухает по закону $\exp(-\beta_{nm} z)$. Чтобы не было затухания, постоянную распространения надо сделать мнимой, т.е. должно выполняться условие - длина волны излучения должна быть малая.

$$(\frac{2\pi}{\lambda})^2 > (\frac{\pi n}{a})^2 + (\frac{\pi m}{b})^2$$

Совершенно аналогично определяется длина звуковых волн в гидродинамическом течении. Для этого необходимо научиться вычислять критическое число Рейнольдса у гидродинамических течений.

Если микро-шероховатости $<|\tan\varphi|>$ распределены по всей поверхности трубопровода, они находятся и на макро-шероховатостях и определяют критическое число Рейнольдса и коэффициент сопротивления при числе Рейнольдса, равном 2300. Микро-шероховатости имеют молекулярную природу и определяются средним размером атома, равным среднему геометрическому между размером ядра r_A, и размером орбиты Бора $\sigma = \sqrt{r_A a_0}$, при расстоянии между атомами $a = 3.043A$, равному некоторой величине, определяемой свойствами границы трубопровода, железом, титаном и углеродом. Расстояние между атомами железа $a_{Fe} = 2.87A$, между атомами титана $a_{Ti} = 3.46A$, между атомами углерода $a_C = 3.567A$ см. [7]. При этом абсолютная величина тангенса наклона высоты микро-шероховатости поверхности металла в трубопроводе определяется по формуле $h(z) = <|\tan\varphi|> = \sum_{n=-N}^{N} \exp[-(z-na)^2/2\sigma^2]/(2N\sqrt{2\pi})$. Средний тангенс наклона равен

$$\frac{1}{R_{cr}} = \int_{-\infty}^{\infty} h(z)\frac{dz}{2Na} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(z-na)^2/2\sigma^2]dz}{2\sqrt{2\pi}a} = \frac{\sigma}{2a} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 6.086}\sqrt{\frac{r_A}{a_0}} = \frac{1}{2\cdot 6.086}\sqrt{\frac{1.4\cdot 10^{-13}}{0.5\cdot 10^{-8}}} = \frac{1}{2300}$$

Величина критического числа Рейнольдса относительно диаметра равна $R_{cr} = 2300$.

Но критическое число Рейнольдса может по аналогии определено как величина

$$R_{crnm}^2 = (\frac{2na}{\sigma})^2 + (\frac{2mb}{\sigma})^2 - (\frac{2\pi\lambda}{\sigma})^2; n,m > 1$$

Причем в гидродинамических течения критическое число Рейнольдса, это константа. Значит длина волны в гидродинамических течениях определяется по формуле

$$R_{cr}^2 = 2300^2 = (\frac{2na}{\sigma})^2 + (\frac{2mb}{\sigma})^2 - (\frac{2\pi\lambda_{nm}}{\sigma})^2.$$

Число Рейнольдса жидкости в потоке определяется формулой $R = R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - \alpha T}$, где T перепад безразмерного давления в потоке. При условии $R_{cr}^2 = \alpha T$ значение перепада давления - это граница между ламинарным действительным течением, и турбулентным комплексным решением. Эта граница соответствует равенству критического числа Рейнольдса числу Рейнольдса потока.

Откуда имеем формулу для длины волны

$$\lambda_{nm} = \frac{\sigma R_{cr}}{2\pi}\sqrt{(n^2+m^2)/2-1}.$$

Причем возбуждаются эти волны в поверхностном слое оболочки и распространяются по объему текущей жидкости в трубопроводе. Эти молекулярные волны определяются колебаниями свободных электронов под действием колебаний связанных электронов и объясняются наличием электронного газа. Для связи фазовой скорости и длины волны существует формула, которая для макромира имеет вид $\frac{\hbar}{mc_F} = \frac{m\nu}{mc_F} = \frac{\nu}{c_F}$

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{mc_F}\alpha + (1-\alpha)\frac{c}{\omega} = \frac{\nu}{c_F}\alpha + (1-\alpha)\frac{c}{\omega}; \alpha = \frac{\exp(-\frac{c^2}{\nu\omega})}{\exp(-\frac{c^2}{\nu\omega}) + \exp(-\frac{\nu\omega}{c^2})}$$

Где величина $c^2 = \frac{dp}{d\rho}$. Критическая частота определяется значением $\omega_{cr} = \frac{c^2}{\nu} = 2.25 \cdot 10^{12}\,гц$. При условии $\omega > \omega_{cr}$ наблюдается молекулярная звуковая волна. При условии $\omega < \omega_{cr}$ имеется обычная волна с постоянной скоростью распространений. Откуда определяем фазовую скорость и частоту звуковых волн при условии $\frac{c^2}{\nu\omega} << 1$. Далее все формулы определены при этом условии. Назовем эти волны молекулярными колебаниями гидродинамического потока. Они соответствуют малым молекулярным числам n, m. При больших молекулярных числах n, m образуются обычные звуковые волны. Определим фазовую скорость и частоту молекулярных волн

$$c_{Fnm} = \frac{2\pi\nu}{\lambda_{nm}}; \frac{2\pi\nu}{\lambda_{11}} = 4\pi \cdot 10^6\, cm/s, \omega = \frac{(2\pi)^2\nu}{\lambda_{nm}^2}; \frac{(2\pi)^2\nu}{\lambda_{11}^2} = 16\pi^2 \cdot 10^{14}/s = 1.6 \cdot 10^{16}\,гц$$

Энергия звуковых волн определяется по формуле

$$E = \hbar\omega = \frac{m\nu\varpi}{\hbar\omega}\hbar\omega \to \sqrt{\frac{m\nu\omega}{\hbar\omega}}\hbar\omega.$$

Где из безразмерной величины энергии извлекли корень, так как надо получить направленное изменение энергии.

Получим формулу для энергии одного моля вещества, где m молекулярный вес

$$E_{nm} = \sqrt{m\nu\hbar}\omega_{nm} = \sqrt{m\nu\hbar}\frac{(2\pi)^2\nu}{\lambda_{nm}^2};\sqrt{m\nu\hbar}\frac{(2\pi)^2\nu}{\lambda_{11}^2} = \sqrt{0.1\cdot 10^{-27}}\frac{(2\pi)^2 0.1}{(0.5\cdot 10^{-8})^2} = 150 erg\ .$$

Перепад давления в этой волне определяется по плотности энергии

$$\Delta p_{nm} = E_{nm}\rho / m = \sqrt{m\nu\hbar}\frac{(2\pi)^2\nu\rho}{\lambda_{nm}^2 m};\Delta p_{11} = 150 Dn/cm^2 = 15 g/cm^2\ .$$

Массовая скорость в этой волне равна

$$\Delta V_{nm} = \frac{\Delta p_{nm}}{\rho c_{nm}} = \frac{2\pi\sqrt{\nu\hbar/m}}{\lambda_{nm}} = A\omega = A\frac{(2\pi)^2\nu}{\lambda_{nm}^2};\Delta V_{11} = 1.3\cdot 10^{-5} cm/s\ .$$

Откуда имеем значение амплитуды звуковой волны

$$\lambda_{nm}\sqrt{\hbar/m\nu} = A_{nm}\ .$$

Откуда имеем формулу с ростом амплитуды скорости фронта звуковой волны, ее массовая скорость уменьшается, т.е. фронт звуковой волны для данных колебаний по мере распространения становится все более пологим.

При этом справедливо $\frac{\Delta\rho_{nm}}{\rho} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\nu}}$, т.е. амплитуда величины изменения плотности величина малая и от длины волны не зависит. При этом скорость звуковой определяется по формуле $\Delta V_{nm} = \frac{\sqrt{\nu\hbar/m}}{\lambda_{nm}} = c_{nm}\sqrt{\hbar/m\nu}$ и с уменьшением длины волны растет, т.е. высокие частоты имеют большую скорость.

Но звуковые волны имеют постоянную частоту, меньшую чем частота молекулярных волн, равная $\omega_{11} = \frac{\nu}{\lambda_{11}^2} = 16\pi^2 10^{14} / s$ и для них справедливы другие соотношения.

Используя формулу для массовой скорости в звуковой волне, но обычные волны имеют направленный характер, поэтому надо использовать формулу для энергии одного моля $E_{nm} = m\nu\omega_{nm}$, и для массовой скорости получается формула

$$\Delta V_{nm} = \frac{\Delta p_{nm}}{\rho c} = \frac{2\pi\nu}{\lambda_{nm}} = \frac{2\pi 0.01}{100} = 0.000624 cm/s.$$

Что соответствует частоте звуковой волне в воде 1.5кгц. Эта величина больше скорости молекулярных колебаний, и молекулярные колебания выступают в виде помехи к обычным звуковым волнам.

Получим формулы для массовой скорости и давления в зависимости от частоты звуковых волн

$$\Delta V = \sqrt{\omega\hbar / m}\alpha + (1-\alpha)\frac{\nu\omega}{c} = \frac{\nu\omega}{c}[\sqrt{\hbar/(\omega m)}\frac{c}{\nu}\alpha + 1 - \alpha]$$

$$\Delta p = \rho\omega\nu[\sqrt{\hbar / \nu m}\alpha + 1 - \alpha]; \alpha = \frac{\exp(-\frac{c^2}{\nu\omega})}{\exp(-\frac{c^2}{\nu\omega}) + \exp(-\frac{\nu\omega}{c^2})}.$$

Но остается вопрос, как воздействует на пьезо-датчик высокие частоты, которые имеются в потоке. Массовая скорость на высоких частотах равна $\Delta V = \sqrt{\omega\hbar / m}$, где максимуму частоты $16\pi^2 \cdot 10^{14} / s$ соответствует массовой скорости $\Delta V_{11} = 1.3 \cdot 10^{-5} cm/s$, перепад давления при максимальной частоте равен $\Delta p_{11} = 150 dyn/cm^2$. Скорость звука на этой частоте равна $40\pi km/s$. Молекулярные звуковые волны повышают температуру потока над температурой окружающей среды, и эта температура определяет энергию, которая должна греть пьезодатчик. Вычислим температуру этого нагрева. Температура среды определяется $T \sim 1836 m_e c_s^2 = 1836 \cdot (1.5 \cdot 10^5)^2 \cdot 2m_e$, так как считаем, что нуклонов в атоме вдвое больше электронов. Повышение температуры равно $\Delta T \sim m_e c_F^2 = 10^{13} m_e$, берем среднее геометрическое между максимальным и минимальным значением молекулярной фазовой скорости. Имеем отношение температур $\Delta T / T = 0.12; \Delta T = 36°K$. Но надо учитывать что число свободных электронов меньше числа связанных электронов в отношении $137^2 c_F^2 / c^2 = 0.00021$ (величина $c_F^2 / n = const$) и тогда увеличение температуры равно $\Delta T = 0.0076°K$.

Надо учитывать, что энергия самых быстрых молекулярных и обычных частиц соотносится как величина $\frac{\Delta T}{T} = \frac{c_F^2}{2 \cdot 1836 c_s^2} = 1.74; c_F = 4\pi 10^6 cm/s$. Проникновение молекулярных волн в жидкость может вызвать этот эффект. В жидкости их не надо пересчитывать на число связанных электронов, это необходимо для определения изменения температуры. Т.е. помеха молекулярных колебаний в жидкости может составлять 174%, если задействованы самые скоростные колебания. Эти молекулярные колебания создают фон, который имеет низкочастотную огибающую, которую мы и воспринимаем. При нелинейном эффекте, который определяет огибающую, сигнал определяется разностью и суммой частот

$$\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) = \frac{1}{2}\{\cos[(\omega_1 - \omega_2)t] + \cos[(\omega_1 + \omega_2)t]\}$$

Эта огибающая не информативна, а переносят информацию обычные звуковые волны, частоту которых мы и меряем.

Как с этим бороться я пока не знаю. Но человеческий организм научился бороться с этими молекулярными колебаниями, надо повторить этот алгоритм.

Одна из этих идей необходимо располагать пьезодатчик по центру трубопровода. Дело в том, что фронт молекулярных звуковых волн быстро сглаживается, т.е. большая амплитуда нелинейной волны с расстоянием затухает. Распространяющиеся по сечению звуковые волны взаимодействуют и поглощаются. Значит волна распространяется с большим наклоном относительно оси трубопровода и достигает его центра на большом расстоянии, когда волна затухла. Т.е. центр трубопровода свободен от молекулярных звуковых волн. Обычные же волны обладают свойством стремиться к скачкообразному фронту, и распространяются по центру трубопровода.

Кроме того, высокочастотные звуковые волны, имеющие меньшую массовую скорость чем обычные волны, складываясь образуют огибающую с большой массовой скоростью. Эта огибающая может воздействовать на пьезодатчик и создать серьезную хаотическую помеху за счет молекулярных звуковых волн.

Но каково влияние на пьезодатчик обычных звуковых волн. Его плотность энергии равна перепаду давления $\varepsilon = \rho v\omega = \Delta p = \rho c\Delta u$. Утечка пропорциональна частоте сигнала, лежащего в полосе $f_n = 0.2\frac{0.65\sqrt{2\frac{P-P_{atm}}{\rho}}}{d}$, $f_h = 0.35\frac{0.65\sqrt{2\frac{P-P_{atm}}{\rho}}}{d}$, где используется давление в трубопроводе, атмосферное давление, плотность жидкости, диаметр отверстия. По этой частоте можно определить массовую скорость в волне и перепад давления $\Delta u = A\omega; \Delta p = \rho c A\omega$. На более высоких частотах амплитуда помехи больше, чем амплитуда сигнала от утечки.

Так как $\Delta u = A\omega$, где амплитуда скорости пропорциональна длине свободного пробега $A = \frac{v}{c} = \frac{1}{3}\Lambda$ в случае газа или характерного размера в случае жидкости. В случае утечки амплитуда сигнала равна $A = d^{\alpha}\Lambda^{1-\alpha}$, где величина диаметра отверстия утечки d, определяет слабая или сильная утечка. Коэффициент α определяет влияние силы утечки. Приблизительное значение этого коэффициента 2/3. Т.е. утечка имеет запас по частоте $F = (\frac{d}{\Lambda})^{\alpha} f = \frac{1}{d^{1-\alpha}\Lambda^{\alpha}} 0.65\sqrt{2\frac{P-P_{atm}}{\rho}}$, где f - частота утечки, а F - частота помехи. При этом соотношении частот сигнал будет одинаков от помехи и утечки.

При отсутствии утечки помеха максимальная. При слабой утечке диаметр отверстия мал, эквивалентная частота помехи велика, дисперсия сигнала мала и начинается порядок, признак $\frac{20\log s}{D}$ велик, как и признак $\frac{s}{D}$. При сильной утечке эквивалентная частота помехи мала, начинается сильная дисперсия, которая больше чем дисперсия без утечки и дисперсия сигнала увеличивается, отношение $\frac{s}{D}$ уменьшается, становясь меньше, чем в случае отсутствия сильной утечки. Дисперсия сигнала в случае наличия утечки определяется по формуле $D \sim \frac{U}{F} = \frac{0.65\sqrt{2\frac{P-P_{atm}}{\rho}}}{F} = \frac{d^{1-\alpha}\Lambda^{\alpha}}{0.3}$. В случае отсутствия утечки среднее от утечки равно дисперсии и приведенный к единице признак $\frac{s}{d} \sim 1$. Среднее и дисперсия пропорционально частоте сигнала, умноженному на характерной размер потока, определяющую амплитуду волны и делится на величину, имеющую размерность частоты $s \sim D \sim \Lambda Fa/U = \Lambda Fa/0.65\sqrt{2\frac{P-P_{atm}}{\rho}}$, где a радиус трубопровода. Приведенные свойства сигнала при наличии утечки на заданной частоте определяются по формуле $\frac{s}{D} = (\frac{\Lambda}{d})^{1-\alpha}\frac{0.3aF}{0.65\sqrt{2\frac{P-P_{atm}}{\rho}}}$.

Интегральная характеристика признака сводится к нахождению средней частоты по спектру сигнала $\frac{s}{D}=(\frac{\Lambda}{d})^{1-\alpha}\frac{0.3a<F>}{0.65\sqrt{2\frac{P-P_{atm}}{\rho}}}=(\frac{\Lambda}{d})^{1-\alpha}\frac{0.3aF_{\max}}{1.3\sqrt{2\frac{P-P_{atm}}{\rho}}}$, где средняя частота определяется по формуле в случае постоянного спектра $<F>=\int_0^{F_{\max}} Fa(F)dF/F_{\max}=F_{\max}/2; a(F)=1$. В случае отсутствия помехи при использовании приведенного отношения $\frac{s}{D}(\frac{L}{a})1.3^{L_0/L}/0.14=1$. В случае утечки имеем формулу

$$\frac{s}{D}=(\frac{a}{L})1.3^{L_0/L}\ 0.14(\frac{\Lambda}{d})^{1-\alpha}\frac{0.3a<F>}{1.3\sqrt{2\frac{P-P_{atm}}{\rho}}}=$$

$$=(\frac{a}{L})1.3^{L_0/L}\ 0.14(\frac{\Lambda}{d})^{1-\alpha}\frac{0.3aF_{\max}}{1.3\sqrt{2\frac{P-P_{atm}}{\rho}}}=(\frac{a}{L})1.3^{L_0/L}\ 0.14(\frac{d_{cr}}{d})^{1-\alpha}$$

При малом диаметре отверстия $d<d_{cr}$ приведенный признак велик и больше 1. При большом диаметре отверстия $d>d_{cr}$ приведенный признак мал. Существует диаметр отверстия, когда признак равен 1, при этом диаметр отверстия равен $d_{cr}=\Lambda[\frac{0.3aF_{\max}}{1.3\sqrt{2\frac{P-P_{atm}}{\rho}}}]^{\frac{1}{1-\alpha}}=\Lambda(\frac{50\cdot3\cdot10^4 0.3}{1.3\sqrt{2\cdot3\cdot9.8\cdot10^5}})^3=\Lambda1.3\cdot10^6$.

Параметр $\alpha=2/3$. Характерный размер в жидкости равен $\Lambda=\frac{3\nu}{c_s}=\frac{3\cdot0.014}{1.5\cdot10^5}=3\cdot10^{-7}cm$. Критический диаметр равен $d_{cr}=0.39cm$. Диаметр отверстия при слабой утечке равен $d=0.1cm$. Величина приведенного признака равна $(\frac{d_{cr}}{d})^{1-\alpha}=1.58$.

Выводы

В трубопроводе распространяются звуковые волны с малой амплитудой, но с высокой частотой и скоростью. С ростом периода молекулярной шероховатости (целых чисел n, m) растет длина звуковой волны, но падает ее скорость, частота, энергия, перепад давления и массовая скорость в звуковой волне. Звуковые волны в трубопроводе имеют молекулярное происхождение и образуются молекулами, расположенными на внутренней поверхности трубопровода. Грубая шероховатость поверхности не образует звуковые волны, так как на грубой шероховатости расположено огромное количество молекулярных шероховатостей. При больших числах n, m образуются обычные звуковые волны, массовая скорость которых больше массовой скорости молекулярных колебаний. Молекулярные звуковые волны воздействуя на датчик греют его, но повышение температуры двигающейся среды, которая определяет нагрев датчика, трудно обнаружить, так как оно составляет сотые доли градуса. Изучены свойства утечки для обычных звуковых волн. Показано что приведенное отношение среднего сигнала к дисперсии сигнала обратно пропорционально диаметру утечки в степени 1/3. Имеется критический диаметр отверстия утечки, когда сигнал утечки совпадает с сигналом без утечки, т.е. условие когда среднее значение сигнала равно его дисперсии. При слабой утечке диаметр утечки меньше критического и приведенный сигнал больше единицы, а при сильной утечке диаметр отверстия больше критического, и приведенный признак меньше 1.